

第13回 群速度

これまでに流体の波動の例として音波や水面の波を紹介してきた。この波の性質で重要なものはもちろん波動の伝搬速度である。特に、音波については音速 c で任意の波形が飛んでいくことを示した：

$$\delta\rho(t, x) = f(ct - x) + g(ct + x). \quad (13.1)$$

一方、第12回の講義で解説した深水波については、振動数 ω 、波数 k (波長 $2\pi/k$) との間に

$$h(t, x) \propto \sin(-\omega(k)t + kx), \quad \omega(k) = \pm\sqrt{gk} \quad (13.2)$$

という関係が成立するのであった³⁸。ただし、 $h(t, x)$ は水面の高さ、 g は重力定数である。このような ω と k の関係式 (分散関係と呼ばれる) と、「波の伝搬速度」がどのように関係づけられるかについて今回は解説する。

13.1 位相速度・群速度

13.1.1 位相速度

式 (13.2) のように、波の振動数 ω が波数 k の関数 $\omega = \omega(k)$ として与えられている場合に何が起こるのかを順次調べていく。まず、一つの正弦波で表される波動 $\phi(t, x)$ について考える：

$$\phi(t, x) = \sin(-\omega(k)t + kx). \quad (13.3)$$

この波動について、位相 (\sin の引数 $-\omega(k)t + kx$) の値が一定となるような曲線 $(t, x(t))$ が存在する：

$$-\omega(k)t + kx(t) = C \quad (C: \text{定数}) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{\omega(k)}{k}t + \frac{C}{k}. \quad (13.4)$$

すなわち、速度 $\omega(k)/k$ で移動する位置 $x(t) = \frac{\omega(k)}{k}t + x_0$ (x_0 は x の初期位置) に沿って位相は一定の値を取り続ける。位相が一定の値を取るなら式 (13.3) の値も一定となるため、この波動については初期時刻の波形 (正弦波の山や節の位置) が速度 $\omega(k)/k$ で移動していくことになる。この、波動の位相から定められる波の伝搬速度 $\frac{\omega(k)}{k}$ を位相速度と呼ぶ：

13.1.2 群速度

式 (13.3) では単一の正弦波で表される波動を考えたが、一般的な波形を持つ波動は異なる $\omega(k), k$ を持つ正弦波を重ね合わせたもので与えられる。比較的単純な場合として、波数 k で振幅が1の正弦波 (振動数 $\omega(k)$) に、波数が $k \pm \Delta k$ で振幅が $1/2$ の正弦波 (振動数 $\omega(k \pm \Delta k)$) を重ね合わせた場合を考える：

$$\phi(t, x) = \sin(-\omega(k)t + kx) + \frac{1}{2} \sin(-\omega(k + \Delta k)t + (k + \Delta k)x) + \frac{1}{2} \sin(-\omega(k - \Delta k)t + (k - \Delta k)x). \quad (13.5)$$

Δk が微小な場合、 $\omega(k)$ の変化分も微小となるので

$$\omega(k \pm \Delta k) = \omega(k) \pm \frac{d\omega(k)}{dk} \Delta k + \mathcal{O}(\Delta k^2) \quad (13.6)$$

³⁸第12回の講義では、式を単純化するため波動の位相を $+\omega t + kx$ と ωt の符号を正にセットした。今回は、より標準的な選び方である $-\omega t + kx$ を使って解説を進める。

と $\omega(k \pm \Delta k)$ をテイラー展開でき、 Δk 項までで展開を打ち切ってもよい近似となる。この近似を用いると、三角関数の加法定理より

$$\sin(\underbrace{-\omega(k \pm \Delta k)t + (k \pm \Delta k)x}_{\simeq \omega(k) \pm \frac{d\omega(k)}{dk} \Delta k}) \simeq \sin\left[-\omega(k)t + kx \pm \left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right] \quad (13.7)$$

$$= \sin(-\omega(k)t + kx) \cos\left[\left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right] \pm \cos(-\omega(k)t + kx) \sin\left[\left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right]. \quad (13.8)$$

\pm 符号の現れ方に注意すると、式 (13.5) の第 2, 第 3 項の合計は上式の第 1 項の寄与だけで与えられることがわかる：

$$\frac{1}{2} \sin(-\omega(k+\Delta k)t + (k+\Delta k)x) + \frac{1}{2} \sin(-\omega(k-\Delta k)t + (k-\Delta k)x) = \sin(-\omega(k)t + kx) \cos\left[\left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right]. \quad (13.9)$$

この式を使って正弦波の重ね合わせ (13.5) を改めて評価すると

$$\phi(t, x) \simeq \sin(-\omega(k)t + kx) + \sin(-\omega(k)t + kx) \cos\left[\left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right] \quad (13.10)$$

$$= \left\{1 + \cos\left[\left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right]\right\} \sin(-\omega(k)t + kx). \quad (13.11)$$

\sin 関数で書かれている青字部分は重ね合わせる前の正弦波と同じもので、その位相速度が $\omega(k)/k$ である進行波を表す。一方、緑字部分は正弦波の振幅に相当する部分で、振幅が一定 (式 (13.5) では振幅が 1) の正弦波を重ね合わせたことでうなりが生じていることを表す。

式 (13.11) で重要なのは、**振幅も一定の速度で移動している**点である。この式の \cos に含まれる $-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x$ が一定値をとる曲線 $(t, x(t))$ の上では、振幅 $1 + \cos\left[\left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right]$ は一定の値を取る。この曲線は

$$-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x(t) = C \quad (C: \text{定数}) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{d\omega(k)}{dk}t + C. \quad (13.12)$$

これは、速度 $\frac{d\omega(k)}{dk}$ で移動する位置 $x = x(t)$ では振幅 (式 (13.5) の緑字部分) が一定の値を取り続けることを意味する。すなわち、(少なくとも式 (13.5) については) **波動の振幅の形状は速度 $\frac{d\omega(k)}{dk}$ で移動する**。こちらの速度は、異なる波数 k を持った波形を重ね合わせて得られる**波群**の速度であることから**群速度**と呼ばれる。

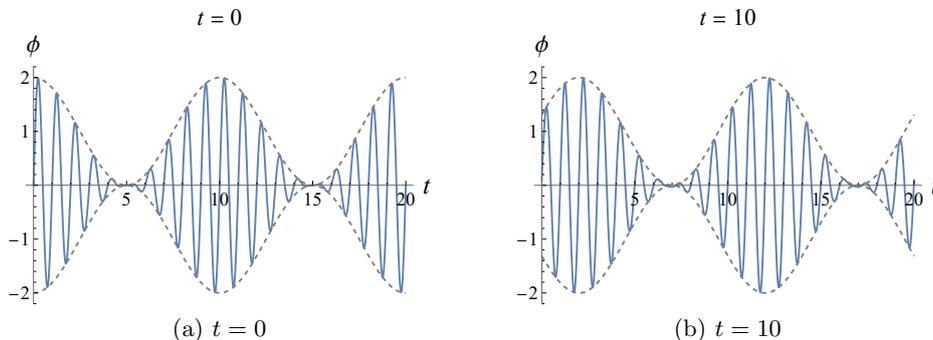


図 22: 式 (13.5) の波動 $\phi(t, x)$ を $k = 2\pi$ (波長 = 1), $\Delta k = k \times \frac{1}{10}$, $\omega(k) = \sqrt{k}$ の場合にプロットしたもの。深水波で重力加速度を $g = 1$ とセットした場合に相当する。この場合の群速度は $\frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \simeq 0.2$ で、そのために $t = 0 \sim 10$ の間に $\Delta x \simeq 2$ ほど振幅の形状が移動している。

13.2 波束の群速度

式 (13.5) では3つの正弦波を重ね合わせたが、より多数の波を重ね合わせることである点の近傍だけに存在し、それ以外ではほとんどゼロとなる波束を作れることもできる。複素表示された波動を考えることにして、以下のような波数 k についての積分で与えられる波動を考える：

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk f(k) e^{i(-\omega(k)t+kx)}. \quad (13.13)$$

前節と同様、振動数は $\omega = \omega(k)$ のように k の関数として与えられているとする。また、被積分関数に含まれる係数 $f(k)$ は、 $k = k_0$ でピークを持ち、 $|k - k_0| > \Delta k (> 0)$ ではほとんどゼロになるとする。こうすることで、空間的に $\Delta x \simeq \frac{2\pi}{k_0}$ 程度の広がりを持った波束を作れることが知られている。

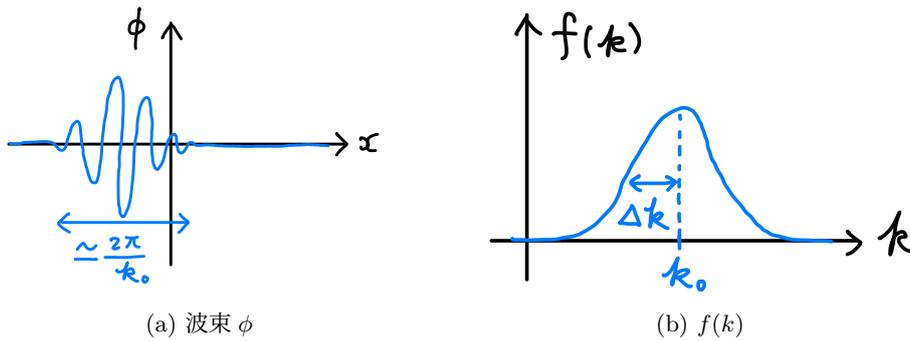


図 23: (a) 式 (13.13) で表される波束 $\phi(t, x)$. $\Delta x \simeq 2\pi/k_0$ 程度の空間的な広がりを持つ。(b) 波束 (13.13) の被積分関数の係数 $f(k)$. $k = k_0$ を中心に幅 Δk 程度の広がりを持ち、その外側でほぼゼロとなる。

$f(k)$ が $k_0 - \Delta k < k < k_0 + \Delta k$ の外側ではほとんどゼロになることから、式 (13.13) の積分は

$$\phi(t, x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk f(k) e^{i(-\omega(k)t+kx)} \quad (13.14)$$

と近似できる。この積分の中で k は $|k - k_0| < \Delta k$ の範囲しか動かないため、 $\omega(k)$ をテイラー展開の一次までで近似しても差し支えない³⁹：

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{d\omega(k)}{dk} (k - k_0) + \mathcal{O}\left(\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} (k - k_0)^2\right). \quad (13.15)$$

これを式 (13.14) に代入すると

$$\phi(t, x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk f(k) e^{i[-(\omega(k_0) + \frac{d\omega(k)}{dk} (k - k_0))t + kx]} \quad (13.16)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i[-(\omega(k_0) - \frac{d\omega(k)}{dk} k_0)t]} \underbrace{\int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk f(k) e^{i(-\frac{d\omega(k)}{dk} t + x)k}}_{\equiv F(-\frac{d\omega(k)}{dk} t + x)}. \quad (13.17)$$

この式の後半部分に現れる k 積分は $-\frac{d\omega(k)}{dk} t + x$ だけで値が決まるため、この部分を関数 $F\left(-\frac{d\omega(k)}{dk} t + x\right)$ と定義した。この式は、式 (13.13) で表される波動の振幅 $F\left(-\frac{d\omega(k)}{dk} t + x\right)$ の形状が速度 $\frac{d\omega(k)}{dk}$ ($k = k_0$ における値) で移動することを表している。こうして、一般の波束 (13.13) についてもその群速度が $\frac{d\omega(k)}{dk}$ となることが分かった。

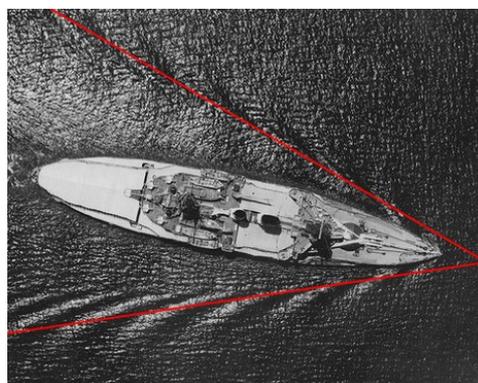
³⁹ただし、誤差項が無視できるためには $\left|\frac{d\omega(k)}{dk} \Delta k\right| \gg \left|\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \Delta k^2\right| \Leftrightarrow |\Delta k| \ll \left|\frac{d\omega/dk}{d^2\omega/dk^2}\right|$ という条件が必要になる。

13.3 ケルビン波

水面を鳥や船などが移動する際に作る波は、波源を起点とする V 字型を描き、なおかつ波の山は V 字の向きよりも若干開いている (図 24 参照)。なおかつ、実は波の角度は波源の速度に依らずおおよそ一定となる。この波のパターンは**ケルビン波** (航跡波) と呼ばれており、深水波のように**群速度と位相速度が一定の比を取る**場合に生じる。このパターンがどのように生じるかについて調べてみることにする⁴⁰。



(a) 鴨の作る波



(b) 船の船首から生じる波

図 24: 水面を移動する鴨や船の作る波のパターン (ケルビン波)。波源を起点とする V 字型の領域に波が存在し、波の山は V 字型よりも少し開いた角度に並ぶ。波の角度は波源の速度に依らずおおよそ一定となる。(出典: <https://ja.wikipedia.org/wiki/航跡波>)

13.3.1 深水波の群速度・位相速度

第 12 回の講義で示した通り、深水波については

$$\omega(k) = \sqrt{gk} \quad (g: \text{重力定数}) \quad (13.18)$$

という関係が成立する。この式に基づいて位相速度 (phase velocity) c_p , 群速度 (group velocity) c_g を導出してみると

$$c_p = \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad c_g = \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2}c_p. \quad (13.19)$$

すなわち、位相速度 c_p , 群速度 c_g はどちらも波数 k に依存して変化し、なおかつどの波数 k についても常に**群速度は位相速度の半分**となる。

音波や浅水波については、任意の波形が一定の速度 (音速) c で伝搬するのであった。この場合は位相速度と群速度の両方が音速 c と一致し、 $\omega(k) = ck$ のように $\omega(k)$ は波数 k に比例する。一方、深水波の場合には群速度と位相速度が異なるが、これに対応して波が伝搬するにつれて波形が変化する。この**波形の変形**を司っているのが分散関係の式 $\omega = \omega(k)$ である。

13.3.2 移動する波源の作る波

前節で示した性質 $c_g = \frac{1}{2}c_p$ に基づいて、移動する波源が作る深水波の波形について調べる。

⁴⁰ケルビン波についての詳細については <https://ja.wikipedia.org/wiki/航跡波>, <https://users.aalto.fi/~thunebel/shipwave.pdf>, G. B. Whitham “Linear and Nonlinear Waves” (John Wiley & Sons) などの資料を参照のこと。Kelvin wakes, boat wakes などのキーワードで検索すると多く出てくる。

[運動する波源と等位相面] 波源の速度を V とし、これが波の位相速度 c_p よりも速いとする。このとき、移動する波源から出る波が等位相となる面（波の山や節に平行な波面）の角度 θ は

$$\sin \theta = \frac{c_p}{V} \quad (13.20)$$

で与えられる（図 25a の青線）。超音速で運動する物体から出る衝撃波が作るマッハ錐の開き角と同じ式である。等位相面に沿って波の位相が一定であるために、**波の山・節は等位相面と平行になる**。

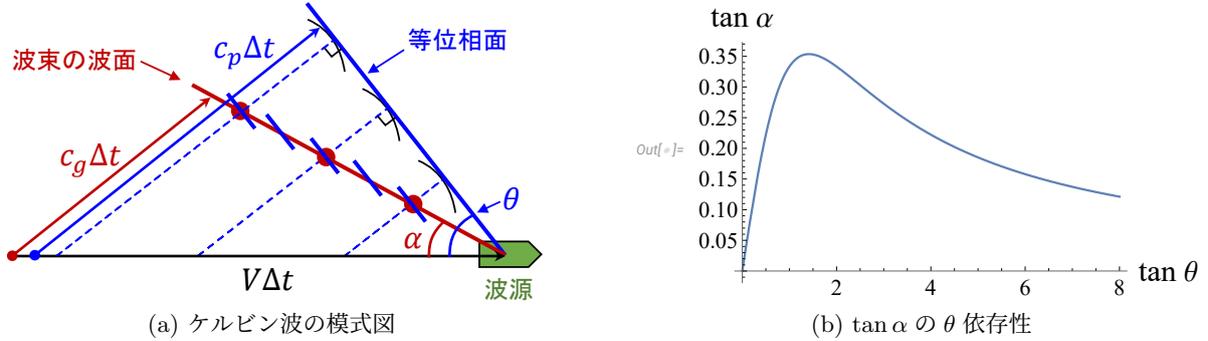


図 25: (a) 速度 V で移動する波源が作るケルビン波の模式図。(b) 波束の波面の角度 α の等位相面の角度 θ に対する依存性を $c_g/c_p = 1/2$ の場合にプロットしたものの $\tan \alpha$ は $\tan \theta = \sqrt{2}$ の時に最大値 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ をとる。

[波束の波面] 群速度 c_g が位相速度 c_p と異なる場合、波の振幅が大きくなる位置は速度 c_g で移動する。特に、深水波のように $c_g < c_p$ となる場合は、等位相面よりも波源に近い位置に振幅の大きい領域が表れる。これを書いたものが図 25a の赤線であり、その角度を α とする。この線に沿って、先ほど説明した等位相面（波の山・節）が周期的に現れる（図 25a の赤線に沿って配置されている青線の列）。

図 25a 中の頂角 $\theta, \theta - \alpha$ の直角三角形それぞれに注目すると

$$\tan \theta = \frac{c_p}{\sqrt{V^2 - c_p^2}}, \quad \tan(\theta - \alpha) = \frac{c_p - c_g}{\sqrt{V^2 - c_p^2}} \quad (13.21)$$

が成立することがわかる。 V を消去し、 $\tan(\theta - \alpha)$ についての加法定理を使って式を整理すると⁴¹

$$\tan \alpha = \frac{\frac{c_g}{c_p} \tan \theta}{1 + \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta} \quad (13.24)$$

が成立する。

[実際に見える波] 式 (13.24) は波束の波面の角度 α を等位相面の角度 θ で与える式である。式 (13.20) で示されている通り、 θ は位相速度と波源の速度の比 c_p/V で決まる。今回は、波源の速度の方が位相速度よりも速い場合 ($c_p/V < 1$) について考える。この場合には $0 < \sin \theta < \pi/2$, $0 < \tan \theta < \infty$ となる。

⁴¹計算の詳細は下記の通り。式 (13.21) について辺々の比を取ると

$$\frac{\tan(\theta - \alpha)}{\tan \theta} = 1 - \frac{c_g}{c_p} \quad (13.22)$$

$\tan(\theta - \alpha)$ の加法定理を使ってこの式の左辺を展開すると

$$\frac{\tan(\theta - \alpha)}{\tan \theta} = \frac{1}{\tan \theta} \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} \quad (13.23)$$

これを式 (13.22) に代入して $\tan \alpha$ について解いたものが式 (13.24) である。

実は、式 (13.24) で決まる α には最大値が存在する。式 (13.24) を θ について微分を取ると⁴²

$$\frac{d \tan \alpha}{d \theta} = \frac{d \tan \theta}{d \theta} \frac{d \tan \alpha}{d \tan \theta} \propto \frac{d}{d \tan \theta} \frac{\frac{c_g}{c_p} \tan \theta}{1 + \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta} \propto 1 + \left(\frac{c_g}{c_p} - 1\right) \tan^2 \theta \quad (13.28)$$

となることが示せる。これがゼロになる θ で $\tan \alpha$ は最大値を取りますが、深水波の場合 ($c_g/c_p = 1/2$) にその値は

$$1 + \frac{1}{2} \tan^2 \theta = 0 \quad \therefore \tan \theta = \sqrt{2}, \quad \tan \alpha \Big|_{\tan \theta = \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2} \tan \theta}{1 + \frac{1}{2} \tan^2 \theta} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (13.29)$$

これらの値に対応する角度は $\theta = \tan^{-1} \sqrt{2} \simeq 54.7^\circ$, $\alpha = \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}}{4} \simeq 19.5^\circ$ である。

深水波の位相速度は $c_p = \sqrt{g/k}$ と波数 k に依存して変化する (小さい k / 長波長の場合に速くなる)。波源からは様々な波数 k の波が生じるが、これらのうち目立って見えるのは最も外側に広がる波で、それよりも内側の波は干渉によって振幅が小さめになる。この一番外側の波の角度は先ほど求めた $\alpha \simeq 19.5^\circ$ で、それに沿って角度 $\theta \simeq 54.7^\circ$ の波の山が並ぶことになる。

α の式 (13.29) に波源の速度 V が現れないことからわかる通り、このケルビン波の角度 θ, α は群速度・位相速度の比 c_g/c_p だけで決まり、波源の速度 V に依存しない。水面を動く鳥と船の場合で波面の角度がおおよそ同じになるのはこれが原因である。

⁴²計算の詳細を書くと

$$\frac{d \tan \alpha}{d \theta} = \frac{d \tan \theta}{d \theta} \frac{d \tan \alpha}{d \tan \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d}{d \tan \theta} \left(\frac{\frac{c_g}{c_p} \tan \theta}{1 + \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta} \right) \quad (13.25)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\frac{c_g}{c_p} \left[1 + \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta\right] - \frac{c_g}{c_p} \tan \theta \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) 2 \tan \theta}{\left[1 + \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta\right]^2} \quad (13.26)$$

$$= \frac{\frac{c_g}{c_p}}{\cos^2 \theta} \frac{1 - \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta}{\left[1 + \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta\right]^2} \propto 1 + \left(\frac{c_g}{c_p} - 1\right) \tan^2 \theta. \quad (13.27)$$