

第10回 音波の性質

前回の講義で、流体の密度の波動である**音波**について解説した。その性質について解説を加える。

[復習：音波] 平衡状態にある静止した流体 ($P = P_0, \mathbf{v} = 0$) に微小な密度変化を

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \rho_0 + \delta\rho(t, \mathbf{r}), \quad |\delta\rho(t, \mathbf{r})| \ll \rho_0 \quad (10.1)$$

と与える。これに対応して微小な流速 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \neq 0$ が発生する。連続の方程式とオイラーの方程式にこれを代入し、 $\delta\rho, \mathbf{v}$ について一次までの項を残す近似をすると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right) \delta\rho = 0, \quad c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (10.2)$$

という方程式が得られる³⁵。この方程式の一般解は、 x 軸方向に伝搬する平面波を考える場合は

$$\delta\rho(t, x) = f(ct - x) + g(ct + x) \quad (f, g: \text{任意関数}) \quad (10.3)$$

となり、 $f(ct - x)$ が右向き ($x = ct$)、 $g(ct + x)$ が左向き ($x = -ct$) に伝搬する波動を表す。なお、速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ はオイラーの方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} \nabla \delta\rho = -\frac{c^2}{\rho} \nabla \delta\rho \quad (10.4)$$

を満たすように定められる。

10.1 音波のエネルギー

流体の微小な密度変化が音速で伝搬するという現象が音波だったが、音波に伴って流体が運動するので**音波はエネルギーを伴い、音波の伝搬と共にエネルギーも伝搬する**。

10.1.1 エネルギー密度

流体のエネルギー密度の保存則については第4回の講義で調べており、特に**エネルギー保存則**に対応する式は、流体に外力がかからない場合は

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} + \rho \varepsilon \mathbf{v} + P \mathbf{v} \right) = 0 \quad (10.5)$$

で与えられるのであった。ただし ε は単位質量あたりの内部エネルギーで、断熱的な時間変化を考える場合は

$$d\varepsilon + Pd \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0 \quad (\Leftrightarrow dE + PdV = 0) \quad (10.6)$$

を満たす。式 (10.5) の左辺の各項のかつこの中身

$$\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon, \quad \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon + P \right) \mathbf{v} \quad (10.7)$$

はそれぞれ**エネルギー密度**と**エネルギー密度流ベクトル**である。

³⁵第9回の講義では x 軸方向に伝搬する平面波だけを考えたため、 $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \delta\rho = 0$ という x 成分だけを持った式 (9.11) が得られていた。式 (10.2) は、 x 方向だけではなく一般の方向に音波が伝搬するとして導出した式で、 $\partial^2/\partial x^2$ が ∇^2 に置き換わっている。

式 (10.7) のうち、流体のエネルギー密度にまず注目する。これは内部エネルギー密度 $\rho\varepsilon$ と運動エネルギー密度 $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2$ で構成されるが、そのそれぞれが微小密度変化 (10.1) に対してどう振る舞うかを見る。

[内部エネルギー密度] まず、内部エネルギー密度を ρ の二次までテイラー展開する：

$$\rho\varepsilon = \rho_0\varepsilon_0 + \frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho\varepsilon}{\partial\rho^2}\delta\rho^2 + \mathcal{O}(\delta\rho^3) . \quad (10.8)$$

この係数に現れる $\rho\varepsilon$ の微分を式 (10.6) に従って計算しておく：

$$d\varepsilon + Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\varepsilon = +P\frac{d\rho}{\rho^2} \quad \therefore \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} = \frac{P}{\rho^2} \quad (10.9)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial\rho} = \varepsilon + \rho \underbrace{\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}}_{=P/\rho^2} = \varepsilon + \frac{P}{\rho} , \quad (10.10)$$

$$\frac{\partial^2\rho\varepsilon}{\partial\rho^2} = \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\varepsilon + \frac{P}{\rho} \right) = \cancel{\frac{P}{\rho^2}} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} - \cancel{\frac{P}{\rho^2}} \right) = \frac{c^2}{\rho} . \quad (10.11)$$

これらを式 (10.8) に代入すると

$$\rho\varepsilon \simeq \rho_0\varepsilon_0 + \left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \delta\rho + \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho^2 . \quad (10.12)$$

[全エネルギー密度] 式 (10.12) に運動エネルギー密度を足すと、全エネルギー密度 (10.7) が得られる：

$$\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho\varepsilon \simeq \underbrace{\rho_0\varepsilon_0}_{1.} + \underbrace{\left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \delta\rho}_{2.} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho^2 + \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{v}|^2}_{3.} + \mathcal{O}(\delta\rho^3, \delta\rho|\mathbf{v}|^2) . \quad (10.13)$$

運動エネルギー $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2}(\rho_0 + \delta\rho)|\mathbf{v}|^2$ については、三次の微小量である $\delta\rho|\mathbf{v}|^2$ を無視した。式 (10.13) の右辺の各項の性質を少し細かく見ると

1. $\rho_0\varepsilon_0$: 音波のない平衡状態の流体の内部エネルギー
2. $\left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \delta\rho$: この項は (定数) $\times \delta\rho(t, \mathbf{r})$ という形をしている。一般的な音波については $\delta(t, \mathbf{r})$ は振動的に振る舞い、正・負両方の値を取るうえ、波長よりも長いスケールで平均を取ると正・負の部分が打ち消しあってほぼゼロになる。したがって、この項は音波のエネルギーにほとんど寄与しない。
3. $\frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho^2 + \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{v}|^2$: この項は必ず正になる $\delta\rho^2, |\mathbf{v}|^2$ だけで構成されており、空間平均をとった暁にも非ゼロの値を与える。

以上の考察より、3. の部分を音波に伴うエネルギー密度とみなすのが適切であると考えられる。改めて、音波のエネルギー密度 \mathcal{E} を書き下しておく

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho^2 + \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{v}|^2 . \quad (10.14)$$

10.1.2 エネルギー密度流

同様に、エネルギー密度流 (式 (10.7) の後者) を音波について評価する。圧力 P が

$$P = P_0 + \frac{dP}{d\rho} \delta\rho + \mathcal{O}(\delta\rho^2) = P_0 + c^2 \delta\rho + \mathcal{O}(\delta\rho^2) \quad (10.15)$$

と展開できることを使うと、エネルギー流の表式は

$$\left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon + P \right) \mathbf{v} = \left[\rho_0 \varepsilon_0 + \left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \delta\rho + P_0 + c^2 \delta\rho \right] \mathbf{v} + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^3, \delta\rho |\mathbf{v}|^2) . \quad (10.16)$$

$$= \underbrace{\left[(\rho_0 + \delta\rho) \left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \right]}_2 + \underbrace{c^2 \delta\rho}_3 \mathbf{v} + \dots \quad (10.17)$$

実は、この式の 2. の部分は、エネルギー密度の式 (10.13) のうち 2. の部分に対応するエネルギー流である。実際、連続の式に式 (10.1) を代入し、 $\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0}$ (定数) をかけると

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho_0 + \delta\rho) \mathbf{v}] \quad (10.18)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \delta\rho \right] + \nabla \cdot \left[(\rho_0 + \delta\rho) \left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \mathbf{v} \right] = 0 . \quad (10.19)$$

この式は、エネルギー密度の式 (10.13) の 2. の部分とエネルギー密度流の式 (10.17) の 2. の部分が保存則によって結び付けられていることを表している。

したがって、音波のエネルギー密度 (式 (10.13) の 3., および式 (10.14)) に対応するエネルギー密度流 \mathbf{j}_ε は、式 (10.17) の 3. の部分であり

$$\mathbf{j}_\varepsilon \equiv c^2 \delta\rho \mathbf{v} . \quad (10.20)$$

実際、音波のエネルギー密度 ε とエネルギー密度流ベクトル \mathbf{j}_ε についての保存則の式を書き下してみると

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho^2 + \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{v}|^2 \right) + \nabla \cdot (c^2 \delta\rho \mathbf{v}) \quad (10.21)$$

$$= \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c^2 \delta\rho \nabla \cdot \mathbf{v} + c^2 \mathbf{v} \cdot \nabla \delta\rho \quad (10.22)$$

$$= \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho \left[\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) \right] + \rho_0 \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho_0} \nabla \delta\rho \right) = 0 \quad (10.23)$$

となる。最後の行の**第一項**は連続の式 (10.18) (の一次の部分)、**第二項**はオイラーの方程式 (10.4) (で $\rho \simeq \rho_0$ と近似した式) によってそれぞれゼロとなっている。

10.1.3 音波のエネルギーの伝搬

式 (10.3) に示した x 方向に伝搬する平面波のうち、 x 軸の正の方向に伝搬するモード

$$\delta\rho(t, x) = f(ct - x) \quad (10.24)$$

について考える。なお、 \mathbf{v} の x 成分を v として、これが満たす式 (10.4) をこれについて書き下すと

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} \simeq -\frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} f(ct - x) = +\frac{c^2}{\rho_0} f'(ct - x) . \quad (10.25)$$

ただし $f'(y) \equiv \frac{df}{dy}$. この式の両辺を t について積分し、音波がないところでは $v = 0$ であるとして積分定数をゼロとすると

$$v(t, x) = \frac{c}{\rho_0} f(ct - x) . \quad (10.26)$$

x 軸向きに伝搬する波動 (10.24), (10.26) について、音波のエネルギー密度 (10.14)、エネルギー密度流ベクトル (10.20) の x 成分 $j_{\mathcal{E}}$ を求めてみると

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho^2 + \frac{1}{2} \rho_0 v^2 = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} f^2(ct-x) + \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{c}{\rho_0} f(ct-x) \right)^2 = \frac{c^2}{\rho_0} f^2(ct-x) \quad (10.27)$$

$$j_{\mathcal{E}} = c^2 \delta\rho v = c^2 f(ct-x) \frac{c}{\rho_0} f(ct-x) = \frac{c^3}{\rho_0} f^2(ct-x) = \mathcal{E} \times c. \quad (10.28)$$

これらの式は、 x 軸方向に伝搬する音波に伴って、エネルギー密度 \mathcal{E} が音速 c で伝搬することを表している。流体そのものが移動しているのではなく、密度の振動が伝わることでエネルギーが輸送されているので注意が必要である。

10.2 球面波

ここまでは主に一方向だけに伝搬する平面波に注目してきたが、ある一点から発生して全方向へ等方的に広がる球面波についても調べておく。

[密度変化] 球面波について調べるため、音源の位置を基準点とする極座標 (r, θ, ϕ) を取ると、密度の変化は

$$\delta\rho(t, r, \theta, \phi) = \delta\rho(t, r) \quad (10.29)$$

と表される。また、 $\delta\rho$ が従う波動方程式 (10.2) は

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right) \delta\rho = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \delta\rho. \quad (10.30)$$

ここで、やや天下りののだが

$$\frac{\partial^2 (r \delta\rho)}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\delta\rho + r \frac{\partial \delta\rho}{\partial r} \right) = r \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \delta\rho}{\partial r} = r \left(\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \delta\rho}{\partial r} \right) \quad (10.31)$$

となることに留意すると、式 (10.30) は

$$\frac{\partial^2 (r \delta\rho)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 (r \delta\rho)}{\partial r^2} = 0. \quad (10.32)$$

この式は第9回の講義で調べた平面波が従う方程式について $x \rightarrow r, \delta\rho \rightarrow r \delta\rho$ と置き換えた式になっている。そのため、式 (10.32) の一般解は、平面波の場合の一般解 (10.3) についてその置き換えを行ったもので与えられて

$$r \delta\rho = f(ct-r) + g(ct+r) \quad (10.33)$$

となる。 $f(ct-r), g(ct+r)$ は任意の関数で、それぞれ動径座標 r の正の向き (外向き)、負の向き (内向き) に伝搬する音波を表す。

中心点 $r=0$ から出て外向きに伝搬する波を考える場合は、式 (10.33) のうち $f(ct-r)$ だけを考えることになる。この場合の密度変化は

$$\delta\rho(t, r) = \frac{f(ct-r)}{r} \quad (10.34)$$

となる。

[速度場] 速度場 \mathbf{v} を定める式 (10.4) を使って球面波 (10.34) の \mathbf{v} を求めてみる。球面波については \mathbf{v} の r 成分 v_r だけが値を持つので、オイラーの方程式 (10.4) の r 成分を書き下してみると

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho} (\nabla \delta\rho)_r = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \delta\rho}{\partial r} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \frac{f(ct-r)}{r} = -\frac{c^2}{\rho} \left(-\frac{f(ct-r)}{r^2} - \frac{f'(ct-r)}{r} \right). \quad (10.35)$$

これを t について積分すれば v_r が得られる。関数 $f(y)$ の積分を $F(y) \equiv \int^y f(y') dy'$ と定義すると

$$v_r(t, r) = \int dt \frac{c^2}{\rho} \left(\frac{f(ct-r)}{r^2} + \frac{f'(ct-r)}{r} \right) = \frac{c^2}{\rho c} \int d(ct) \left(\frac{f(ct-r)}{r^2} + \frac{f'(ct-r)}{r} \right) \quad (10.36)$$

$$= \frac{c^2}{\rho c} \left(\frac{F(ct-r)}{r^2} + \frac{f(ct-r)}{r} \right) = \frac{c}{\rho} \left(\frac{F(ct-r)}{r^2} + \frac{F'(ct-r)}{r} \right). \quad (10.37)$$

式 (10.37) は、音源を中心とする半径 r の球面を単位時間に通過する流体の流量が

$$4\pi r^2 v_r = \frac{4\pi c}{\rho} (F(ct-r) + r F'(ct-r)) \quad (10.38)$$

で与えられることを示している。この球面を音源 $r=0$ の近くまで縮める ($r \rightarrow 0$) ことで、原点から時刻 t に湧き出す流体の流量を求めることができる。これを $Q(t)$ とすると

$$Q(t) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \frac{4\pi c}{\rho} (F(ct-r) + r F'(ct-r)) = \frac{4\pi c}{\rho} F(ct). \quad (10.39)$$

これを使って半径 r の地点での流速 v_r (10.37) を原点における流体の湧き出し $Q(t)$ で表しなおすと³⁶

$$v_r = \frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2} + \frac{Q'(t - \frac{r}{c})}{4\pi c r}. \quad (10.40)$$

式 (10.40) の右辺の各項に物理的な解釈を与えると以下のようになる。

• $\frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2}$ 項：

- 以前 7.2.2 節で非圧縮流体がある一点から $Q(t)$ だけ湧き出している場合の流速を調べたが、この場合の流速は

$$v_r = \frac{Q(t)}{4\pi r^2} \quad (10.41)$$

となり、 $\frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2}$ 項とほぼ同じ形をしている。そのため、 $\frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2}$ 項は**流体の湧き出しから直接生じた流速**であると解釈できる。

- なお、 $\frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2}$ 項では Q の引数が $t \rightarrow t - \frac{r}{c}$ と置き換わっているが、これは**流体の湧き出しが音速 c で伝搬するため**、遠方の位置 r では v_r が変化するのが $\Delta t = r/c$ だけ遅延することを表している。
- 非圧縮流体の音速は無限大であり、実際 $\frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2}$ について $c \rightarrow \infty$ とすれば式 (10.41) が再現される。

• $\frac{Q'(t - \frac{r}{c})}{4\pi c r}$ 項：

- この項は $1/r$ に比例するため、特に遠方 ($r \rightarrow \infty$) では第一項 $\frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2} \propto 1/r^2$ よりも大きくなる。
- この項は $1/r$ に比例しており、非圧縮流体の場合の式 (10.41) には存在しなかったものである。また、**圧力変化は $1/r$ に比例している** (式 (10.34) 参照)。以上より、この項は**圧力変化 $\delta\rho$ の伝搬が原因で生じた流速**であると解釈できる。
- 流体が直接流れたのではなく、流体自体はほとんど動いていないものの**密度変化が音速で伝搬したために生じた流速**である。その意味で**音波の伝搬に伴う流速**であると言うこともできる。

³⁶式 (10.37) から式 (10.38) への書き換えは、式 (10.39) を使って以下のようにできる：

$$\frac{4\pi c}{\rho} F(ct-r) = Q(t)|_{t \rightarrow t - \frac{r}{c}} = Q\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad \frac{4\pi c}{\rho} F'(ct-r) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4\pi c}{\rho} F(ct-r) \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} Q\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{c} Q'\left(t - \frac{r}{c}\right).$$