第 2 回　オイラーの方程式

前回の講義では、流体（素辺）の質量保存則に対応する**連続の式**を導出し、それが密度分布 $\rho(t, \mathbf{r})$ の時間微分を与える式であることをの説明した。

今回は、流体の運動方程式の一つである**オイラーの方程式**を導出し、**速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の時間微分を与える式**であることを見る。点粒子についてのニュートンの運動方程式は点粒子の加速度に質量をかけたもの、もしくは運動量の時間微分を与える式と見ることができる：

$$m\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(m\mathbf{v}(t)\right) = \mathbf{F}\ . \tag{2.1}$$

オイラーの方程式は、流体（素辺）についてこの式を立てたものに相当する。

2.1　導出

導出にあたり、前回と同様に空間に固定された座標系 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を使い、偏微分 $\partial/\partial x, \ldots$ はこの座標についての微分とする。また、$\partial/\partial t$ はある（固定された）点 $\mathbf{r}$ における時間微分とする。

一方、空間に固定された領域中の流体に注目した前回と異なり、今回は**ある流体素辺に注目して式を立てる**ことにする[4]。この流体素辺を広がりを持った点粒子のようなものと考えることで、点粒子についてのニュートンの運動方程式 (2.1) との対応が少し見やすくなる。

2.1.1　流体素辺の運動量変化

式 (2.1) のような運動量とその時間変化についての式を立てるにあたり、まずはある流体素辺に注目して、その速度の時間変化を記述する必要がある。

速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ を持つ流体中のある流体素辺（位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$）に注目する。この流体素辺のある時刻 t からその少し後の時刻 $t + \Delta t$ までの運動について、以下で順を追って調べてみる（図 4 参照)。

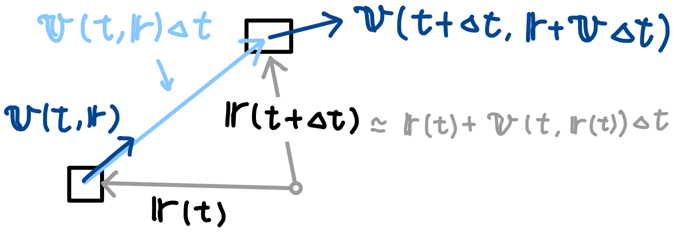

図 4: 流体素辺の位置・速度変化。

- **流体素辺の位置**: 時刻 t における流体素辺の速度は $\mathbf{v}\big(t, \mathbf{r}(t)\big)$ なので、その後の時刻 $t + \Delta t$ における位置は[5]

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}\big(t, \mathbf{r}(t)\big)\Delta t\ . \tag{2.2}$$

- **流体素辺の速度**: 流体素辺の位置が動いたことで、その速度には**時間経過による変化**と**位置のずれによる変化**が生じる。これを見るために、時刻 $t+\Delta t$ における流体素辺の速度 $\mathbf{v}\big(t+\Delta t, \mathbf{r}(t+\Delta t)\big)$

[4] 前回と同様に、空間に固定された領域内に含まれる流体ととその表面からの流出量を計算しても全く同じ結果が得られる。

[5] より厳密には、速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の時間・空間依存性が原因で、式 (2.2) の右辺には $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ 程度の大きさの誤差項がつく。今回の導出では Δt について一次の項だけに注目するので、簡単のため誤差項については単に書かないことにする。

を**微小量 Δt について１次までテイラー展開**する。ただし、引数に含まれる $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ については式 (2.2) を使って書き換えておく。

$$\mathbf{v}\big(t+\Delta t, \mathbf{r}(t+\Delta t)\big) \simeq \mathbf{v}\Big(t+\Delta t, \mathbf{r}(t)+\mathbf{v}\big(t,\mathbf{r}(t)\big)\Delta t\Big) \tag{2.3}$$

$$= \mathbf{v}\Big(t+\Delta t, x(t)+v_x\,\Delta t, y(t)+v_y\,\Delta t, z(t)+v_z\,\Delta t\Big) \tag{2.4}$$

$$= \mathbf{v}\big(t,\mathbf{r}(t)\big) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}v_x\,\Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}v_y\,\Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}v_z\,\Delta t \tag{2.5}$$

$$= \mathbf{v}\big(t,\mathbf{r}(t)\big) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\Delta t + \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{v}\,\Delta t \tag{2.6}$$

$$= \mathbf{v}\big(t,\mathbf{r}(t)\big) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v}\right)\Delta t\ . \tag{2.7}$$

ただし、途中式に出てくる $v_i\,(i=x,y,z)$ や偏微分 $\partial\mathbf{v}/\partial t,\ldots$ は全て初期位置・初期時刻 $(t,\mathbf{r}(t))$ における値である。

式 (2.7) の右辺の第二項が、ある流体素辺に注目した場合の（ある流体素辺に乗って測った）速度の変化分である。この変化分を使って、**ある流体素辺についての速度の時間微分**を新たに $D\mathbf{v}/Dt$ と定義すると

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{v}\big(t+\Delta t,\mathbf{r}(t+\Delta t)\big)-\mathbf{v}\big(t,\mathbf{r}(t)\big)}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\right]\mathbf{v}\ . \tag{2.8}$$

先ほどと同様、右辺に現れる偏微分は初期時刻・初期位置 $(t,\mathbf{r}(t))$ における値である。

式 (2.8) で定義される $D\mathbf{v}/Dt$ の特徴は、単なる時間微分 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ に加えて、流体素辺の移動に伴って生じる**移流項** $(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v}$ が入ってくることである。この、ある流体素辺に乗った観測者から見た時間微分 $D\mathbf{v}/Dt$ は**ラグランジュ微分**や**物質微分**などと呼ばれる。

- **流体素辺の運動量**: ある流体素辺の体積を ΔV とすると、その素辺が持つ質量は $\rho\Delta V$, 運動量は $\rho\mathbf{v}(t,\mathbf{r})\Delta V$ となる。先ほど速度の変化を見たのと同じ要領で、この素辺の運動量がどのように時間変化するかを調べてみる。先ほどと同様の計算を素辺の運動量 $\rho\mathbf{v}\Delta V$ について行うと、

$$\frac{D}{Dt}(\rho\mathbf{v}\Delta V) = \rho\Delta V\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{v}\frac{D(\rho\Delta V)}{Dt} = \rho\Delta V\frac{D\mathbf{v}}{Dt}\ . \tag{2.9}$$

ここで、流体素辺の境界は流体とともに運動するため、**流体素辺の境界からの流体の流出はゼロ**で、そのため**質量 $\rho\Delta V$ の時間微分 $D(\rho\Delta V)/Dt$ はゼロ**であることを使った。

2.1.2 流体素辺にかかる力

点粒子についての運動方程式 (2.1) は **点粒子の運動量の時間変化 ＝ 点粒子にかかる力** ということを意味している。流体素辺についてもこの法則は成り立つので、前節で調べた運動量変化は流体素辺にかかる力に等しくなるはずである。そこで、今度は**流体素辺にかかる力**がどのように与えられるかを調べてみる。

- **体積力: 流体素辺に全体に直接かかる力**。質量に比例してかかる**重力**や、もし流体が電荷を帯びていればその電荷に比例してかかる**電気力**などが例として挙げられる。

- **面積力: 流体素辺の表面にかかる力**。隣接する流体素辺同士の間で働く力。流体の**圧力**（勾配）や**粘性**（の一部）から生じる力がこれに相当する。

今回の講義では、簡単のため**流体の粘性がゼロ**（**完全流体**、**理想流体**と呼ぶ）の場合に注目し、流体にかかる**重力**と**圧力勾配**から生じる力だけについて考える。

[重力] 流体素辺の体積を $\rho\Delta V$, **重力加速度**を $\mathbf{g}$（長さ $|\mathbf{g}|$ が重力加速度の大きさに等しい鉛直下向きの定数ベクトル）とする。この場合、素辺にかかる重力は $\rho\Delta V\,\mathbf{g}$ となる。

[圧力勾配力] 流体中に圧力勾配（圧力の空間的変化）があると、その流体中の体積 ΔV の素辺には**圧力勾配の逆向きの力** $-\boldsymbol{\nabla} P\,\Delta V$ がかかる。以下では、これを 2 通りの方法で導出する。

＜導出 1: 直接計算＞
図 5 のように、座標原点に頂点を持ち、各辺が x, y, z 軸向きに $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ の微小な長さを持つ直方体状の流体素辺を考える。この素辺の各面にかかる圧力の合計を計算する。

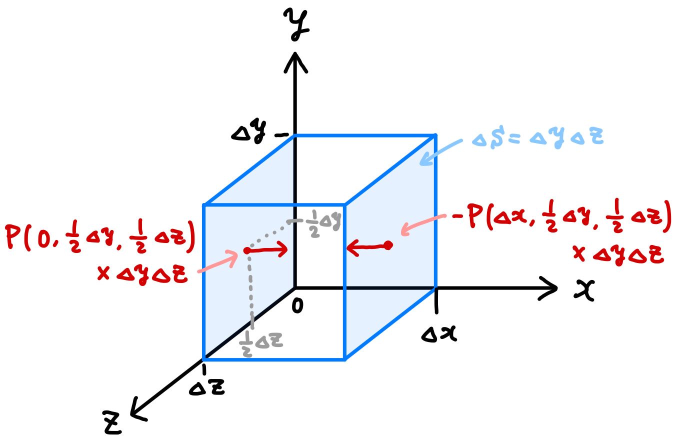

図 5: 流体素辺の外部の圧力が流体素辺に及ぼす力。

まず、以下の 2 点に留意する。

- **パスカルの法則: ある微小な面にかかる圧力は、面の垂直方向にかかり、その大きさは面積だけに比例して向きには依存しない**。今回は素辺の外部から内向きにかかる圧力を考える。
- 流体素辺は微小であるので、**各面にかかる圧力をその面の中心における値で近似する**。

(x 軸方向の力) $x = 0$ 面（面積 $= \Delta y \Delta z$）にかかる力は、x 軸向きの力を正とすると

$$P\left(0, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right) \Delta y \Delta z\ . \tag{2.10}$$

同様に、$x = \Delta x$ 面にかかる力は、x 軸の負の向きを向いており

$$-P\left(\Delta x, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right) \Delta y \Delta z\ . \tag{2.11}$$

したがって、素辺にかかる x 軸方向の力の合計は

$$P\left(0, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right) \Delta y \Delta z - P\left(\Delta x, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right) \Delta y \Delta z \tag{2.12}$$

$$= -\frac{1}{\Delta x}\left[P\left(\Delta x, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right) - P\left(0, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right)\right] \Delta x\, \Delta y \Delta z \tag{2.13}$$

$$\simeq -\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}\left(0, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right)}_{=\frac{\partial P}{\partial x}(0,0,0)+\mathcal{O}(\Delta y, \Delta z)} \Delta x \Delta y \Delta z \tag{2.14}$$

$$\simeq -\frac{\partial P}{\partial x}(0,0,0) \Delta x \Delta y \Delta z\ . \tag{2.15}$$

すなわち、x **軸方向にかかる力は** $-\partial P/\partial x$ **（の原点での値）に素辺の体積** $\Delta x\Delta y\Delta z$ **をかけたもの**で与えらえる。

(圧力勾配力の 3 次元成分) y, z 軸方向についても上記と同じ計算によって圧力からくる力が計算できる。それらをまとめると、圧力が素辺に及ぼす力の 3 次元成分は

$$-\underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}\right)}_{=\boldsymbol{\nabla} P} \underbrace{\Delta x\Delta y\Delta z}_{=\Delta V} = -\boldsymbol{\nabla} P\,\Delta V\ . \tag{2.16}$$

この力は圧力 P の勾配 $\mathrm{grad}P = \boldsymbol{\nabla} P$ に比例するため、**圧力勾配力**と呼ばれる[6]。

<導出 2: ガウスの定理>

上記の導出では、流体素辺の形状を座標軸に沿った立方体に取っていた。実は、**ガウスの定理**を使うことで、任意の形状を持つ流体素辺についても全く同じ結果が得られる。

任意の領域 V を取ったとすると、その表面 S 上の素辺（面積 ΔS）には

$$-P\,\mathbf{n}\,dS = -P\,d\mathbf{S} \tag{2.17}$$

の力がかかる。ただし、$\mathbf{n}$ と $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ は前回の講義で導入した外向き単位法線ベクトルと面積要素ベクトルである。この力を表面 S 全体で積分すると、領域 V 中の流体にかかる力が計算できる：

$$\int_S (-P)\,d\mathbf{S} = -\int_V \boldsymbol{\nabla} P\,dV\ . \tag{2.18}$$

この式は任意の領域 V について成立するので、微小な流体素辺にかかる力は $-\boldsymbol{\nabla} PdV$ で与えられることがわかる。なお、この式の等号では、ガウスの定理から導出できる以下の公式を用いた[7]:

$$\int_S A\,d\mathbf{S} = \int_V (\boldsymbol{\nabla} A)\,dV\ . \tag{2.21}$$

2.1.3　オイラーの方程式

ニュートンの運動方程式 (2.1) は（運動量の時間変化）= (力）というものであった[8]。流体素辺について求めた運動量の時間変化と力をそれぞれ代入すると、以下の式が得られる：

$$\rho\Delta V\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla} P\,\Delta V + \rho\Delta V\,\mathbf{g}\ . \tag{2.22}$$

---

[6] 単位質量あたりの力、すなわち式 (2.16) を質量 $\rho\Delta V$ で割ったものを圧力勾配力と呼ぶのがより正式であるらしい。

[7] ガウスの定理

$$\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}dV$$

に、$\mathbf{B} = A\,\mathbf{e}_x$（$\mathbf{e}_x$ は x 軸向きの単位ベクトル）を代入すると

$$\int_S A\,\mathbf{e}_x\cdot d\mathbf{S} = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(A\mathbf{e}_x)dV = \int_V \mathbf{e}_x\cdot\boldsymbol{\nabla} A\,dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial x}dV\ .$$

2 番目の等号では $\mathbf{e}_x$ が定数ベクトルのため $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{e}_x = 0$ となることを使った。この式の最左辺に出てくる $\mathbf{e}_x\cdot d\mathbf{S}$ は、3 次元ベクトル $d\mathbf{S} = (dS_x, dS_y, dS_z)$ の x 成分たる dS_x そのものである：

$$\mathbf{e}_x\cdot d\mathbf{S} = \mathbf{e}_x\cdot(dS_x\,\mathbf{e}_x + dS_y\,\mathbf{e}_y + dS_z\,\mathbf{e}_z) = dS_x\ . \tag{2.19}$$

したがって、結局

$$\int_S A\,dS_x = \int_V \frac{\partial A}{\partial x}dV \tag{2.20}$$

という式が得られた。これは x, y, z の 3 成分を持つ式 (2.21) のうち x 成分そのものである。同様の計算を y, z についても行えば式 (2.21) の全成分が得られる。

[8] 式 (2.1) を (質量)×(加速度)=(力) と思って流体についての式を立てても同じ結果が得られる。流体素辺の質量 $\rho\Delta V$ のラグランジュ微分がゼロであるために、式 (2.9) で $\rho\Delta V$ が微分の外側に抜けてくるのが原因。

この式の両辺を素辺の質量 $\rho\Delta V$ で割ると、以下の（外力として重力を考えた場合の）**オイラーの方程式**が得られる。

オイラーの方程式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \mathbf{g}\ . \tag{2.23}$$

この式の左辺を普通の偏微分で表すこともできて、以下のようになる：

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \mathbf{g}\ . \tag{2.24}$$

2.2 完全流体の運動方程式系

ここまでで、粘性のない完全流体について**連続の式**と**オイラーの方程式**を導出した：

$$\frac{d\rho}{dt} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\rho\mathbf{v}\big) = 0\ , \qquad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \mathbf{g} \tag{2.25}$$

これらの式から ρ と $\mathbf{v}$ の時間微分は得られるが、P の時間微分の値が得られない。そのため、これらの方程式を時間積分して流体の運動の時間発展を定めるには、P の時間依存性を定めるための追加の式が必要になる。

それが実現される最も簡単な場合は、流体の**状態方程式**として

$$P = P(\rho) \tag{2.26}$$

が成立し、圧力 P が密度 ρ だけの関数で与えられる場合である[9]。**等温流体** $P = C\,\rho$ (C: 定数), **断熱流体** $P = C\,\rho^\gamma$ (γ: 比熱比) などがその例として挙げられる[10]。式 (2.26) を式 (2.25) に代入すると

$$\frac{d\rho}{dt} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\rho\mathbf{v}\big) = 0\ , \qquad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P(\rho) + \mathbf{g} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP(\rho)}{d\rho}\boldsymbol{\nabla}\rho + \mathbf{g} \tag{2.27}$$

のように ρ と $\mathbf{v}$ だけの式になり、それらの時間微分の値および時間発展がこの 2 本の方程式によって定められる。つまり、状態方程式 (2.26) を持つ完全流体の運動方程式は**連続の式＋オイラーの方程式＋状態方程式**で与えられる。

2.3 静水圧平衡

流体の運動方程式 (2.27) の解の簡単な例として、**大気密度の高度分布**を調べてみよう。簡単のため、次の仮定を課す。

- 大気は**静的**である（= 時間依存しない）。すなわち、$\rho = \rho(t)$ かつ $\mathbf{v} = 0$.
- 大気**高度によらず温度が一定の理想気体**として振る舞う。
  $\Rightarrow$ 大気の**状態方程式は** $P = C\,\rho$（C は定数）[11]。

[9] 式 (2.26) のような状態方程式を**バロトロピック状態方程式**、この状態方程式を持つ流体を**バロトロピック流体**と呼ぶ。語源については各自で調べられたい。

[10] **非圧縮性流体** $\rho = C$ (C: 定数) も状態方程式 (2.26) の一種である。この場合については今後の講義で別途扱う。

[11] より正確には、理想気体の状態方程式 $P = (RT/\mu)\rho$ (ただし、$R \simeq 8.3\,\mathrm{J/kg\,mol}$ は気体定数、$\mu \simeq 29\,\mathrm{kg/mol}$ は大気の分子量) が成立し、温度 T が一定の場合は単に $\rho \propto P$ となる。

もちろんこれらの仮定は正確ではないが、最終的に得られる解は実際の大気密度を近似的に再現することが知られている。

この場合、連続の式は自明な式（両辺が自動的にゼロ）となり、一方オイラーの方程式は

$$0 = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} P + \mathbf{g} = -\frac{C}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\rho + \mathbf{g} \tag{2.28}$$

という式になる。ここで、密度 ρ が高度 z だけに依存すると仮定したうえで式 (2.28) の z 成分を書き下すと

$$0 = -\frac{C}{\rho(z)}\left(\boldsymbol{\nabla}\rho(z)\right)_z + (\mathbf{g})_z = -\frac{C}{\rho(z)}\frac{\partial\rho(z)}{\partial z} - g = -C\frac{\partial}{\partial z}\log\rho(z) - g\ . \tag{2.29}$$

この式を z について積分することで

$$\log\rho(z) = -\frac{g}{C}z + C_0 \quad (C_0 : \text{積分定数}) \qquad \therefore \quad \rho(z) = e^{C_0}e^{-\frac{g}{C}z}\ . \tag{2.30}$$

すなわち、**大気密度 $\rho(z)$ は高度 z について指数関数的に減少**することが示された。状態方程式は $P = C\,\rho$ だったので、大気圧力 $P(z)$ も同様の振る舞いをする。この結果は高度およそ 15000 m までの大気の密度・圧力分布をある程度精度よく再現するそうである[12]。

[12]出典：恒藤俊彦「弾性体と流体」（岩波書店） 3-1 節