

相対性理論 概説

棚橋典大

2020年1月7日

概要

物理学の基礎理論の中から光と時計の理論である特殊相対性理論、重力現象の理論である一般相対性理論を取り上げ、それらの数学的な側面に注目しながら解説を行う。

目次

1	特殊相対性理論	2
1.1	特殊相対性原理とローレンツ変換	2
1.1.1	世界間隔	2
1.1.2	世界間隔の不変性	3
1.1.3	ローレンツ変換	4
1.1.4	ローレンツ変換の解釈	5
1.2	相対論的力学	6
1.2.1	粒子の世界線と固有時間	6
1.2.2	4元速度、4元運動量	7
1.2.3	粒子の分裂	8
2	一般相対性理論	8
2.1	一般相対性原理	9
2.2	リーマン幾何学、共変微分	10
2.2.1	計量、世界間隔	10
2.2.2	スカラー、ベクトル、テンソル	10
2.2.3	テンソル型の変換	12
2.2.4	共変微分	12
2.3	測地線方程式	15
2.4	時空曲率とアインシュタイン方程式	16
2.4.1	曲率テンソル	16
2.4.2	測地線偏差の式	17
2.5	アインシュタイン方程式	18

3	一般相対論の応用	19
3.1	弱重力場	19
3.1.1	線形化アインシュタイン方程式	19
3.1.2	重力波	20
3.1.3	質点の周りの重力場	21
3.2	ブラックホール時空	22
3.2.1	シュバルツシルト解	22
3.2.2	シュバルツシルト時空の因果性	23
3.2.3	事象の地平面	24
3.2.4	見かけの地平面	25

1 特殊相対性理論

1.1 特殊相対性原理とローレンツ変換

1.1.1 世界間隔

まず、下記の量を導入する。

- 4次元時空の座標: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$. ただし $(\mu = 0, 1, 2, 3)$
- 光速: $c = (\text{定数})$
- 世界間隔と Minkowski 計量: 微小距離 $dx^\mu \equiv x_2^\mu - x_1^\mu$ だけ離れた二つの点 $x_1^\mu = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$, $x_2^\mu = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$ の間の世界間隔 ds を

$$ds^2 = -(c dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

と定義する。ここで、係数行列 $g_{\mu\nu}$ を Minkowski 計量と呼ぶ:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

また、式 (1) のように複数現れた添字については和をとる (Einstein の規約)。

世界間隔 ds^2 について、以下の主要な性質を紹介しておく。

- 光円錐: 地点 1 から光が発せられた時、その経路上では

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = c dt \quad \therefore ds^2 = -(c dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0. \quad (3)$$

が成立する。この式によって定義される 4次元時空中の円錐を光円錐 (light cone) と呼ぶ。

- 因果性：光よりも早く運動する粒子は存在しないので、この光円錐の外部に存在する点には地点1から発せられた粒子は到達できない。この意味で、光円錐はある地点の因果的未來・過去と因果的に繋がらない領域とを分ける境界となる。

光よりも遅い粒子の経路上では $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 < 0$ 、光よりも速い運動の経路上では $ds^2 > 0$ となる。これらの場合を以下のように呼び表す。

$$\begin{cases} ds^2 < 0 & \text{経路は時間的} \\ ds^2 = 0 & \text{経路は光的 (ヌル)} \\ ds^2 > 0 & \text{経路は空間的} \end{cases} \quad (4)$$

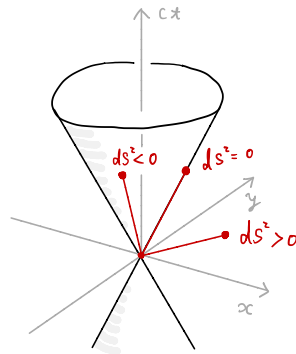


図 1: 光円錐と世界間隔 ds^2 との関係。

1.1.2 世界間隔の不変性

- 特殊相対性原理: あらゆる慣性系において、物理法則は変化しない。

特に、光の伝搬速度はどの慣性系から見ても一定の値 c をとる (光速不変の原理)。

以下では、ある静止系 x^μ の原点から飛ばした光を、それに対して一定速度 v^i ($i = 1, 2, 3$) で運動する慣性系で観測することを考える。

光の経路上では $ds^2 = 0$ となるが (式 (3))、特殊相対性原理は別の慣性系 x'^μ に移った後でも光の経路上で

$$ds^2 = 0 \Leftrightarrow ds'^2 = -(cdt')^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0 \quad (\because \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} = cdt') \quad (5)$$

を満たすことを要請する。

ここで、静止系 x^μ から慣性系 x'^μ に移る座標変換は次の 1 次変換

$$dx^\mu = \Lambda^\mu_{\nu'} dx'^{\nu'} \quad (6)$$

で与えられる。これを用いると、静止系における世界間隔 ds^2 は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} dx'^{\mu'} dx'^{\nu'} \quad (7)$$

と慣性系の座標距離 dx'^μ の 2 次式で表される。

慣性系における光の伝搬面上では式 (5) が満たされるが、このときに式 (7) で表される ds^2 もゼロにならなければならない。この性質を持つのは式 (5) の形の二次式

$$-(c dt')^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \quad (8)$$

に限られるため、¹ 世界間隔 ds^2 を慣性系の座標 x^μ で表したものは式 (8) の定数倍で与えられる：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = C(|v|) [-(c dt')^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2] \equiv C(|v|) ds'^2. \quad (10)$$

比例係数 $C(|v|)$ は慣性系の速度の絶対値 $|v|$ だけに依存する定数である。

ここで、逆変換を適用した際に元の ds^2 に戻らないといけなことから $C(|v|)C(|-v|) = C^2(|v|) = 1$ が要請され、このうち物理的に意味のあるものは $C(|v|) = 1$ に限られる。以上より、 $ds^2 = 0$ の場合に限らず、 $ds^2 \neq 0$ が任意の値をとる場合について

$$ds^2 = ds'^2 \quad (11)$$

となることがわかる。これが特殊相対性原理の帰結である。

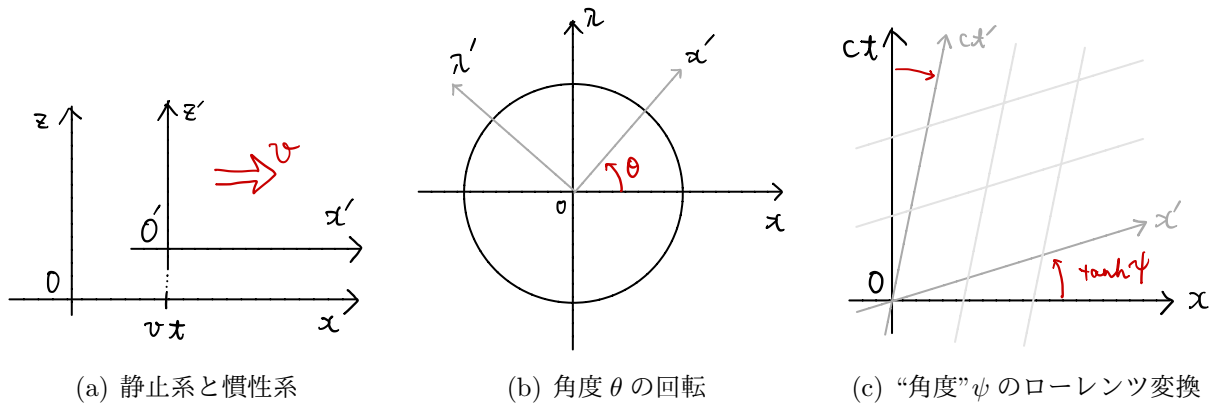


図 2: (a) ローレンツ変換で考える静止系と速度 v の慣性系との関係。(b) 角度 θ の回転。(c) 回転変換を式 (14) のとおり変形して得られるローレンツ変換。

1.1.3 ローレンツ変換

世界間隔の不変性 (11) を仮定すれば、これを満たす一般的な一次変換を導出することができる。

簡単のため、時空の 2 次元部分 (t, x) だけに注目する。さらに、ローレンツ型の線素 $-c^2 dt^2 + dx^2$ の代わりに、ユークリッド型の線素

$$dl^2 \equiv d\lambda^2 + dx^2 \quad (12)$$

を考える。この両者は変換 $d\lambda = ic dt$ によって結ばれている。

¹簡単のため、時空の 2 次元部分 (t, x) だけを考える。このとき、光の経路は $ds^2 = 0 \Rightarrow dx = \pm c dt$ で与えられる。慣性系 (t', x') に座標変換をした後に、慣性系における光の経路 $x' = \pm ct'$ 上で関係式 $ds^2 = 0$ が保たれるためには、 ds^2 が $(\pm c dt' + dx')$ の積で与えられるほかない：

$$ds^2 = C(|v|)(-c dt' + dx')(c dt' + dx') = C(|v|)(-c^2 dt'^2 + dx'^2) = C(|v|) ds'^2. \quad (9)$$

したがって ds^2 と ds'^2 は比例関係にならなければならない。

線素 (12) を不変に保つ変換は、2次元平面の回転（と並進）に限られ、具体的には

$$dx^\mu = \Lambda^\mu_{\mu'} dx'^{\mu'}, \quad (dx^\mu) = \begin{pmatrix} d\lambda \\ dx \end{pmatrix}, \quad (\Lambda^\mu_{\mu'}) = \begin{pmatrix} \Lambda^\lambda_{\lambda'} & \Lambda^\lambda_{x'} \\ \Lambda^x_{\lambda'} & \Lambda^x_{x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (13)$$

と与えられる。これをローレンツ型の線素に関する式に直すためには

$$d\lambda = ic dt, \quad \theta = i\psi \quad (\because \cos \theta = \cos(i\psi) = \cosh \psi, \quad \sin \theta = \sin(i\psi) = i \sinh \psi) \quad (14)$$

と変換すればよく、その結果は

$$dx^\mu = \Lambda^\mu_{\mu'} dx'^{\mu'}, \quad (dx^\mu) = \begin{pmatrix} c dt \\ dx \end{pmatrix}, \quad (\Lambda^\mu_{\mu'}) = \begin{pmatrix} \Lambda^t_{t'} & \Lambda^t_{x'} \\ \Lambda^x_{t'} & \Lambda^x_{x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi \\ \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix}. \quad (15)$$

また、 y, z 方向の座標には変換は発生しないと仮定してよいことも示すことができ、その部分も含めた4次元 Minkowski 時空におけるローレンツ変換を

$$dx^\mu = \Lambda^\mu_{\mu'} dx'^{\mu'}, \quad (dx^\mu) = \begin{pmatrix} c dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad (\Lambda^\mu_{\mu'}) = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & & \\ \sinh \psi & \cosh \psi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

と与えられる。

1.1.4 ローレンツ変換の解釈

ローレンツ変換の表式 (16) の意味づけを見るために、再び (t, x) 部分に注目して変換式を具体的に書くと

$$\begin{aligned} c dt &= \cosh \psi c dt' + \sinh \psi dx' \\ dx &= \sinh \psi c dt' + \cosh \psi dx' \end{aligned} \quad (17)$$

慣性系で静止している粒子の世界線上では $dx' = 0$ が満たされる。この粒子の運動を静止系で観測したすると、その世界線上では

$$c dt = \cosh \psi c dt', \quad dx = \sinh \psi c dt' \quad \therefore v \equiv \frac{dx}{dt} = c \tanh \psi. \quad (18)$$

すなわち、 ψ は静止系で計った慣性系の速度 v に対応するパラメタである。 v を使ってローレンツ変換の式を書き下すと

$$(\Lambda^\mu_{\mu'}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v/c & & \\ \gamma v/c & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} dt = \gamma(dt' + \frac{v}{c} dx') \\ dx = \gamma(dx' + \frac{v}{c} dt') \\ dy = dy' \\ dz = dz' \end{cases} \quad (19)$$

この式に現れる係数 $\gamma = \gamma(|v|) \geq 1$ をローレンツ因子と呼ぶことがある。運動が非相対論的 ($|\frac{v}{c}| \ll 1$) のときには $\gamma \simeq 1$ となる。

式 (19) から、以下のような物理的性質を読み取ることができる。

- 動く時計は遅く見える。 $t = \gamma(t' + \frac{v}{c}x')$ に注目すると、速度 v の慣性系で静止している時計が t' 秒進むとき、静止系の時計は $t = \gamma t' \geq t'$ 秒だけ多く進むことからこれがわかる。
- 運動する物体のローレンツ収縮が起こる。 x 方向に一定速度 v で運動する慣性系にある長さ L' の棒について、その長さを静止系である時刻 $t = 0$ に計ることを考える。慣性系の時刻 $t' = 0$ において棒の両端が $(t', x') = (0, 0), (0, L')$ にあるとする。ローレンツ変換の式

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c}x' \right), \quad x = \gamma \left(x' + \frac{v}{c}t' \right)$$

に従うと、静止系における棒の両端は $(t, x) = (0, 0), (\gamma \frac{v}{c}L', \gamma L')$ にある。このうち、右端の位置を時刻 $t = 0$ まで引き戻すと

$$x(t = 0) = x - vt = \gamma L' - v \frac{\gamma \frac{v}{c}L'}{c} = \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) L' = \frac{L'}{\gamma}.$$

したがって、時刻 $t = 0$ で棒の両端の位置を読み取ることで長さを計ると、静止時の長さ L' より γ 倍縮んで見える。

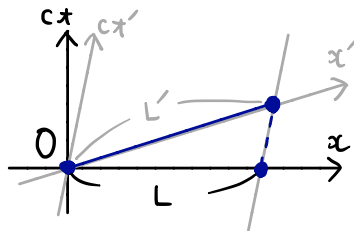


図 3: ローレンツ収縮を観察するための棒の配位。

- 速度の合成則は、非相対論的な場合の式 $V = v_1 + v_2$ からずれる。ローレンツ変換の式 (19) より、慣性系で速度 $v' = \frac{dx'}{dt'}$ で運動する粒子を静止系から眺めると、その速度 $V = \frac{dx}{dt}$ は

$$\frac{V}{c} = \frac{dx}{cdt} = \frac{\frac{v}{c}dt' + dx'}{cdt' + \frac{v}{c}dx'} = \frac{v + v'}{c \left(1 + \frac{vv'}{c^2} \right)} \quad \therefore V = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}. \quad (20)$$

どれだけ加速しても粒子の速度は光速を超えられないこと ($v \rightarrow c \Rightarrow V \rightarrow c$)、どの系から見ても光の速度は一定 ($v, v' = c \Rightarrow V = c$) などがこの式から見て取れる。光に近い速さで飛んでいる時に自分の顔を鏡で見るとどう見えるか、といった問いにはこの式から答えを出せる。

1.2 相対論的力学

1.2.1 粒子の世界線と固有時間

ある粒子が運動する経路 (世界線と呼ぶ) を $x^\mu = x^\mu(\tau) = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ と指定する。ただし、その粒子に貼りついて一緒に運動するときの刻みが τ であるとする。

この時計が静止しているような慣性系 $x'^\mu = (\tau, x', y', z')$ に移ってこの運動を観察すると、粒子も一点に静止しているように見えるので

$$ds'^2 = -(cd\tau)^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = -(cd\tau)^2. \quad \therefore cd\tau = \sqrt{-ds'^2}. \quad (21)$$

このようにして計られる時間 τ のことを固有時間と呼ぶ。

静止系でこの粒子を見たときに $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ ($i = 1, 2, 3$) で運動しているとする。このとき、粒子の経路に沿って計る固有時間は、静止系で計る時間 t よりも短くなる。

$$-(cd\tau)^2 = ds'^2 = ds^2 = -(c dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -(c dt)^2 \left(1 - \delta_{ij} \frac{v^i v^j}{c^2}\right) \quad (22)$$

$$\therefore d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{dt}{\gamma} \quad (23)$$

動く時計が遅く進むように見えることに対応している。

1.2.2 4元速度、4元運動量

固有時間を使って計った速度を

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dct(\tau)}{d\tau}, \frac{dx(\tau)}{d\tau}, \frac{dy(\tau)}{d\tau}, \frac{dz(\tau)}{d\tau} \right) \quad (24)$$

定義して4元速度と呼ぶ。固有時間の定義(21)より、 u^μ の $g_{\mu\nu}$ についての内積は $-c^2$ に等しくなる：

$$u^2 \equiv g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = - \left(\frac{dct(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dz(\tau)}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = -c^2 \quad (25)$$

式(23)より、4元速度の時間成分はローレンツ因子と $u^t = c \frac{dt}{d\tau} = \gamma c$ のように関連している。空間成分は、 $u^i = \frac{dx^i(\tau)}{d\tau} = \frac{dt(\tau)}{d\tau} \frac{dx^i(\tau)}{dt} = \gamma v^i$ のように非相対論的な速度 v^i に対応している。

4元速度に粒子の静止質量 m (定数) をかけた量

$$p^\mu \equiv m u^\mu = \left(mc \frac{dt(\tau)}{d\tau}, m \frac{dx^i(\tau)}{d\tau} \right) \quad (26)$$

を4元運動量と呼ぶ。空間成分は $p^i = m \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma m v^i$ となり、非相対論的な運動量 $m v^i$ にローレンツ因子 γ をかけたものになる。

4元運動量の時間成分は $p^t = mc \frac{dt(\tau)}{d\tau} = \gamma mc$ となる。この意味を解釈するために、 $|v/c| \ll 1$ の場合に p^t を v について展開してみると

$$p^t = \gamma mc = \frac{mc}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots \right) \quad (27)$$

となる。右辺のうち $\frac{1}{2} m v^2$ は、非相対論的な粒子の運動エネルギーである。したがって、 $c p^t$ はエネルギーにあたる量と解釈できる。こうするとき、右辺に含まれる mc^2 は粒子が静止して $v^i = 0$ となる場合にも残る定数項である。この量を静止質量エネルギーと呼ぶ。式(27)のように非相対論的な場合には静止エネルギーと運動エネルギーが一見分かれて見えるが、一般的な場合(26)ではこの両者に特に区別はない。

式(25)より、4元運動量 $p^\mu = (\gamma mc, \gamma m v^i) \equiv (E/c, p^i)$ について以下の式が成立する。

$$p^2 \equiv g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -\frac{E^2}{c^2} + \delta_{ij} p^i p^j = -m^2 c^2 \quad \therefore E^2 = (mc^2)^2 + (c p^i)^2 \quad (28)$$

1.2.3 粒子の分裂

現在考えている時空が時間並進しても不変であることから、その時空上で運動する粒子の4元運動量は運動の過程で一定であることが従う。これを使って、ある粒子が分裂する際の質量変化を調べてみる。

静止質量 M の粒子が、質量 m_1 と m_2 の二つの粒子に分裂する過程を考える。各粒子の4元運動量を $p_M^\mu, p_1^\mu, p_2^\mu$ とするとき、4元運動量の保存則より

$$p_M^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu . \quad (29)$$

この式と初期状態では粒子が静止していることから、以下の関係式が従う。

$$p_M^\mu = \begin{pmatrix} Mc \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} \\ p^i \end{pmatrix}, \quad p_2^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E_2}{c} \\ -p^i \end{pmatrix}, \quad Mc^2 = E_1 + E_2 . \quad (30)$$

ここで、粒子 1, 2 について関係式 (28) を立ててみると

$$E_1^2 = (m_1 c^2)^2 + (c p^i)^2 \quad E_2^2 = (m_2 c^2)^2 + (-c p^i)^2 \quad (31)$$

この両者の和をとったものが $(Mc^2)^2$ に等しくなることから

$$\begin{aligned} (Mc^2)^2 &= (E_1 + E_2)^2 = (m_1 c^2)^2 + (m_2 c^2)^2 + 2(c p^i)^2 + 2\sqrt{(m_1 c^2)^2 + (c p^i)^2} \sqrt{(m_2 c^2)^2 + (c p^i)^2} \\ &= (m_1 c^2 + m_2 c^2)^2 + \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1 m_2} (c p^i)^2 + \mathcal{O}((c p^i)^4) \end{aligned} \quad (32)$$

この式は、元の粒子の静止質量エネルギー Mc^2 と比べて崩壊後の粒子の静止エネルギー $m_1 c^2, m_2 c^2$ の和は小さくなっており、その差の分だけ生成粒子が p^i に比例する速度を持つことを表している。

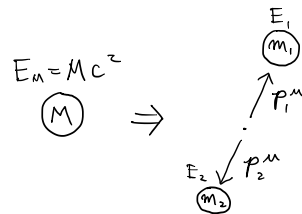


図 4: 質量 M の静止している粒子が質量 m_1, m_2 の粒子に分裂するとき、質量欠損が生じるならその分のエネルギーが生成粒子に分配される。

2 一般相対性理論

他にもいろいろな説明の仕方があるが、特殊相対性理論と一般相対性理論との関係は以下のよう
に言い表すこともできる。

- 特殊相対性理論：ある物理量を異なる慣性系で測定したときの変換則（ローレンツ変換）を与える理論

- 一般相対性理論：ある物理量を（非慣性系も含む）異なる座標系で測定したときの変換則を与える理論

さらに、非慣性系で発生する慣性力と重力とは同一のものであると仮定することで、一般相対性理論は重力を記述する理論となる。また、非慣性系を対象とすることで、一般座標変換と曲がった時空を考えることが自動的に必要となる。

以下では、上記の説明の各部分について説明を進めていく。

前章で導入した Minkowski 計量 (2) は特別な役割を果たすので、以下ではこれを

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \text{Diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (33)$$

と、一般的な計量 $g_{\mu\nu}$ と区別して表記する。

2.1 一般相対性原理

一般相対論は以下の2つの原理に基づいて構築できる理論である。

- 一般相対性原理: あらゆる座標系において、物理法則は変化しない。
- 等価原理: 局所的には、加速度運動による見かけの力で重力を打ち消すことができる。

一般相対性原理で出てくる「あらゆる座標系」には、ある慣性系に対して加速度運動をしているような非慣性系も含まれる。新しい座標 x'^{μ} が元の座標 x^{ν} の任意関数で与えられるような、一般的な座標変換

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu}) \quad (34)$$

を考えると、ある慣性系から非慣性系に移ることができる。このような変換を行った後でも、物理法則の方程式は変換前と同じ形で与えられなければならない、というのが一般相対性原理の意味することである。後述するように、これは座標変換に対してテンソルとしてふるまう量だけで方程式が表されていれば実現される。そのような性質のことを共変的と呼ぶことがある。

等価原理は、非慣性系における物理現象を重力と関係づけるために必要となる。上記の一般相対性原理に基づいて、非慣性系における物理法則の式を作ったとする。等価原理に基づけば、その方程式は（局所的には）重力場が存在する場合の物理法則の式とみなしてもよいことになる。一般相対性理論では、重力場の影響はこのようにして理論に取り込まれる。

余談になるが、等価原理の文言のうち「加速度運動による見かけの力で重力を打ち消すことができる」の部分の意味を説明しておく。自由落下するエレベータの中は無重力状態であるように感じられる、というだけの話ではあるのだが、それを式で書き表してみる。ある外力のかかっていない慣性質量 $m_{\text{慣性}}$ の粒子の運動を考えると、その運動方程式は

$$m_{\text{慣性}} a^i = 0. \quad (35)$$

ある加速度 α で運動する系からその粒子を見ると、その粒子には加速度と逆向きの慣性力がかかったように見える:

$$m_{\text{慣性}} a^i = -m_{\text{慣性}} \alpha^i. \quad (36)$$

一方で、静止系に重力加速度 g^i がかかっている場合、粒子には重力質量 $m_{\text{重力}}$ に比例する力がかかる:

$$m_{\text{慣性}} a^i = m_{\text{重力}} g^i . \quad (37)$$

ここで、もし $m_{\text{慣性}} = m_{\text{重力}}$ であれば、 $\alpha^i = g^i$ とセットすることで重力加速度を打ち消すことができる:

$$m_{\text{慣性}} a^i = m_{\text{重力}} g^i - m_{\text{慣性}} \alpha^i = 0 . \quad (38)$$

関係式 $m_{\text{慣性}} = m_{\text{重力}}$ は実験的に高精度で確かめられており、実際にこの方法で重力加速度を打ち消すことが可能である。²この意味で、系の加速度運動による慣性力と重量は互いに見分けがつかない。

2.2 リーマン幾何学、共変微分

式 (34) で表されるような一般的な座標系を取り扱うのに必要となる道具を整備する。

2.2.1 計量、世界間隔

座標変換 (34)(の逆) に対して、座標基底 dx^μ は

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \quad (39)$$

と変換する。したがって、Minkowski 時空における世界間隔 $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} dx'^\rho dx'^\sigma \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (40)$$

と変化する。ここで、座標変換で ds^2 自体は変化しないと仮定しておく。このようにして得られる計量 $g_{\mu\nu}$ は、Minkowski 計量 (33) と異なり座標 x'^μ に依存する成分を持つ。

これをさらに一般化して、計量 $g_{\mu\nu}$ の成分が座標 x^μ の任意関数で与えられるものとする。一般には、そのような計量 (から与えられる世界間隔 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$) はゆがんだ時空を表す。

なお、この一般化された計量と世界間隔についても、1.1.1 の式 (3), (4) で導入したのと同じ光の伝搬面の性質や因果性が成立する。特に、光の伝搬面は $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$ を満たす面で与えられる。

2.2.2 スカラー、ベクトル、テンソル

次に、このような一般座標系における物理量を表すのに使う量を導入する。物理量は (スカラー) 関数やベクトル量、および計量 $g_{\mu\nu}$ のような多成分を持つ量で表せるが、それらを一般的な座標について定義しておく。

座標変換 (34) に対して、座標基底ベクトル $\partial/\partial x^\mu$ と、それに対して $dx^\mu \cdot \partial/\partial x^\nu = \partial x^\mu / \partial x^\nu = \delta^\mu_\nu$ を満たす双対基底 dx^μ は

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} , \quad dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \quad (41)$$

²一つの粒子の運動だけでなく、少し離れた複数の粒子の相対的な運動の様子を測定することで、非慣性系における慣性力と、ある重力源が作る真の重力場とを区別することができる。等価原理の説明で「『局所的には』加速度運動による見かけの力で重力を打ち消すことができる」と但し書きをつけているのはこのため。

と変換する。あるベクトル V をこれらの基底を用いて表すと

$$V = V^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} = V_\mu(x) dx^\mu \quad (42)$$

となる。これに式 (41) の座標変換をかけると

$$V = V^\mu(x) \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = V_\mu(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu . \quad (43)$$

一方、同じものを新座標 x'^μ の基底で表すと

$$V = V'^\mu(x') \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = V'_\mu(x') dx'^\mu . \quad (44)$$

これらを比較することで、ベクトルの成分 V^μ, V_μ の変換則は

$$V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x) , \quad V'_\mu(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} V_\mu(x) \quad (45)$$

と与えられることがわかる。このように変換する V^μ のことを反変ベクトル、 V_μ のことを共変ベクトルと呼び、式 (45) がその定義を与えると理解することにする。

複数成分を持たない関数 $\phi(x)$ は、座標変換したとしても上記のような基底の変換の影響を受けない：

$$\phi(x) = \phi(x') . \quad (46)$$

このように振る舞う量をスカラーと呼ぶ。

ベクトルを一般化したものとして、座標変換に対して次のように振る舞う量を考える：

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}(x') = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q}(x) . \quad (47)$$

このように変換する量 $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ のことを (\mathbf{p}, \mathbf{q}) -テンソルと呼ぶ。例えば、計量 $g_{\mu\nu}$ は対称 $(0, 2)$ -テンソルのひとつである。

座標基底を用いて、計量テンソルを改めて

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (48)$$

と表すと、これは2つのベクトルの内積を与える関数となっており、その成分は基底 $\partial/\partial x^\mu$ の内積値そのものになる。

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} \equiv g \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\mu\nu} . \quad (49)$$

この書き方を使うと、双対基底の定義式 $dx^\mu \cdot \partial/\partial x^\nu = \delta^\mu_\nu$ は

$$dx^\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} = g \left(dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \delta^\mu_\nu \quad (50)$$

と表される。

2.2.3 テンソル型の変換

計量テンソル g の上記関係式を使うことで、テンソルの共変成分と反変成分との間の変換則を与えることができる。式 (42) の両辺と別のベクトル $W = W^\nu(\partial/\partial x^\nu)$ との内積をとると

$$\begin{aligned} g\left(V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, W^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) &= g\left(V_\mu dx^\mu, W^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \Leftrightarrow V^\mu W^\nu g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = V_\mu W^\nu g\left(dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \\ &\Leftrightarrow V^\mu W^\nu g_{\mu\nu} = V_\mu W^\mu. \end{aligned} \quad (51)$$

この式が任意の W^μ に対して成立するので

$$V^\mu g_{\mu\nu} = V_\nu \quad (52)$$

と、共変ベクトル成分 V_ν が反変ベクトル V^μ と計量テンソル $g_{\mu\nu}$ との縮約で与えられることになる。さらに、 $g_{\mu\nu}$ の逆行列 $g^{\mu\nu}$ を

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho \quad (53)$$

で導入すると、これを式 (52) の添字 ν と縮約することで

$$V^\mu = V_\nu g^{\nu\mu} \quad (54)$$

が得られる。計算上は、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とその逆 $g^{\mu\nu}$ でテンソル添字の上げ下げができると思ってよい。

計量テンソルとの縮約の他に、任意のテンソル同士の縮約を考えることもできる。例えば、反変ベクトル ((1,0)-テンソル) V^μ と共変ベクトル ((0,1)-テンソル) W_μ との内積値 $V^\mu W_\mu$ を考えると、これは座標変換に対してスカラー ((0,0)-テンソル) として振る舞うことが示せる。

2.2.4 共変微分

物理方程式を書き下すためには物理量の微分をとる必要がある。物理量をテンソルとして表すとき、それを微分した量もテンソルになっていないと、物理理論の方程式に出てくるパーツとして使いづらくなってしまいます。微分した量がテンソルとして振る舞うことを要請すると、微分演算子にどのような修正が生じるかを調べてみる。

式 (46) の通り、スカラーは座標変換しても (関数の引数以外は) 変化しない。このことから、スカラーを偏微分したものは座標変換に対して共変ベクトルとして振る舞う：

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^\nu}. \quad (55)$$

一方で、ベクトルを座標変換すると式 (45) のように変換係数がかかる。そのため、ベクトルを偏微分したものは

$$\frac{\partial V_\nu(x)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} V'_\sigma(x') \right) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial V'_\sigma(x')}{\partial x'^\rho} + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} V'_\sigma(x') \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \right) \quad (56)$$

となり、余計な第二項が出てくるためにテンソルの変換則 (47) を満たさなくなってしまう。上式のようにベクトルの偏微分を単純にとると、異なる地点のベクトルの値同士の差を取ることになる。

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} V_\nu(x) = \lim_{\Delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{V_\nu(x + \Delta x) - V_\nu(x)}{\Delta x^\mu} \quad (57)$$

しかし、異なる地点のベクトル量は座標変換に対して異なった変換をするので、それらの差である偏微分値もベクトルとして振る舞わなくなる。この分のずれが式 (56) に出てきた余分な項の起源である。

このずれを取り除くためには、地点 x^μ におけるベクトルを地点 $x^\mu + \Delta x^\mu$ まで“平行移動”してから計算を行えばよい。

$$\nabla_\mu V_\nu(x) \equiv \lim_{\Delta x^\mu \rightarrow 0} \frac{V_\nu(x + \Delta x) - V_{//\nu}(x + \Delta x)}{\Delta x^\mu} . \quad (58)$$

ただし、 $V_{//\nu}(x + \Delta x)$ は $V_\nu(x)$ を原点 x^μ から“平行移動”して得られるベクトルで、係数 $\Gamma_{\nu\sigma}^\rho$ を用いて下記のように表されると仮定しておく。

$$V_{//\nu}(x + \Delta x) \equiv V_\nu(x) + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho(x) V_\rho(x) \Delta x^\sigma . \quad (59)$$

係数 $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ は後で決定する。この表式を使うと、式 (58) は

$$\nabla_\mu V_\nu = \frac{\partial V_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho V_\rho . \quad (60)$$

係数 $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ を決定しなければこの式の値も定まらないが、とりあえずこの式で定義される微分演算子を共変微分と呼ぶことにする。また、 $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ をクリストッフエル記号と呼ぶ。

式 (60) で定義される共変微分 ∇_μ と“平行移動”したベクトル $V_{//}^\mu$ について、以下を要請する。

1. スカラー ϕ の二階共変微分は交換する:³

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) \phi = 0 . \quad (62)$$

2. スカラー ϕ の共変微分は偏微分と一致する:

$$\nabla_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} . \quad (63)$$

3. 平行移動によってベクトルのノルムは保存する :

$$g_{\mu\nu}(x + \Delta x) V_{//}^\mu(x + \Delta x) V_{//}^\nu(x + \Delta x) = g_{\mu\nu}(x) V^\mu(x) V^\nu(x) . \quad (64)$$

これらの条件から以下が従う。

- クリストッフエル記号の下2つの添字は対称である。 $\nabla_\mu \phi$ を共変ベクトルとみなして二階微分の交換子を計算すると

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) \phi = (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \phi - \Gamma_{\nu\mu}^\rho \nabla_\rho \phi + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \nabla_\rho \phi = (-\Gamma_{\nu\mu}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho) \nabla_\rho \phi . \quad (65)$$

したがって $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$.

³ $\nabla_\mu V_\nu$ がテンソルの変換則 (47) を満たすことから、クリストッフエル記号の変換則は

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \quad (61)$$

となる。等価原理に従えば、座標変換で時空を局所的に平坦 ($\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0$) にできるはずである。ここで、 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ が $\delta_{\mu,\nu}$ について対称であれば、 $\partial^2 x^\rho / \partial x'^\alpha \partial x'^\beta$ の値を調節することで上式の右辺をゼロにすることができる。このことから $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$ を要請してもよい [4]。

- 任意の型のテンソルの共変微分を構成できる。例えば、反変ベクトル V^μ の共変微分は、 $V^\mu W_\mu$ がスカラーであることから

$$\nabla_\mu(V^\nu W_\nu) = \partial_\mu(V^\nu W_\nu) \Leftrightarrow (\nabla_\mu V^\nu) W_\nu + V^\nu (\nabla_\mu W_\nu) = (\partial_\mu V^\nu) W_\nu + V^\nu (\partial_\mu W_\nu) . \quad (66)$$

この式に (60) を代入し、整理することで

$$\nabla_\mu W^\nu = \partial_\mu W^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu W^\rho \quad (67)$$

を得る。他の型のテンソルの共変微分も同様に構成できる。

- 平行移動の条件 3 に基づいて、クリストッフエル記号 $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ を計量 $g_{\mu\nu}$ で表せる。式 (64) の左辺に平行移動の式 (59) を代入すると

$$\begin{aligned} & g_{\mu\nu}(x + \Delta x) V_{//}^\mu(x + \Delta x) V_{//}^\nu(x + \Delta x) \\ &= g_{\mu\nu}(x + \Delta x) (V^\mu(x) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x) V^\alpha(x) \Delta x^\beta) (V^\nu(x) + \Gamma_{\gamma\delta}^\nu(x) V^\gamma(x) \Delta x^\delta) \\ &= (g_{\mu\nu}(x) + \partial_\rho g_{\mu\nu}(x) \Delta x^\rho) V^\mu(x) V^\nu(x) \\ &\quad + g_{\mu\nu}(x) V^\mu(x) \Gamma_{\gamma\delta}^\nu V^\gamma(x) \Delta x^\delta + g_{\mu\nu}(x) V^\nu(x) \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha(x) \Delta x^\beta + \mathcal{O}(\Delta x^2) . \end{aligned} \quad (68)$$

これが式 (64) の右辺に等しいので、 Δx^μ について一次の部分を取り出すと

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\rho}^\sigma = 0 . \quad (69)$$

この式の添え字を μ, ν, ρ について巡回置換し適当に足し合わせると、 $\Gamma_{\rho,\mu\nu} \equiv g_{\rho\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ として

$$\begin{aligned} +) \quad & \partial_\rho g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu,\nu\rho} + \Gamma_{\nu,\mu\rho} \\ +) \quad & \partial_\mu g_{\nu\rho} = \Gamma_{\nu,\rho\mu} + \Gamma_{\rho,\nu\mu} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{\nu,\mu\rho} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\rho}) . \\ -) \quad & \partial_\nu g_{\rho\mu} = \Gamma_{\rho,\mu\nu} + \Gamma_{\mu,\rho\nu} \end{aligned} \quad (70)$$

この式を少し変形してクリストッフエル記号の表式を得る:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) . \quad (71)$$

- $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$:

共変微分の定義 (60) を (0,2)-テンソルに拡張して計量 $g_{\mu\nu}$ に適用した式がゼロになること:

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} = 0 \quad (72)$$

を、式 (71) を代入することで示せる。ある経路 (接ベクトル: T^μ) に沿ってベクトル V^μ, W^μ を平行移動したとして ($T^\mu \nabla_\mu V^\nu = 0 = T^\mu \nabla_\mu W^\nu$)、それらの内積が保存することから

$$0 = T^\rho \nabla_\rho (g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu) = V^\mu W^\nu T^\rho \nabla_\rho g_{\mu\nu} \quad (73)$$

となることから $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ であることが分かる。

2.3 測地線方程式

平坦な時空 ($ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$) で、外力のかかっていない粒子の位置座標 $x^\mu(\tau)$ は

$$\frac{d^2 x^\mu(\tau)}{d\tau^2} = 0 \quad (74)$$

に従って時間発展する。ただし、 τ は $(cd\tau)^2 = -ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu(\tau) dx^\nu(\tau)$ で定義される粒子の固有時間である。この運動方程式 (74) を別の座標 $x^\mu(\tau) = x^\mu(x^\nu(\tau))$ で表してみると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x^\mu(\tau)}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \frac{d^2 x^\nu(\tau)}{d\tau^2} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{dx^{\prime\rho}(\tau)}{d\tau} \frac{dx^{\prime\nu}(\tau)}{d\tau} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\prime\rho} \partial x^{\prime\nu}} \\ \therefore \frac{d^2 x^{\prime\sigma}(\tau)}{d\tau^2} + \frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\prime\rho} \partial x^{\prime\nu}} \frac{dx^{\prime\rho}(\tau)}{d\tau} \frac{dx^{\prime\nu}(\tau)}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (75)$$

また、新座標 x'^μ における計量 $g'_{\mu\nu}$ は、元の座標 x^μ における計量 $\eta_{\mu\nu}$ を変換したもので与えられる:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (76)$$

これを偏微分した式

$$\partial_\rho g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\prime\rho} \partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{\prime\rho} \partial x'^\nu} \right) \quad (77)$$

を式 (70) のように添字を置換しつつ足し合わせることで、式 (75) に現れる係数を

$$\frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\prime\rho} \partial x'^\nu} = \frac{1}{2} g'^{\sigma\lambda} (\partial_\rho g'_{\nu\lambda} + \partial_\nu g'_{\rho\lambda} - \partial_\lambda g'_{\rho\nu}) = \Gamma'^{\sigma}_{\rho\nu} \quad (78)$$

と、計量 $g'_{\mu\nu}$ についてのクリストッフェル記号そのもので表せることが示せる。ただし、計量の逆行列が $g'^{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}$ となることを用いている。式 (78) を用いて式 (75) を書き直すと

$$\frac{d^2 x^{\prime\sigma}(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma'^{\sigma}_{\rho\nu} \frac{dx^{\prime\rho}(\tau)}{d\tau} \frac{dx^{\prime\nu}(\tau)}{d\tau} = 0. \quad (79)$$

この式は測地線方程式と呼ばれており、外力のかかっていない粒子が計量 $g'_{\mu\nu}$ の時空上で運動するときの経路を与える式になっている。ここでは平坦な時空 $\eta_{\mu\nu}$ で運動する粒子の経路を座標変換することでこの表式を得たが、より一般の曲がった時空 $g_{\mu\nu}$ における粒子の経路についてこの式がそのまま成立する。

- 粒子の4元速度 (= 粒子の世界線の単位接ベクトル) $T^\mu = dx^\mu(\tau)/d\tau$ と共変微分を使って測地線方程式 (79) を表すと

$$T^\mu \nabla_\mu T^\nu = 0 \quad (80)$$

となる。粒子の4元速度が粒子の経路に沿って一定である、ということを意味する式である。実際、 $\Gamma'^{\rho}_{\mu\nu} = 0$ となる座標系 (局所慣性系) ではこの式は (74) に帰着する。背景時空 $g_{\mu\nu}$ が曲がっている場合には、それに応じて粒子の軌道も曲がることになる。

- 測地線方程式 (79) は、粒子軌道の $x^\mu(\tau)$ の長さ

$$L \equiv \int \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu(\tau) dx^\nu(\tau)} = \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \quad (81)$$

を極小にする。実際、経路長 L について経路 $x^\mu(\tau)$ の変分を取ると

$$\begin{aligned}
\delta L &= \int d\tau \left[\frac{\partial \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}}{\partial x^\rho(\tau)} \delta x^\rho(\tau) + \frac{\partial \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}}{\partial \left(\frac{dx^\rho(\tau)}{d\tau} \right)} \delta \left(\frac{dx^\rho(\tau)}{d\tau} \right) \right] \\
&= \int d\tau \left[\frac{\partial \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}}{\partial x^\rho(\tau)} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}}{\partial \left(\frac{dx^\rho(\tau)}{d\tau} \right)} \right) \right] \delta x^\rho(\tau) \\
&= \dots \\
&= \int d\tau g_{\rho\mu} \left(\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \right) \delta x^\rho(\tau). \tag{82}
\end{aligned}$$

計算の途中で、変分を取る前の経路については $\sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = 1$ となることを使っている。この式から、経路長の極小条件 $\delta L = 0$ は経路についての測地線方程式 (79) と等価であることがわかる。

2.4 時空曲率とアインシュタイン方程式

2.4.1 曲率テンソル

計量 $g_{\mu\nu}$ が平坦時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ からずれるとき、クリストッフェル記号 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ は非自明な値をとる。しかし、クリストッフェル記号の変換則 (61) から分かる通り、(局所的には) 座標変換によって $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0$ とすることができてしまう。そこで、時空の歪みを表す量で座標系のとり方に依存しないものを構成する。

この目的のために、ベクトルを平行移動した際に生じる向きの変化を利用する。ベクトルの平行移動 (59) の結果は経路に依存し、特に閉経路にそってベクトルを一周分平行移動させた暁にはもとのベクトルの向きからのずれが生じる。このずれは平行移動を行う背景となった時空の歪みに起因し、またそのずれは座標に依存しないベクトル量として与えられる。このずれの大きさをを用いて背景時空の歪みをはかることを試みる。そのために、あるベクトル V^μ についての共変微分の交換子の値を

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V^\rho = R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho V^\sigma \tag{83}$$

と書き表す。左辺の項と右辺の V^σ はどれもテンソル量であるため、右辺に係数として現れた $R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho$ もテンソルとなる。これはリーマンテンソルと呼ばれるもので、背景時空の歪みと、それに起因して生じたベクトルの平行移動後のずれを表す量である。

詳細は省略するが、共変微分の性質などから以下を示すことができる。

- リーマンテンソルは、クリストッフェル記号の1階微分で与えられる。

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\sigma}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\rho}^\sigma}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma. \tag{84}$$

クリストッフェル記号は計量 $g_{\mu\nu}$ の1階微分で与えられるので、リーマンテンソルは計量の2階微分で構成されるテンソルである。

- リーマンテンソルはその添字について以下の対称性を持つ:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\sigma\rho\mu\nu} . \quad (85)$$

ただし $R_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma'} g_{\sigma'\sigma}$.

- リーマンテンソルを縮約して得られる $R_{\mu\nu} \equiv g^{\rho\sigma} R_{\mu\rho\nu\sigma}$ はリッチテンソル、 $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ はリッチスカラーと呼ばれる。
- 次で与えられるビアンキ恒等式

$$\nabla_{\alpha} R_{\beta\gamma\mu\nu} + \nabla_{\beta} R_{\gamma\alpha\mu\nu} + \nabla_{\gamma} R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad (86)$$

が成立する。それを縮約することで得られる

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0, \quad G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (87)$$

は縮約されたビアンキ恒等式、 $G_{\mu\nu}$ はアインシュタインテンソルと呼ばれている。

- アインシュタインテンソルは、次の意味で特別な意味を持つ量である。

ラブロックの定理 (1972): 2階の対称テンソル $H_{\mu\nu}$ で

(i) 計量の2階微分までで表される: $H_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}, \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}, \partial_{\gamma} \partial_{\delta} g_{\alpha\beta})$

(ii) 発散がゼロになる: $\nabla^{\alpha} H_{\alpha\beta} = 0$

(iii) 時空が4次元であるか、もしくは $H_{\mu\nu}$ が $\partial_{\alpha} \partial_{\beta} g_{\mu\nu}$ について線形である

のすべてを満たすものは $H_{\mu\nu} = C_1 G_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu}$ に限られる。ただし C_1, C_2 は定数。□

証明は原論文 [11, 12] か教科書 [3] の解説を参照のこと。特に、性質 $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$ が後ほどの議論で重要な役割を果たす。

2.4.2 測地線偏差の式

上述したとおり、クリストッフエル記号の値は座標によって変化し、特に局所的に $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = 0$ となる座標系を常にとることができる。測地線方程式 (79) にはこのクリストッフエル記号しか現れないため、測地線方程式だけから時空の歪みや重力場の強さを特徴づけることはできない。例えば、下向きの重力場が存在する場合でも、自由落下するエレベーターの中では重力が加速度によって打ち消されてしまい、一つの粒子の運動を見ているだけでは重力場の存在を検出することができなくなる。

一方、2つの粒子の運動に注目し、その経路間の距離がどう変化するかを測定すれば重力場の存在を検知することができる。一般相対論における運動を考える前に、ニュートン力学における重力場を考えてみることにする。ニュートン力学では、物質密度 ρ が重力ポテンシャル ϕ を作り、重力の強さは重力ポテンシャルの勾配として与えられる:

$$\delta^{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} = 4\pi G \rho, \quad F^i = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} . \quad (88)$$

ただし G は重力定数。2つの粒子の位置の差を $\xi^i \equiv x_2^i - x_1^i$ とすると、重力場による2つの粒子の運動経路のずれがどう時間変化するかは、2地点間の重力の強さの差によって決まるので

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \right). \quad (89)$$

一般相対論においてこれに対応する式は測地線偏差の式と呼ばれるもので、この式と同様に2つの測地線のずれを表すベクトル $\xi^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt}$ を“時間”方向に2階微分することで与えられる。ただし、絶対的な時間座標 t を導入する代わりに、接ベクトルを T^μ (s.t. $T^\mu\xi_\mu = 0$) とする測地線に沿った2階方向微分を考えることにする。詳細は省略するが、測地線方程式 $T^\mu\nabla_\mu T^\nu = 0$ や関係式 $\xi^\mu\nabla_\mu T^\nu = T^\mu\nabla_\mu\xi^\nu$ 、およびリーマンテンソルの定義式 (83) を用いることで

$$T^\alpha\nabla_\alpha (T^\beta\nabla_\beta\xi^\mu) = -R_{\alpha\beta\nu}{}^\mu\xi^\beta T^\alpha T^\nu \quad (90)$$

となることを示せる。このように、測地線同士の偏差は時空の曲率と直結した量となっているほか、式 (89) と比較することで $\partial_i\partial_j\phi \sim R_{i\alpha j\beta}T^\alpha T^\beta$ という対応関係が見て取れる。

2.5 アインシュタイン方程式

前節の対応関係についてトレース部分を取ると、物質密度と時空の曲率は $R_{\mu\nu}T^\mu T^\nu \sim \partial_i\partial^i\phi = 4\pi G\rho$ と関係していることが示唆される。このアイデアをもとに、曲率テンソルと、物質場の分布を表すテンソルとの対応関係を表す方程式を立ててみる。単純な候補の一つは、物質場を表す2階テンソル $T_{\mu\nu}$ を導入して

$$R_{\mu\nu} = 4\pi T_{\mu\nu} \quad (91)$$

とすることである。上述の対応関係に基づけば $T_{\mu\nu}T^\mu T^\nu \sim \rho$ なる対応関係がつけられる。しかし、ビアンキ恒等式 (87) を使うと、右辺の $T_{\mu\nu}$ に

$$\nabla^\mu \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) = 0 \quad (92)$$

なる制限がついてしまうことがわかる。一方で、縮約されたビアンキ恒等式 (87) に基づいた表式

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (93)$$

という方程式を立てると、式 (87) より $T_{\mu\nu}$ は

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (94)$$

なる方程式を満たせば良いことがわかる。実は、この式は物質場の保存則に対応する式であることが知られており、したがって重力場の方程式として式 (93) を採用すれば物質場の保存則 (94) が自然に再現されることがわかる。このようにして構成された方程式 (93) がアインシュタイン方程式と呼ばれているものである。

物質場を表すテンソル $T_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソルと呼ばれているものである。例えば、密度 ρ と圧力 P を持つ完全流体の $T_{\mu\nu}$ は、流体の4元速度を u^μ として

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \quad (95)$$

で与えられ、その保存則 $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ の成分は

$$u^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + P) \nabla^\mu u_\mu = 0 \quad (96)$$

$$(P + \rho) u^\mu \nabla_\mu u_\nu + (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \nabla^\mu P = 0 \quad (97)$$

で与えられる。これらは流体が満たす連続方程式とオイラー方程式の相対論版である。

3 一般相対論の応用

前節で導入したアインシュタイン方程式の解と、それから予言される物理現象を紹介する。

3.1 弱重力場

アインシュタイン方程式 (93) に基づいて、弱い重力場が従う方程式を導出し、重力波と質点の周りの重力場のふるまいを調べてみる。

3.1.1 線形化アインシュタイン方程式

<計量摂動> 重力場が弱い場合、すなわち時空のゆがみが十分小さい場合には、時空計量 $g_{\mu\nu}$ は平坦（ミンコフスキー）計量 $\eta_{\mu\nu}$ で近似できるので

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (98)$$

と表すことにする。 $h_{\mu\nu}$ が平坦計量からのずれである。以下では、 $h_{\mu\nu}$ が微小量だと思ってアインシュタイン方程式を展開することを試みる。

以下では添え字の上げ下げを平坦計量 $\eta_{\mu\nu}$ で行う。このとき、計量の逆行列は

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2) \quad (99)$$

と表される。

<曲率テンソルの展開> まず、アインシュタイン方程式を構成している曲率テンソルとクリストッフエル記号を $h_{\mu\nu}$ について展開する。クリストッフエル記号 (71) を h の一次の項まで展開すると

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} (\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(h^2). \quad (100)$$

ただし $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ 。これをもとにリーマンテンソル (84) を展開すると

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho}^\sigma &= \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma \\ &= \partial_\nu \left[\frac{1}{2} \eta^{\sigma\alpha} (\partial_\mu h_{\rho\alpha} + \partial_\rho h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\rho}) \right] - \partial_\mu \left[\frac{1}{2} \eta^{\sigma\alpha} (\partial_\nu h_{\rho\alpha} + \partial_\rho h_{\nu\alpha} - \partial_\alpha h_{\nu\rho}) \right] + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\sigma\alpha} (\partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\alpha} - \partial_\nu \partial_\alpha h_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho h_{\nu\alpha} + \partial_\mu \partial_\alpha h_{\nu\rho}) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \quad (101)$$

したがって、リッチテンソルは

$$\begin{aligned} R_{\mu\rho} &= R_{\mu\nu\rho}{}^\nu = \frac{1}{2}\eta^{\nu\alpha}(\partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\alpha} - \partial_\nu\partial_\alpha h_{\mu\rho} - \partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\alpha} + \partial_\mu\partial_\alpha h_{\nu\rho}) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu h^\nu{}_\mu + \partial_\mu\partial_\nu h^\nu{}_\rho - \square h_{\mu\rho} - \partial_\mu\partial_\rho h) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \quad (102)$$

ただし $\partial^\alpha \equiv \eta^{\alpha\beta}\partial_\beta$, $\square \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\partial_t^2 + \partial_i\partial^i$ はダランベール演算子、 $h \equiv h_\nu{}^\nu$ は $h_{\mu\nu}$ のトレース部分である。この表式からアインシュタインテンソルを導出すると

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\alpha h^\alpha{}_\nu + \partial_\nu\partial_\alpha h^\alpha{}_\mu - \partial_\mu\partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta} - \square h)\eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{1}{2}(-\square\psi_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\alpha\psi^\alpha{}_\nu + \partial_\nu\partial_\alpha\psi^\alpha{}_\mu - \partial^\alpha\partial^\beta\psi_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \quad (103)$$

ここで、表式のトレース部分を除いて単純化するために

$$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu} \quad (104)$$

という変数の書き換えを行った。

<座標条件> 式(98)で定義した計量の摂動 $h_{\mu\nu}$ は、座標変換を行うことでも変化する。次の式で与えられる微小座標変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x) \quad (105)$$

を行うとき、計量 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ は

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} = g_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu + \mathcal{O}(\xi^2) \quad (106)$$

$$\therefore h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu \quad (107)$$

と変化する。すなわち、4成分のパラメタ $\xi^\mu(x)$ で与えられる座標変換(105)をおこなうことで計量摂動 $h_{\mu\nu}$ を変化させることができる。

<線形化アインシュタイン方程式> 上記の座標変換の自由度を使って、計量摂動 $h_{\mu\nu}$ が次の条件式

$$\partial^\mu \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg_{\mu\nu} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial^\mu\psi_{\mu\nu} = 0 \quad (108)$$

を満たすよう調整する。この条件下で、式(103)に基づいてアインシュタイン方程式(93)を書き下すと

$$-\frac{1}{2}\square\psi_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (109)$$

となる。これが計量摂動 $\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}$ について線形化されたアインシュタイン方程式である。

3.1.2 重力波

物質が存在しない真空では、エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ はゼロとなる。このとき、式(109)は

$$\square\psi_{\mu\nu} = (-\partial_t^2 + \Delta)\psi_{\mu\nu} = 0 \quad (110)$$

となる。ただし $\Delta = \partial_i \partial^i = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ は空間 3 次元部分のラプラス演算子。この方程式 (110) は $\psi_{\mu\nu}$ についての波動方程式であり、その伝搬速度は光速 $c = 1$ と一致する。これが、重力場のゆがみが光速で伝搬する重力波を表す解である。

座標条件を適切に設定して調べると、この方程式から独立な解が 2 個生じることが示せる。⁴これらが重力波の物理的な伝搬モードに相当する。

3.1.3 質点の周りの重力場

次に、質点の周りに生じる時空のゆがみをアインシュタイン方程式 (109) に基づいて求めてみる。原点に静止している質量 M の質点に対応するエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{tt} = M\delta(x^i), \quad T_{\mu\nu} = 0 \quad ((\mu, \nu) \neq (t, t)) \quad (111)$$

で与えられる。計量摂動 $\psi_{\mu\nu}$ も静的 ($\partial_t \psi_{\mu\nu} = 0$) であると仮定すると、この $T_{\mu\nu}$ に対するアインシュタイン方程式は

$$\Delta\psi_{tt} = -16\pi GM\delta(x^i), \quad \Delta\psi_{\mu\nu} = 0 \quad ((\mu, \nu) \neq (t, t)). \quad (112)$$

ψ_{tt} は、この一つ目の式をガウスの法則を使って解くことにより

$$\int_{r < R} \Delta\psi_{tt} dV = \int_{r=R} (\nabla_\mu \psi_{tt}) n^\mu dS = 4\pi r^2 \partial_r \psi_{tt} \Big|_{r=R} = -16\pi GM \quad \therefore \psi_{tt} = \frac{4GM}{r}. \quad (113)$$

この他の成分は $\psi_{\mu\nu} = 0$ ($((\mu, \nu) \neq (t, t))$) となる。これらから、式 (104) の逆変換

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\psi\eta_{\mu\nu} \quad (114)$$

によって $h_{\mu\nu}$ を求めると、 $\psi = -\psi_{tt} = -4GM/r$ より

$$h_{tt} = \psi_{tt} - \frac{1}{2}(-\psi_{tt})\eta_{tt} = \frac{1}{2}\psi_{tt} = \frac{2GM}{r}, \quad h_{ij} = -\frac{1}{2}(-\psi_{tt})\delta_{ij} = \frac{2GM}{r}\delta_{ij} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \therefore ds^2 &= (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) \delta_{ij} dx^i dx^j \\ &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \end{aligned} \quad (116)$$

これが、質量 M の質点の周りに生じる時空の歪みを表す計量である。

式 (116) をより標準的な形で表すために、動径座標 r を周半径と呼ばれるものに切り替える。計量 (116) の S^2 部分に注目し、これを新動径座標 ρ を使って

$$\left(1 + \frac{2GM}{r}\right) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad \therefore \rho \approx \left(1 + \frac{GM}{r}\right) r \quad (117)$$

⁴座標条件 (108) は $\psi_{\mu\nu}$ の 10 成分に 4 つの制約を与える。ここで、座標変換 (107) を式 (108) にかけて

$$\partial^\mu \psi_{\mu\nu} \rightarrow \partial^\mu \psi_{\mu\nu} + \square \xi_\nu$$

となる。したがって、 $\square \xi^\mu$ を満たす座標変換を行っても座標条件 (108) が保たれたままにすることができる。この余剰の座標変換の自由度を使ってさらに 4 つの制約を $\psi_{\mu\nu}$ に与えることができ、 $\psi_{\mu\nu}$ の独立な成分としては合計で $10 - 4 - 4 = 2$ 個が残ることが分かる。

と書き換える。ただし、 $GM/r \ll 1$ を仮定して近似した。この動径座標 ρ は、半径 ρ の地点における球面 S^2 の面積が $4\pi\rho^2$ に等しくなるように選ばれたもので、その性質から周半径や面積半径などと呼ばれる。式(117)からして $d\rho = dr$ であり、また GM/r の高次を無視する近似では

$$1 + \frac{2GM}{r} \approx 1 + \frac{2GM}{\rho} \quad (118)$$

となるため、計量は

$$\begin{aligned} ds^2 &\approx - \left(1 - \frac{2GM}{\rho}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{\rho}\right) d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ &\approx - \left(1 - \frac{2GM}{\rho}\right) dt^2 + \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2GM}{\rho}} + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) . \end{aligned} \quad (119)$$

この計量は、次節で導入するシュバルツシルト解と一致する。

計量の表式(119)から、質点を作る重力場の性質を読み取ることができる。

<ニュートン重力> このノートでは割愛するが、計量(119)を用いて測地線方程式(79)を構成して解くことで、質点の付近で粒子の軌道が曲がることを確認できる。これは、ニュートン力学における重力現象の再現である。

<時間の遅れ> ある地点 $\rho = \rho_0$ における固有時間は

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} \approx \left(1 - \frac{GM}{\rho_0}\right) dt \quad (120)$$

と、重力源である質点に近づくほど小さくなることが分かる。これは、重力場が強い地点での時計の進みが遅れることを示している。

GPSは人工衛星に乗せた時計を使って作られているが、衛星軌道では地表よりも重力場が弱いため、上記の効果によって時計の進み方が地表よりも速くなる。上記の式(と、人工衛星の速度による時間遅れの効果)に基づいて時計の刻みを補正することでGPSの正確さが保たれている。

3.2 ブラックホール時空

前節では、時空のゆがみが小さい場合についてアインシュタイン方程式を解き、その結果として質量 M の質点を作る重力場は計量(119)で与えられると分かった。実は、重力場が強く $GM/r \sim 1$ となる場合でも、この計量はそのままアインシュタイン方程式の真空解になることが知られている。本節では、このシュバルツシルト解と、それが表しているブラックホール時空の性質を紹介する。

3.2.1 シュバルツシルト解

アインシュタイン方程式(93)の真空解($T_{\mu\nu} = 0$ のときの解)の最も単純な例は平坦計量 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ である。より非自明な解としては、先程述べたシュバルツシルト解 [13]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{\text{II}}^2, \quad f(r) = 1 - \frac{r_g}{r} \equiv 1 - \frac{2GM}{r} \quad (121)$$

が知られている。ただし $d\Omega_{\text{II}}^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ は球面 S^2 上の線素である。 $f(r) = 0$ となる半径 $r = r_g = 2GM$ はシュバルツシルト半径と呼ばれており、後述する事象の地平面の位置を示すものである。

この解はアインシュタイン方程式の真空解なので、 $R_{\mu\nu} = 0$ を満たすリッチ平坦な解である。この時空が曲がっていることはリーマンテンソルの成分が消えないことから示される。実際、リーマンテンソルから構成できる座標依存しないスカラー量は $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 48G^2M^2/r^6$ と非ゼロの値をとり、特に $r = 0$ で無限大に発散する。このような曲率が発散する点のことを曲率特異点と呼ぶ。

一方で、シュバルツシルト計量 (121) の成分は $r = 2GM$ でゼロないし無限大になるが、このような点は座標特異点と呼ばれる。この地点で先ほどの曲率スカラーは有限値をとるため、曲率特異点にはなっていない。後ほど見るように、座標特異点は適切な座標変換を行うことで取り除くことができる。

3.2.2 シュバルツシルト時空の因果性

曲がった時空においても、光の経路は $g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 0$ を満たすヌル方向の測地線で与えられる。光速よりも速く運動する粒子は存在しないため、光の経路を調べることで時空の因果構造 (遠方の観測者と光で通信できる時空領域など) を調べられる。

まず、 $r = 2GM$ における座標特異点を取り除くための座標変換を行う。今回は、天下り的に新座標 T, X を以下の条件式によって導入する：

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = X^2 - T^2, \quad \frac{t}{r_g} = \ln\left(\frac{T+X}{X-T}\right) = 2 \tanh^{-1}\left(\frac{T}{X}\right). \quad (122)$$

シュバルツシルト半径 $r = r_g$ は曲線 $X^2 - T^2 = 0$ に対応する。新座標 T, X (クルスカール座標という) でシュバルツシルト計量 (121) を表すと

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{\text{II}}^2 = \frac{4r_g^3 e^{-r/r_g}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega_{\text{II}}^2. \quad (123)$$

と $r = r_g$ で正則な表式で与えられる。

時空が球対称であるため、動径 r の方向に飛ぶ光の経路に注目すればこの時空の因果構造を調べられる。光の経路を $(T, X) = (T, X(T))$ とすると、その接ベクトルがヌルとなるためには、シュバルツシルト計量の式 (123) からして $-dT^2 + dX^2 = (-1 + \dot{X}^2(T))dT^2 = 0$ 、すなわち $X(T) = X_0 \pm T$ が満たされていればよい。時空構造を調べるため、以下の3つの光線に注目する。

1. $X = X_0 + T$ ($X_0 > 0$):

この光線の軌道について、その位置 $r(T)$ が満たす式をクルスカール座標の定義式 (122) に基づいて出してみると

$$\left(\frac{r(T)}{r_g} - 1\right) e^{r(T)/r_g} = X^2 - T^2 = X_0^2 + 2X_0T$$

となる。この式からして、時間 T が経つにつれて $r(T)$ は無限大へと増大し、したがってこの領域における光線は無遠くまで飛び去ることが分かる。

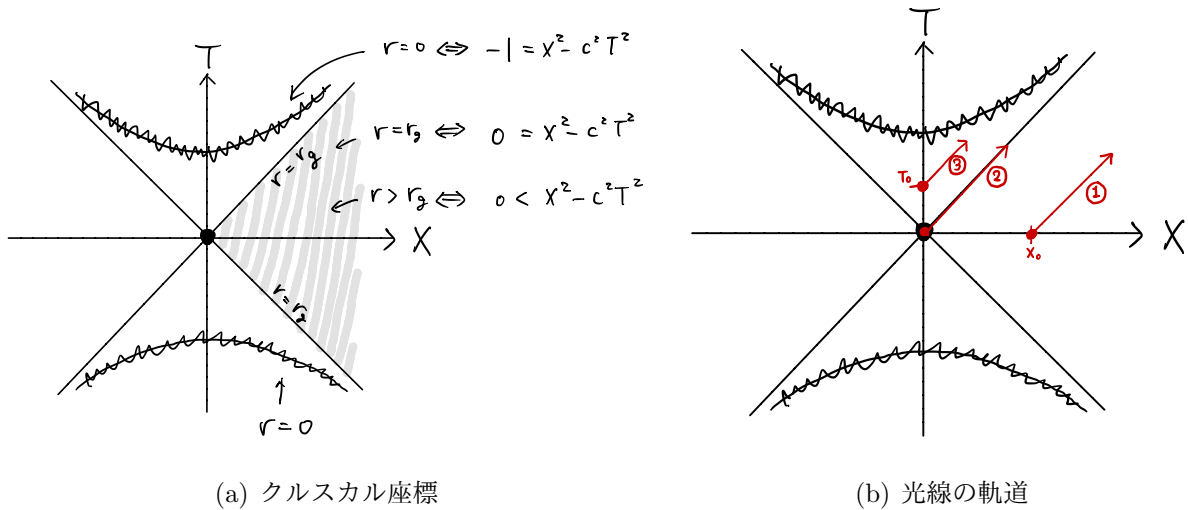


図 5: クルスカル座標系におけるシュバルツシルト時空と、以下で調べる光線の軌道。

2. $X = T$:

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = X^2 - T^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = r_g$$

となるため、時間 T が経過しても光線は $r = r_g$ にとどまり続ける。したがって、 $r = r_g$ から発した光線は無限遠 $r = \infty$ に到達することができない。

3. $X = T - T_0$ ($0 < T_0 < 1$):

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = X^2 - T^2 = T_0(T_0 - 2T).$$

光線は、地点 $(T, X) = (T_0, 0)$ からスタートした後、曲率特異点 $r = 0 \Leftrightarrow X^2 - T^2 = -1$ に有限時間 $T = \frac{1}{2} \left(T_0 + \frac{1}{T_0}\right)$ で当たってしまう。したがって、この場合にも光線は無限遠には抜けられないことになる。

3.2.3 事象の地平面

上記の通り、 $r = r_g$ は光によって十分遠方の観測者に信号を送ることができるかどうかの境界となっている。この意味で、 $r = r_g$ の位置にある球面 S^2 は**事象の地平面** (event horizon) と呼ばれている。事象の地平面の内部の現象は、その外部からは光やそのほかのいかなる手段をもってしても観測することができない。

より一般には、**ブラックホール**は(ヌル)無限遠と因果的曲線(ヌルか時間的方向の曲線)で結ぶことのできない時空領域のことを指す。そのような領域の境界面を**事象の地平面**と呼ぶ。

事象の地平面の定義から以下の性質が従う。

- 事象の地平面はヌル面となる。
- ブラックホール領域は、典型的には光もとらえるような強い重力場によって生成される。
- その定義からして、ブラックホール領域の位置を定めるためには、無限遠を含む時空全体の構造に関する情報が必要となる。時空の有限領域の情報を与えられただけでは事象の地平面の位置を定めることができない。

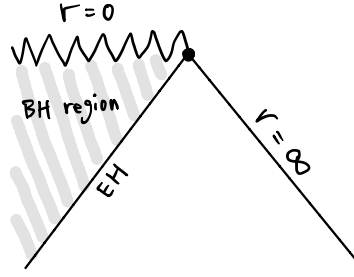


図 6: 事象の地平面をともなう時空の模式図。

今回の講義では解説しないが、ブラックホールの性質として以下が知られている。

- 一意性定理: 漸近平坦かつ真空の時空における静的ブラックホール時空はシュバルツシルト時空 (121) に限られる。
- 面積増大定理: ある物理的自然な条件下で、ブラックホールの表面積は時間について非減少となる: $dA_{\text{BH}}(t)/dt \geq 0$ 。
- 特異点定理: ブラックホール内部領域で、因果的測地線は有限の時間パラメタ以内に特異点に行きつく。ブラックホール内部には特異点が必ず存在することを示す定理である。
- 正質量定理: ある物理的に自然な条件下では、漸近平坦な時空におけるブラックホールの (ADM) 質量は必ず非負の値をとり、質量がゼロとなる時空はミンコフスキー時空 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ に限られる。

3.2.4 見かけの地平面

ブラックホール領域と事象の地平面の位置を定めるためには、無限未来を含む時空全体の構造をまず知る必要がある。一方で、時空の時間発展を求める際などには、そのような時空の大域的な情報が得られていない場合も多い。そこで、以下では時空の有限領域の情報だけから定めることのできる見かけの地平面 (apparent horizon) を導入する。この見かけの地平面は事象に地平面の近似物として用いることができ、また幾何学的には極小曲面を一般化したものとして与えられる。

見かけの地平面を定義するために、時刻一定面 (空間的 3 次元超曲面) Σ , その上の閉 2 次元面 S と、 S に垂直な外向きのヌルベクトルを n_+^μ , 内向きのものを n_-^μ と定義する (図 7 参照)。 Σ に垂直な時間的単位ベクトル t^μ , Σ に接する空間的単位ベクトル r^μ で

$$-t^\mu t_\mu = 1 = r^\mu r_\mu, \quad t^\mu r_\mu = 0 \quad (124)$$

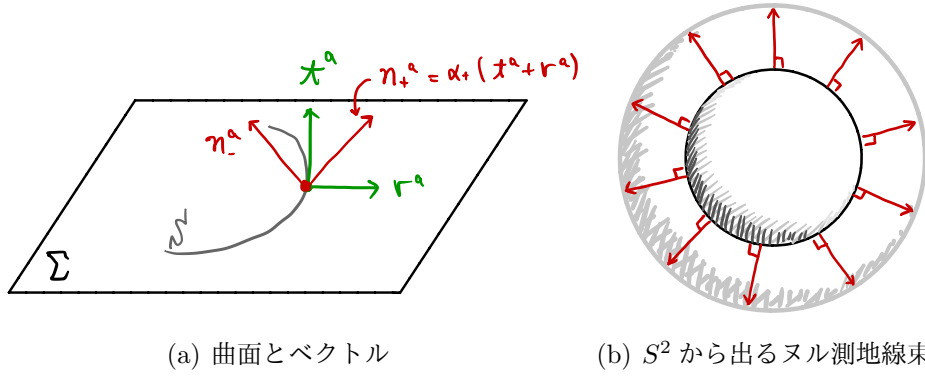
を満たすものを使って、 n_\pm^μ を

$$n_\pm^\mu = \alpha_\pm(x) (t^\mu \pm r^\mu) \quad (125)$$

と分解して表すことにする。また、閉曲面 S 上の誘導計量は

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + t_\mu t_\nu - r_\mu r_\nu \quad (126)$$

と表される。



(a) 曲面とベクトル

(b) S^2 から出るヌル測地線束

図 7: 図 (a): 見かけの地平面の定義に用いる面とベクトル。図 (b): S^2 から発せられた外向きヌル測地線束と、その膨張率。

以上の量を使って、 S から発するヌル測地線束の膨張率 $\hat{\theta}$ を次で定義する。

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} &= h^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu^+ = \alpha_+ h^{\mu\nu} \nabla_\mu (t_\nu + r_\nu) \\
&= \alpha_+ (h^{\mu\nu} \nabla_\mu t_\nu + h^{\mu\nu} \nabla_\mu r_\nu) \\
&= \alpha_+ [(g^{\mu\nu} + t^\mu t^\nu - r^\mu r^\nu) \nabla_\mu t_\nu + h^{\mu\nu} \nabla_\mu r_\nu] \\
&= \alpha_+ (K - K_{\mu\nu} r^\mu r^\nu + k_\mu^\mu) .
\end{aligned} \tag{127}$$

ここで、 $K_{\mu\nu} \equiv (g_{\mu\rho} + t_\mu t_\rho)(g_{\nu\sigma} + t_\nu t_\sigma) \nabla^\rho t^\sigma$ と $k_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\rho} h_{\nu\sigma} \nabla^\rho r^\sigma$ はそれぞれ Σ と S の外的曲率と呼ばれる量で、各曲面の外部から計った曲がり方を特徴づける量である。膨張率 $\hat{\theta}$ は S から生じた光線 (ヌル測地線) の束の広がり具合を示す量で、光波面の面積増大率 $\dot{A}_S = \int_S \hat{\theta} dS$ に等しい。

後ほどの議論で使うため、膨張率 $\hat{\theta}$ の時間変化を与える方程式を導入する。まず、ヌル測地線束の変形率を次のテンソルで表す:

$$\tilde{B}_{\mu\nu} = h_\mu^\rho h_\nu^\sigma \nabla_\sigma n_\rho^+ = \frac{1}{2} \hat{\theta} h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} . \tag{128}$$

ここで、 $\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (B_{\mu\nu} + B_{\nu\mu}) - \frac{1}{2} \hat{\theta} h_{\mu\nu}$ と $\omega_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu})$ はそれぞれヌル測地線束の歪み率と回転率である。これらの量と、 n_+^μ が満たす測地線方程式 $n_+^\mu \nabla_\mu n_+^\nu = 0$ を使うと、膨張率 $\hat{\theta}$ の n_+^μ 方向の変化率は

$$\begin{aligned}
n_+^\mu \nabla_\mu \hat{\theta} &= n_+^\mu \nabla_\mu (h^{\nu\rho} \nabla_\nu n_\rho^+) \\
&= n_+^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu n_+^\nu \\
&= n_+^\mu (\nabla_\nu \nabla_\mu n_+^\nu - R_{\mu\nu} n_+^\nu) \\
&= -(\nabla_\mu n_+^\nu) (\nabla_\nu n_+^\mu) - R_{\mu\nu} n_+^\mu n_+^\nu \\
&= -\tilde{B}_\mu^\nu \tilde{B}_\nu^\mu - R_{\mu\nu} n_+^\mu n_+^\nu \\
&= -\frac{1}{2} \hat{\theta}^2 - \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu} n_+^\mu n_+^\nu .
\end{aligned} \tag{129}$$

$$\therefore \frac{d\hat{\theta}}{d\lambda} = -\frac{1}{2} \hat{\theta}^2 - \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu} n_+^\mu n_+^\nu . \tag{130}$$

ここで n_+^μ 方向の距離パラメタを $n_+^\mu = (d/d\lambda)^\mu$ で導入した。この方程式は **Raychaudhuri** 方程式と呼ばれている。

現在注目しているヌル測地線束は、閉曲面 S の法ベクトル束であるため、フロベニウスの定理より回転率 $\omega_{\mu\nu}$ は S 上でゼロになる。この性質と $\omega_{\mu\nu}$ の時間発展方程式に基づいて、 $\omega_{\mu\nu} = 0$ が常に成立することが示せる。さらに、アインシュタイン方程式を使って式 (130) に出てくるリッチテンソル $R_{\mu\nu}$ をエネルギー・運動量テンソルで書き換えると

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\hat{\theta}^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} - 8\pi GT_{\mu\nu}n_+^\mu n_+^\nu \leq -\frac{1}{2}\hat{\theta}^2. \quad (131)$$

ただし、任意のヌルベクトル k^μ に対して $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$ となるという光的エネルギー条件 (null energy condition) を上式で使っている。式 (131) は、初期時刻で $\hat{\theta} = \hat{\theta}_0 \leq 0$ であるならばその後も光線束に沿って $\hat{\theta} \leq 0$ が保たれることを示している。

ここで、光的捕獲面 (trapped surface) と見かけの地平面を以下の通り定義する。まず、 Σ 上の光的捕獲面 S' を、閉 2 次元面 S' でその膨張率 $\hat{\theta}_{S'}$ がいたるところ負になるものとして定義する。時刻一定面 Σ 上で光的捕獲面 S' が存在する領域全体を捕獲領域 \mathcal{T} と呼ぶ。見かけの地平面は、捕獲領域の外側の境界面 $\partial\mathcal{T}$ として定義される。

見かけの地平面は、以下の性質を満たす。

1. 見かけの地平面上全体で $\hat{\theta} = 0$ となる。
 2. 見かけの地平面が存在するとき、その外部に事象の地平面が必ず存在する。特に、時空が定常的な場合には見かけの地平面と事象の地平面は一致する。
 3. 見かけの地平面の時間発展全体が作る超曲面は、空間的超曲面になる。
 4. ある物理的に自然な条件下で、4次元時空における見かけの地平面のトポロジーは S^2 となる。
 5. Σ が時空の時間反転対称面になっているとき、見かけの地平面は Σ 上の極小曲面で与えられる。
- 性質 2 は、見かけの地平面とその内部でいたるところ膨張率 $\hat{\theta}$ が 0 か負になることから従う。 $\hat{\theta} \leq 0$ は、この領域内から発せられた光線束が無遠慮に到達できないことを示唆する。もし無遠慮に到達するなら、無遠慮付近で光線束の膨張率は正になっていなければならないからである。光線束が無遠慮に到達できないため、この領域はブラックホール領域の内部に入っていることが結論づけられる。
この性質 2 のため、見かけの地平面は事象の地平面の近似物としてしばしば利用される。
 - 性質 4 は以下のようにして示される。証明の概要を説明するため、時空計量が $n_+^\mu = (\partial_u)^\mu$, $n_-^\mu = (\partial_v)^\mu$ という座標によって次のように表せると仮定する:

$$ds^2 = -2e^{-2f}dudv + h_{AB}dx^A dx^B. \quad (132)$$

この計量の成分を使って、ヌル測地線束の膨張率 (に比例した量) を

$$\hat{\theta}_\pm = h^{AB}\nabla_A n_B^\pm \quad (133)$$

と定義する。このとき、アインシュタイン方程式の uv 成分より

$$R_{\mu\nu}n_+^\mu n_-^\nu + \frac{1}{2}e^{2f}R = 8\pi GT_{\mu\nu}n_+^\mu n_-^\nu \quad (134)$$

が従う。ここで、この式の左辺は $\frac{1}{2}e^{2f}h^{AB}R_{AB}$ に等しい。このリッチテンソル $R_{\mu\nu}$ を 2 次元球面上の成分 ${}^{(2)}R_{AB}$ と f に依存するそれ以外の部分に分けると、式 (134) は

$${}^{(2)}R = -2e^{-2f}\hat{\theta}_+\hat{\theta}_- + 2D^2f + 2(\mathcal{D}f)^2 - 2e^{-2f}\partial_v\hat{\theta}_+ + 16\pi Ge^{-2f}T_{\mu\nu}n_+^\mu n_-^\nu \quad (135)$$

と書きなおせる。ここで \mathcal{D}_A は 2 次元計量 h_{AB} についての共変微分である。この式を見かけの地平面上にわたって積分すると

$$\int_{AH} {}^{(2)}R dS = \int dS \left[2(\mathcal{D}f)^2 - 2e^{-2f}\partial_v\hat{\theta}_+ + 16\pi Ge^{-2f}T_{\mu\nu}n_+^\mu n_-^\nu \right]. \quad (136)$$

見かけの地平面の定義からして $\partial_v\hat{\theta}_+ < 0$ であり⁵、右辺第 3 項も優勢エネルギー条件 (dominant energy condition) を少し拡張したもの⁶を仮定すれば非負となる。また、式 (136) の左辺はガウス-ボンネの定理より $8\pi(1-g)$ (ただし、 g は見かけの地平面の種数) で与えられる。したがって、式 (136) から

$$1 - g > 0 \quad (137)$$

となる。これを満たす整数値は $g = 0$ しか存在しないため、見かけの地平面が S^2 と微分同相であると結論づけられる。

- 性質 5 について、時空の時間反転対称面とは、その面上で時空計量の時間微分がゼロとなり、外的曲率が $K_{\mu\nu} = 0$ を満たすもののことを指す⁷。式 (127) にこの条件を使うと、見かけの地平面は $k^\mu{}_\mu = 0$ を満たすこと、すなわち平均曲率がゼロとなる Σ 上の極小曲面として与えられることが分かる。

シュバルツシルト解では、任意の時刻一定面が時間反転対称面となる。ここでは計量 (123) における $T = 0$ 面に注目してみることにする。この面上の誘導計量は

$$ds^2 = \frac{4r_g^3 e^{-r/r_g}}{r} dX^2 + r^2 d\Omega_{\text{II}}^2, \quad \left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{r/r_g} = X^2. \quad (138)$$

この $T = 0$ 面上の極小曲面は $r = r_g$ ($X = 0$) で与えられるが、この面はこの時空における見かけの地平面および事象の地平面と一致する。見かけの地平面に関する上記の性質を示す具体例の一つになっている。

参考文献

- [1] エリ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 「場の古典論 (ランダウ=リフシッツ理論物理学教程)」, 東京図書
- [2] Robert Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press
- [3] 内山龍雄, 「相対性理論 (物理テキストシリーズ 8)」, 岩波書店

⁵見かけの地平面上で $\hat{\theta}_+ = 0$, その内部で $\hat{\theta}_+ < 0$, ∂_v は見かけの地平面からその内部に向かう方向微分であるため。

⁶任意の時間的もしくはヌルベクトル n_1^μ, n_2^μ に対して $T_{\mu\nu}n_1^\mu n_2^\nu \geq 0$.

⁷ $t_\mu = (dt)_\mu$ で与えられる時間座標 t を使うと外的曲率は $K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_t\tilde{g}_{\mu\nu}$ と表される。ただし、 $\tilde{g}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + t^\mu t^\nu$ は時刻一定面 Σ 上の誘導計量。したがって、 $K_{\mu\nu} = 0$ のときには誘導計量の時間微分がゼロとなり、その面について時空は時間反転対称となる。

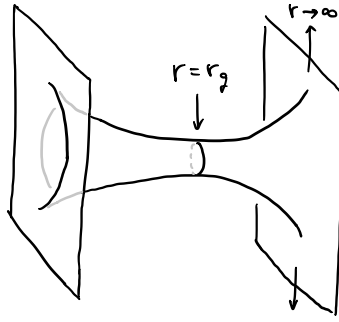


図 8: シュバルツシルト時空の $T = 0$ 面上の時空構造。事象の地平面は $r = r_g$ の位置にある S^2 で与えられるが、これは $T = 0$ 面上における極小曲面となっている。

- [4] 白水徹也, 「アインシュタイン方程式 ～一般相対性理論のよりよい理解のために～ (臨時別冊・数理科学 2012年5月)」, サイエンス社
- [5] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press
- [6] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company
- [7] 小林努, 「相対性理論 (日評ベーシックシリーズ)」, 日本評論社
- [8] 田中貴浩, 「深化する一般相対論 ブラックホール・重力波・宇宙論」, 丸善出版
- [9] 須藤靖, 「一般相対論入門」, 日本評論社
- [10] 村上 信吾, 「多様体 (共立数学講座)」, 共立出版
- [11] D. Lovelock, *J. Math. Phys.* **12**, 498 (1971). doi:10.1063/1.1665613
- [12] D. Lovelock, *J. Math. Phys.* **13**, 874 (1972). doi:10.1063/1.1666069
- [13] K. Schwarzschild, "On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory," *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1916**, 189 (1916) [physics/9905030].