

第12回 水面の波：深水波

前回の講義から水面の波に注目しており、その手始めとして波の波長と比べて水底までの深さが短い場合（浅水波）について前回の講義で解説した。今回は、その逆の極限である波の波長と比べて水深が深い場合（深水波）について解析する。そのために、以前解説した非圧縮流体の渦なし流の解析法（速度ポテンシャルとそれが従うラプラス方程式、ベルヌーイの定理など）を活用する。

12.1 設定

前回の講義で使ったものと同様の仮定をおく。波の波長と流体の深さとの関係が逆転している点と、（実は前回もそうだったが）流体の流れに渦度がないという仮定を明示的におく点だけが違いである。図(20)参照。

- 密度 $\rho = \rho_0$ の非圧縮完全流体を考える。（簡単のため、場合によっては ρ_0 を単に ρ と略記する。）
- 無限に深い流体を考える。波がない状態ではその水面が $z = 0$ にある。
- 水面を x 方向に伝搬する波を考える。流体は x, z 方向に運動し、 y 方向には流体は一様である。
- 波によって水面の位置は $z = 0$ から $z = h(t, x)$ にずれる。
- 微小な波を考える。すなわち、 $\mathbf{v}(t, x, z)$, $h(t, x)$ はどれも微小である。
- 十分に深い位置では流体の速度はゼロになる ($\lim_{z \rightarrow -\infty} \mathbf{v} = 0$) という境界条件をおく。
- 水面における圧力は大気圧 P_0 に等しく、いたるところで $P(t, x, z = h(t, x)) = P_0$ （定数）。
- 流体全体に下向き重力 ($\mathbf{g} = (0, 0, -g)$) がかかっている。
- 流体に渦度はないとする。波が保存力だけで励起されるのであれば、流体の渦度は保存する（第5回の内容から示せる）。そのため、初期状態で流体が静止（ \Rightarrow 渦度はゼロ）しており、波が保存力だけで励起されるなど渦度が外部から追加されない状況であれば、流体の渦度はどの時点でも常にゼロとなる。今回はそのような状況を考える。

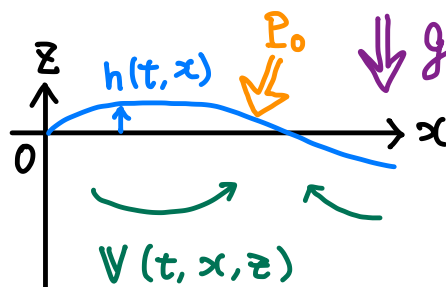


図 20: 深さが無限大の流体の x 方向に伝搬する波（深水波）。下向きに重力 g がかかっており、また水面 $z = h(t, x)$ の位置での圧力はいたるところ大気圧 P_0 に等しい。

12.2 運動方程式

第6回の講義で解説した通り、非圧縮完全流体の渦なし流については、速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ を速度ポテンシャル $\phi(t, \mathbf{r})$ で表すことができる：

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \nabla \phi(t, \mathbf{r}) \quad (12.1)$$

今回の場合、運動方程式を解いて決めるべき動変数は速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ と水面の位置 $z = h(t, x)$ である。この2つの変数を定める運動方程式を以下で導出する。

以下で行う導出は、流体の運動方程式である連続の式とオイラーの方程式のそれぞれにまず注目し、それに加えて水面の位置での境界条件を速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ とオイラーの方程式に現れる圧力 $P(t, x, z)$ に課す、という順番で進める。

[連続の式] 非圧縮流体の場合、連続の式は $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ という式になり、この式はさらに $\Delta\phi = 0$ というラプラス方程式に帰着する。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho = \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \underbrace{\nabla \cdot \nabla \phi}_{=\Delta\phi} = 0. \quad (12.2)$$

このラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ は、水面の位置 $z = h(t, x)$ と水底 $z \rightarrow -\infty$ で $\phi(t, x, z)$ が満たすべき境界条件が与えられた暁に、水中の速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ を定める方程式である。

[水面の高さ] 水面の高さ $z = h(t, x)$ は流体とともに運動するが、その時間変化は水面の位置における v_z で与えられる：

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} = v_z(t, x, z = h(t, x)). \quad (12.3)$$

ここで、波は微小であると仮定しているため、波の位置 $z = h(t, x)$ は波のない場合の水面の位置 $z = 0$ に非常に近い。そのため

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = v_z(t, x, z = h(t, x)) = v_z(t, x, 0) + \frac{\partial v_z(t, x, 0)}{\partial z} h(t, x) + \dots \quad (12.4)$$

$$\therefore \frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = v_z(t, x, 0) = \frac{\partial \phi(t, x, 0)}{\partial z}. \quad (12.5)$$

ただし、 $\frac{\partial \phi(t, x, 0)}{\partial z}$ は微分 $\frac{\partial \phi(t, x, z)}{\partial z}$ の $z = 0$ における値である。この式は、速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ が $z = 0$ で満たすべき境界条件の式となる。

[オイラーの方程式] 非圧縮完全流体の渦なし流について、オイラーの方程式からベルヌーイの定理:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U = C \quad (C: \text{定数}) \quad (12.6)$$

が導かれたのであった。今回の場合、この式の各項は以下のようになる。

- $|\mathbf{v}|^2$ は微小量 \mathbf{v} の2次の項となり、ほかの項に比べて十分小さいので無視する。
- 非圧縮 ($\rho = \rho_0$) の場合、エンタルピーは $w = P(t, x, z)/\rho_0$ となる。
- ポテンシャル U としては重力ポテンシャル $U = gz$ を使う。

これらを踏まえると、ベルヌーイの定理の式 (12.6) は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, z) + \frac{P(t, x, z)}{\rho} + gz = C. \quad (12.7)$$

この式は、速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ がほかの式で求められた暁に、それをもとに圧力 $P(t, x, z)$ を定める式である。

[水面における圧力] ところで、水面直上 $z = h(t, x)$ では圧力が大気圧 P_0 と等しくなるのであった。この情報を現行っている解析に取り込むには、圧力 $P(t, x, z)$ が登場するベルヌーイの定理の式 (12.7) でこの条件式を使うほかない。そのために式 (12.7) を水面の位置 $z = h(t, x)$ で評価すると、 $P(t, x, z) \rightarrow P_0, z \rightarrow h(t, x)$ と置き換わるので

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, h(t, x)) + \frac{P_0}{\rho} + gh(t, x) = C. \quad (12.8)$$

この式について、さらに以下の簡単化・近似を行う。

- 流体全体で一定値となる定数 C は (流体全体で一定でさえあれば) 任意の値にセットしてよい。また、第二項 P_0/ρ は定数となる。これらを踏まえ、 $C = P_0/\rho$ と取ることによってこれらの項を式 (12.8) から取り除いても一般性を失わない。
- 水面の変位 $h(t, x)$ は微小なので、速度ポテンシャル $\phi(t, x, h(t, x))$ は少しずれた $z = 0$ の位置における値 $\phi(t, x, 0)$ とほぼ等しくなるという近似が使える。式 (12.4) で行ったのと同じ近似。

これらを適用すると、式 (12.8) は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, 0) + gh(t, x) = 0. \quad (12.9)$$

この式は $\phi(t, x, 0)$ の時間微分を与える式で、先ほど導出した $h(t, x)$ の時間微分を与える式 (12.5) と対をなすものである。

[方程式系のまとめ] ここまでで得られた方程式 (12.5), (12.9), (12.2), (12.7) を改めて整理すると

$$(I) \quad \Delta \phi(t, x, z) = 0, \quad (12.10)$$

$$(II) \quad \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(t, x, 0), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, 0) + gh(t, x) = 0, \quad (12.11)$$

$$(III) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, z) + \frac{P(t, x, z)}{\rho} + gz = \frac{P_0}{\rho} \quad (12.12)$$

という 4 本の式が得られた。

- (I) は $\phi(t, x, z)$ についてのラプラス方程式であり、これを解くことで水中の速度分布を決定できる。これを解くときに、無限に深い水底 ($z \rightarrow -\infty$) および水面での境界条件を境界条件を課す必要がある。
- (II) の 2 本の式は水面の位置 $h(t, x)$, 速度ポテンシャルの水面での値 $\phi(t, x, 0)$ についての方程式である。速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ が水面の位置 $z = 0$ で満たすべき境界条件とみなすこともできる。

前回の講義で行ったのと同様に、(I) の 2 つの式は一本の二階偏微分方程式に書き換えることができる。(I) の第二式の時間微分 ∂_t をとり、第一式を使って書き換えると

$$\frac{\partial^2 \phi(t, x, 0)}{\partial t^2} = -g \frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = -g \frac{\partial \phi(t, x, 0)}{\partial z} \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 \phi(t, x, 0)}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi(t, x, 0)}{\partial z} = 0. \quad (12.13)$$

この式は、後ほど ϕ の一般解から真の解を選別する際に用いられる。

- (III) は、速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ が求められた暁に、水中の圧力分布 $P(t, x, z)$ を定める式となっている。今回の講義では $P(t, x, z)$ についての解析は割愛する。

12.3 正弦波解

前節でまとめた方程式を解き、波を表す解を具体的に求めてみる。手順は下記の通り。

1. まず、(I) のラプラス方程式について、水面での境界条件を課さずに一般解 (の一部) を求める。
2. 得られた一般解について、水面での境界条件 (II) (特に式 (12.13)) を課して解を決定する。これで速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ と速度場 $\mathbf{v} = \nabla \phi$ が求まる。
3. (II) の式に $\phi(t, x, 0)$ を代入することで、水面の位置 $z = h(t, x)$ を決定する。

[$\Delta\phi = 0$ の正弦波解] 今回は、 $\phi(t, x, z)$ の一般解のうち、波の形状が三角関数で与えられる正弦波解を求めてみることにする。今回解くべきラプラス方程式は

$$\Delta\phi(t, x, z) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0. \quad (12.14)$$

この式の形を踏まえて、 $\phi(t, x, z)$ の関数形を

$$\phi(t, x, z) = f(z)e^{i(\omega t + kx)} \quad [k > 0, \omega : \text{実定数}, f(z) : \text{実関数}] \quad (12.15)$$

とおく。 ω, k はそれぞれ波の振動数と波数である。この $\phi(t, x, z)$ の形のまま方程式を解き、そののちに実部だけを取れば

$$\phi(t, x, z) = f(z) \cos(\omega t + kx) \quad (12.16)$$

という実数の正弦波解が得られる。この三角関数で書かれた関数形を使ってももちろん解けるのだが、複素表示された ϕ の式(12.15)を使った方が計算が少しだけ簡単化する。

$\phi(t, x, z)$ が式(12.15)の形で与えられると仮定すると、以下の通りラプラス方程式(12.14)を常微分方程式に帰着できる。ラプラス方程式(12.14)に ϕ の表式(12.15)を代入すると

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(z)e^{i(\omega t + kx)} = \left((ik)^2 f(z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z) \right) e^{i(\omega t + kx)} = \left(-k^2 f(z) + \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \right) e^{i(\omega t + kx)} \quad (12.17)$$

$$\therefore \frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 f(z) = 0. \quad (12.18)$$

式(12.18)は $f(z)$ についての常微分方程式で、その一般解も容易に見つけることができ

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}. \quad (A, B : \text{定数}) \quad (12.19)$$

ここで、無限に深い水底での境界条件 $\lim_{z \rightarrow -\infty} \mathbf{v} = 0$ を使う。 $z \rightarrow -\infty$ で速度場 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ がゼロになるとき、速度ポテンシャル ϕ は定数に漸近する必要がある。 $k > 0$ と仮定していたので、式(12.19)の2つの項のうちこの条件を満たすのは第一項の Ae^{kz} だけである(第二項は $\lim_{z \rightarrow -\infty} e^{-kz} = \infty$ と発散する)。したがって、水底での境界条件を満たす解は

$$\phi(t, x, z) = Ae^{kz} e^{i(\omega t + kx)} \quad (12.20)$$

という形で与えられる。これがラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ の正弦波解で水底での境界条件を満たすものとなる。

[水面での境界条件] ラプラス方程式の一般解(12.20)の段階では、定数 ω, k は任意の定数であった。この解が水面での境界条件の式(12.13)を満たすことを要請すると、 ω と k を関係づける式(分散関係式と呼ばれる)が得られる。

一般解の式(12.20)を水面 $z = 0$ における境界条件の式(12.13)に代入すると

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi(t, x, 0) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right) Ae^{kz} e^{i(\omega t + kx)} \Big|_{z=0} \quad (12.21)$$

$$= (-\omega^2 + gk) Ae^{kz} e^{i(\omega t + kx)} \Big|_{z=0} = (-\omega^2 + gk) Ae^{i(\omega t + kx)} \quad (12.22)$$

$$\therefore -\omega^2 + gk = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \omega(k) = \pm\sqrt{gk}. \quad (12.23)$$

この通り、水面の境界条件を課すことで ω と k との関係式が得られた。

音波や前回の講義で解説した浅水波では、これに対応する関係式は $\omega(k) = \pm ck$ (c : 波動の伝搬速度)で、 ω と k 。深水波については $\omega(k)$ は \sqrt{k} に比例しており、だいぶ趣が異なる。次回の講義で解説するが、式(12.23)のような ω と k の関係式は分散関係式と呼ばれており、この式の形で波の性質が大きく変わるといふ特徴がある。

[速度場、水面の形状] まず、上記で得られた速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ (一般解の式 (12.20) に分散関係 (12.23) を代入したもの) について、その実部を取ることによって実際に実現される値を書き下すと

$$\phi(t, x, z) = Ae^{kz} \cos(\omega(k)t + kx), \quad \omega(k) = \pm\sqrt{gk}. \quad (12.24)$$

$\omega(k) = +\sqrt{gk}$ が x 軸の負の方向に、 $\omega(k) = -\sqrt{gk}$ が正の方向に伝搬する波を表している。また、この式から流体の速度場 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ を求めると

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \phi(t, x, z) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} Ae^{kz} \cos(\omega(k)t + kx) = Ae^{kz} \begin{pmatrix} -k \sin(\omega(k)t + kx) \\ 0 \\ k \cos(\omega(k)t + kx) \end{pmatrix}. \quad (12.25)$$

また、水面の位置 $z = h(t, x)$ を定めるために、式 (12.24) を (II) の第二式に代入すると

$$0 = \frac{\partial\phi}{\partial t}(t, x, 0) + gh(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} [Ae^{kz} \cos(\omega(k)t + kx)] + gh(t, x) = -A\omega(k)e^{kz} \sin(\omega(k)t + kx) + gh(t, x) \quad (12.26)$$

$$\therefore h(t, x) = \frac{A\omega(k)}{g} e^{kz} \sin(\omega(k)t + kx), \quad \omega(k) = \pm\sqrt{gk}. \quad (12.27)$$

12.4 深水波の特徴

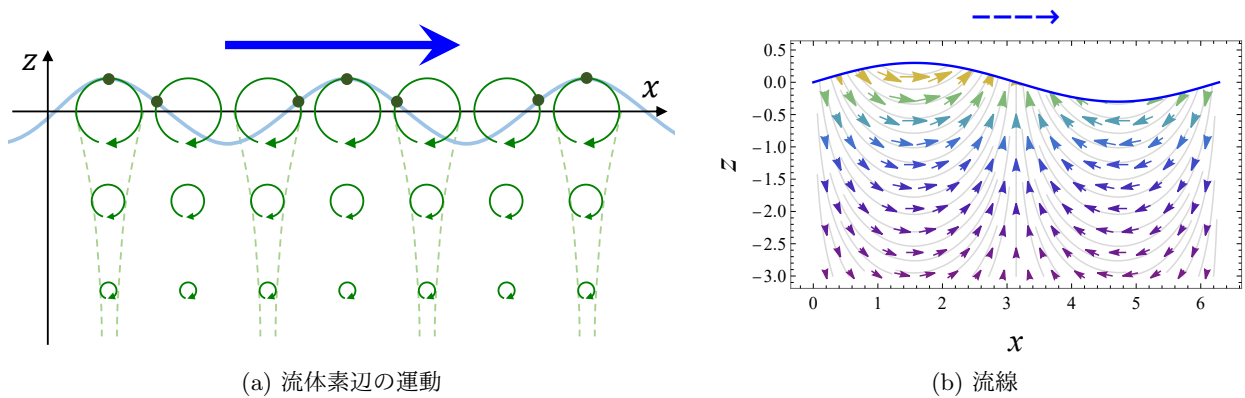


図 21: (a) 微小振幅の深水波における流体素辺の運動。波は右向きに進行するが、各流体素辺は各地点で円運動をしているだけである。(b) 深水波についての速度場 \mathbf{v} と流線。 \mathbf{v} が時間依存するため、流線と流体素辺の運動の軌跡が互いに異なっている。

[流体素辺の運動] 式 (12.25) の速度場 $\mathbf{v}(t, x, z)$ を時間積分すれば、各流体素辺の変位 $\Delta\mathbf{r}(t)$ を

$$\Delta\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t)) dt \quad (12.28)$$

と求めることができる。ただし、速度場 $\mathbf{v}(t, x, z)$ は時間依存性 (t) だけでなく位置依存性 ($\mathbf{r}(t)$) も持っている。このため、流体素辺が動くとともに速度場の値も変化するため、上記の積分を実行するのが若干難しくなる。ここで、微小振幅の波については流体素辺の運動も微小なので、速度場の値を流体素辺の初期位置での値で近似することができる。すなわち、初期位置が $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ (定数) の流体素辺について

$$\Delta\mathbf{r}(t) \simeq \int \mathbf{v}(t, \mathbf{r}_0) dt. \quad (12.29)$$

これを、式 (12.25) の \mathbf{v} について実際にやってみると

$$\Delta \mathbf{r}(t) \simeq \int \mathbf{v}(t, \mathbf{r}_0) dt = \int A e^{kz_0} \begin{pmatrix} -\sin(\omega(k)t + kx_0) \\ 0 \\ \cos(\omega(k)t + kx_0) \end{pmatrix} dt = \frac{A k e^{kz_0}}{\omega(k)} \begin{pmatrix} \cos(\omega(k)t + kx_0) \\ 0 \\ \sin(\omega(k)t + kx_0) \end{pmatrix} \begin{matrix} (x) \\ (y) \\ (z) \end{matrix} \quad (12.30)$$

この式は、時間 t が経過するにつれて流体素辺の位置は円形を描くことを示している。円の大きさは $\exp(kz_0)$ に比例しており、位置が深くなると円軌道は指数的に小さくなる。これを図示したのが図 21a である。各流体素辺は初期位置付近で円運動しているだけなのだが、その結果として波の形状が一方方向に伝搬するのが特徴である。

[速度場、流線] ある時刻 $t = t_0$ の速度場 $\mathbf{v}(t_0, \mathbf{r})$ と、それをつなげてできる流線は図 21b のようになる。今回の速度場は一方方向に伝搬する波を表すもので、そのため時間依存性を持っている。第 1 回の講義で解説した通り、速度場が時間依存性を持つ場合には、流線とある流体素辺の運動の軌跡は一致しない。流体素辺の運動 (図 21a) と流線 (図 21b) が全く異なった構造を持っているのはこのためである。