第 4 回　エネルギー保存則

前回の講義では、流体が満たす運動方程式を**運動量保存則**と解釈できることを説明した。今回は、流体の**エネルギー保存則**に注目してみる。

点粒子に外力 $\mathbf{F}$ がかかっている場合についてのエネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}m\,|\mathbf{v}|^2 = \int \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,dt \tag{4.1}$$

とあらわされる。左辺は粒子の運動エネルギーで、右辺は外力による仕事（=エネルギー変化量）に相当する。流体についてももちろんエネルギー保存則が成立するが、最初の講義で説明したとおり**各流体素辺について粗視化**を行うために、流体を構成する個々の粒子のエネルギーが直接は式に出てこなくなる代わりに、流体素辺に含まれる流体の**内部エネルギー**を考慮に入れる必要が出てくる。この点に注意しつつ、流体のエネルギー保存則がどのように与えられるかを見ていくことにする。

[**設定**] 簡単のため、以下の仮定をおく。

- **完全流体**、すなわち**粘性のない流体**について考える。粘性が原因で起こる流体の**運動エネルギーの内部エネルギーへの転化が起こらない**とする。
- **断熱流体**、すなわち流体素辺間の**熱流**が生じない流体について考える。断熱的でない一般の流体について発生する**流体素辺同士の間の熱流（エネルギー移動）がない**という仮定である。

状況にもよるが、空気や温度が一定に近い水について、粘性の効果が無視できるような流れを考える場合におおよそ相当する。なお、状態方程式については特に指定せず一般のままにしておく。

[**熱力学第一法則**] 断熱流体の**内部エネルギー** E の変化は、**熱力学第一法則** $dE = \delta Q - PdV$ (δQ は熱量の流入分で、断熱仮定についてはゼロ) より

$$dE = -PdV \tag{4.2}$$

のように、圧力が流体に与える仕事 $-PdV$ で与えられる。以下の導出でもこの式を使う。

[**今回の方針**] 前回の講義で運動量保存則の式を書き下した時と同様、流体のエネルギー密度について

$$\partial_t(\text{エネルギー密度}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\text{エネルギー流}) = 0 \tag{4.3}$$

のような形の式を導出することを目指す。ある領域 V に含まれる流体について考えると、左辺の第 2 項が V から流出するエネルギーに対応し、その分だけ V 中のエネルギーが時間変化するということを表す式である。なお、上式は流体素辺へのエネルギー流入がない場合の式で、**外力などによるエネルギー流入がある場合には右辺が非ゼロになる。**

左辺に出てくるエネルギー密度は、先ほど述べた通り流体の**運動エネルギーと内部エネルギーの和**で与えられる。そのそれぞれについて、式 (4.3) の左辺がどのような式になるかを以下で順次導出する。

4.1　運動エネルギーの時間変化

流体の運動エネルギー密度は、点粒子の場合と同様に

$$\frac{1}{2}\rho(t,\mathbf{r})|\mathbf{v}(t,\mathbf{r})|^2 \qquad \left(|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) \tag{4.4}$$

で与えられる。式 (4.3) の第 1 項に出てくるエネルギー密度の時間微分は以下のようになる：

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_t\rho\right)|\mathbf{v}|^2 + \rho\mathbf{v}\cdot\partial_t\mathbf{v}\ . \tag{4.5}$$

式 (4.5) の右辺に出てくる $\partial_t \rho$, $\partial_v \mathbf{v}$ は、それぞれ**連続の式**と**オイラーの方程式**で書き換えられる：

$$\textbf{連続の式：}\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{4.6}$$

$$\textbf{オイラーの方程式：}\quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \mathbf{f} \tag{4.7}$$

ただし、$\mathbf{f}$ は流体の単位質量あたりにかかる外力（体積力）である。前回以前の講義のように重力だけを考える場合には $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ となる。

式 (4.6), (4.7) を使って運動エネルギーの時間変化 (4.5) を書き換えると

$$\begin{aligned}
\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\right) &= \frac{1}{2}(\partial_t\rho)\,|\mathbf{v}|^2 + \rho\mathbf{v}\cdot\partial_t\mathbf{v} && (4.8)\\
&= \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2\left[-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v})\right] + \rho\mathbf{v}\cdot\left[-(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \mathbf{f}\right] && (4.9)\\
&= -\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) - \frac{1}{2}\rho\,(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,P + \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{f} && (4.10)\\
&= -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\mathbf{v}\right) - (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,P + \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}\ . && (4.11)
\end{aligned}$$

上記の計算の詳細は下記の通り。

- 2 つ目の等号：連続の式 (4.6)、オイラーの方程式 (4.7) を使って $\partial_t\rho, \partial_t\mathbf{v}$ を書き換えた。
- 3 つ目の等号：$\mathbf{v}\cdot[(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}]$ の外側の $\mathbf{v}$ を微分の内側に入れて $\frac{1}{2}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})|\mathbf{v}|^2$ とまとめた。
  念のため確認してみると
  $$\frac{1}{2}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})|\mathbf{v}|^2 = \sum_{i,j=x,y,z}\frac{1}{2}v_i\partial_i\,(v_jv_j) = \sum_{i,j=x,y,z} v_jv_i\partial_i v_j = \mathbf{v}\cdot[(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v}]\ . \tag{4.12}$$
  最後の等号では、まず $\sum_{i=x,y,z} v_i\nabla_i = \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ と書き換えて、その外側から $\mathbf{v}$ ($\Leftrightarrow v_j, j = x,y,z$) が $(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v}$ ($\Leftrightarrow (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,v_j, j = x,y,z$) に内積されている。
- 4 つ目の等号: 3 行目の第 1, 2 項を一つにまとめて $-\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\mathbf{v}\right)$ とした。
  念のため確認してみると、以下の通り 4 行目の第 1 項から 3 行目の第 1, 2 項が実際に出てくる。
  $$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\mathbf{v}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=x,y,z}\partial_i\,(\rho v_jv_j\,v_i) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=x,y,z}\left[v_jv_j\partial_i\,(\rho v_i) + \rho v_i\partial_i\,(v_jv_j)\right] \tag{4.13}$$
  $$= -\frac{1}{2}\left[|\mathbf{v}|^2\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}|\mathbf{v}|^2\right]\ . \tag{4.14}$$

式 (4.11) を書き換えると、左辺が保存形になった以下の式が得られる：

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\mathbf{v}\right) = -(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,P + \mathbf{v}\cdot(\rho\mathbf{f})\ . \tag{4.15}$$

この式の左辺のうち、第 1 項は $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2$ は流体の運動エネルギー密度の時間変化、第 2 項 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\mathbf{v}\right) = \mathrm{div}\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\mathbf{v}\right)$ は**エネルギー密度流の発散**で、これを体積積分したものは、ガウスの定理を通じて

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\mathbf{v}\right) = \int_S\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\mathbf{v}\right)\cdot d\mathbf{S} \tag{4.16}$$

とある領域 V の表面 S から**単位時間あたりに流出するエネルギーの量**に書き換えられる。

なお、式 (4.15) の右辺に現れる項のうち、第 1 項 $-(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,P = \mathbf{v}\cdot(-\boldsymbol{\nabla}P)$ は**圧力勾配力 $-\boldsymbol{\nabla}P$ がなす仕事率**、第 2 項 $\mathbf{v}\cdot(\rho\mathbf{f})$ は**体積力 $\rho\mathbf{f}$ がなす仕事率**にそれぞれ対応する。流体のエネルギーは、単位時間あたりにこれだけの分だけ変化する。

4.2　内部エネルギーの時間変化

前節に引き続き、今度は内部エネルギーの時間変化＋流出量を表す式について調べていく。式 (4.15) は運動エネルギー**密度**についての式だったので、内部エネルギーについても密度についての式

$$\partial_t(\text{内部エネルギー密度}) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\text{内部エネルギー密度流}) \tag{4.17}$$

を立てることを目指す。

4.2.1　熱力学第一法則

熱力学第一法則は、今回の場合は式 (4.2):

$$dE = -PdV \tag{4.18}$$

で与えられる。ただし、E は現在注目している流体要素に含まれる内部エネルギーで、またこの式はその流体要素について成立する。すなわち、流体要素の流れに沿った（ラグランジュ）微分についてこの式が成立して

$$\frac{DE}{Dt} = -P\frac{DV}{Dt} \qquad \left(\frac{Df}{Dt} = \partial_t f + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} f\right) . \tag{4.19}$$

[単位質量あたりの内部エネルギー] ここで、新たに**単位質量あたりの内部エネルギー** ε を導入する。すなわち、内部エネルギーの密度（単位**体積**あたりに含まれる内部エネルギー）を $\rho\epsilon$, 体積 V の領域に含まれる内部エネルギーを $E = \rho\varepsilon V$ とする。

[ε についての熱力学第一法則] 式 (4.18) に $E = \rho\varepsilon V$ を代入すると

$$dE = d(\rho\varepsilon V) = \varepsilon d(\rho V) + \rho V d\varepsilon = -PdV \ . \tag{4.20}$$

ここで、領域 V に含まれる流体の質量 ρV は、流体の状態（圧力など）が変化しても不変である。そのため、以下の式が成立する：

$$0 = d(\rho V) = V d\rho + \rho dV \ . \tag{4.21}$$

これを使って式 (4.20) を書き換えると

$$\cancel{\varepsilon d(\rho V)} + \rho V d\varepsilon = -PdV = +\frac{PV}{\rho}d\rho \qquad \therefore \quad d\varepsilon = \frac{P}{\rho^2}d\rho \ . \tag{4.22}$$

式 (4.22) はある流体要素について成り立つ式なので、その流体要素の流れに沿って

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{P}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad \partial_t\varepsilon + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varepsilon = \frac{P}{\rho^2}\left(\partial_t\rho + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\right) \tag{4.23}$$

が成立する。

＜単位質量あたりの熱力学第一法則＞　式 (4.22) を少し変形すると

$$d\varepsilon + P\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \tag{4.24}$$

となる。第 2 項に現れる $1/\rho$ は**単位質量あたりの体積**である。ε が単位質量あたりの内部エネルギーだったので、これは**熱力学第一法則 (4.18) を単位質量あたりについて書き下した式**である。

なお、断熱的ではない一般の流体については

$$d\varepsilon + P\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) = Tds \qquad \Rightarrow \qquad \frac{D\varepsilon}{Dt} + P\frac{D\left(\frac{1}{\rho}\right)}{Dt} = T\frac{Ds}{Dt} \tag{4.25}$$

となる。ただし、s は**単位質量あたりのエントロピー**である。今回考えている断熱流体については $Ds/Dt = 0$、すなわち**流れに沿ってエントロピーが一定（等エントロピー流）**となる。

4.2.2　内部エネルギー密度の時間変化

では、やや天下り的ではあるが内部エネルギー密度 ε の時間変化＋流出量を表す式

$$\partial_t(\rho\varepsilon) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\varepsilon\mathbf{v}) \tag{4.26}$$

を計算してみる。各項を展開し、先ほど導出した式 (4.23) と連続の式 (4.6) を使って変形すると

$$\begin{aligned}
\partial_t(\rho\varepsilon) + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\varepsilon\mathbf{v}) &= \rho\partial_t\varepsilon + \varepsilon\partial_t\rho + \varepsilon\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varepsilon & (4.27)\\
&= \rho\left(\partial_t\varepsilon + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varepsilon\right) + \varepsilon\cancel{(\partial_t\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}))} & (4.28)\\
&= \rho\,\frac{P}{\rho^2}\left(\partial_t\rho + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho\right) & (4.29)\\
&= \frac{P}{\rho}\left[\cancel{\partial_t\rho + \boldsymbol{\nabla}(\rho\mathbf{v})} - \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\right] & (4.30)\\
&= -P\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\ . & (4.31)
\end{aligned}$$

この式の右辺に現れる $P\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$ は、体積変化率 $\partial_t V = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v}$ に対応する内部エネルギーの変化率 $P\partial_t V$ である。

＜$\operatorname{div}\mathbf{v} = \partial_t V$ について＞　$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$ をある流体要素 V について体積積分すると、ガウスの定理により

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\,dV = \int_S \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} \tag{4.32}$$

と、流体要素 V の表面 S 全体にわたる表面積分になる。右辺に現れる $\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS$ は、微小面積要素 dS から単位時間あたりに速度 $\mathbf{v}$ で流出する流体の占める体積である。流体要素の表面はこの流体に沿って拡張するので、式 (4.32) は流体要素 V の体積の増加分を表す。

4.3　全エネルギーの時間変化

流体の持つ全エネルギー密度（運動エネルギー密度と内部エネルギー密度の合計）の時間変化を表す式は、これまでに導出した式 (4.15) と (4.31) の和で与えられる：

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho\varepsilon\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\mathbf{v} + \rho\varepsilon\mathbf{v}\right) = -\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P + \mathbf{v}\cdot(\rho\mathbf{f}) - P\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\ . \tag{4.33}$$

この右辺に現れる圧力項は一つにまとめることができる：

$$-\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P - P\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(P\mathbf{v})\ . \tag{4.34}$$

これはちょうど $P\mathbf{v}$ というベクトルの発散の形をしているので、式 (4.33) でこの項を左辺に移項すると

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho\varepsilon\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\mathbf{v} + \rho\varepsilon\mathbf{v} + P\mathbf{v}\right) = \mathbf{v}\cdot(\rho\mathbf{f})\ . \tag{4.35}$$

右辺に現れる $\mathbf{v}\cdot(\rho\mathbf{f})$ は、4.1 節の最後でも説明した通り体積力 $\rho\mathbf{f}$ が流体に与える仕事率で、流体のエネルギーは単位時間あたりにこの分だけ変化する。

[エネルギー流ベクトル] 式 (4.35) の左辺第二項は

$$\operatorname{div}\left[\rho\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \varepsilon\right)\mathbf{v} + P\mathbf{v}\right] \tag{4.36}$$

という形をしている。式 (4.35) がエネルギー保存則であることを踏まえると、発散 (div) の中に入っているベクトルは**エネルギー流ベクトル**であると解釈できる。

式 (4.36) のうち、$\rho\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+\varepsilon\right)\mathbf{v}$ はある固定された領域 V についての**単位時間あたりの運動エネルギー・内部エネルギー流出量**である。

一方、$P\mathbf{v}$ 項については、ガウスの法則を使うと

$$\int_V \mathrm{div}\,(P\mathbf{v})\,dV=\int_S P\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}=\int_S P\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{4.37}$$

となるが、$P\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS$ は V の表面の微小面積 dS あたりについて（dS の法線方向に働く）圧力 $P\mathbf{n}$ がなす仕事率である。圧力は領域 V の表面から内向きに働くので、$P\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS$ の分だけ流出する流体は仕事をし、その分だけ V 中の流体のエネルギーは減少する。このエネルギー収支を表しているのが式 (4.35) である。

式 (4.36) に含まれるエネルギー流ベクトルは

$$\rho\left[\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+\left(\varepsilon+P\frac{1}{\rho}\right)\mathbf{v}\right] \tag{4.38}$$

とも書き直せる。この式に含まれる $\varepsilon+P\frac{1}{\rho}$ は、**エンタルピー $E+PV$ の単位質量あたりの値**である。実際、$1/\rho$ は単位質量あたりの体積であった。そこで、改めて単位質量あたりのエンタルピーを $w=\varepsilon+P\frac{1}{\rho}$ とおくと、エネルギー流ベクトルは

$$\rho\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+w\mathbf{v}\right) \tag{4.39}$$

と、より単純な式で書き表すことができる。