第 1 回　導入

1.1　連続体・流体の力学

- **ニュートン力学** = 広がりのない質点の力学

  物理量は質点の位置 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, 質量 m, 外力 $\mathbf{F}$ など[1]

- **連続体力学** = 広がりを持ち変形する物体（固体、流体など）の力学

  - **連続体**: 微視的構造を平均化して得られる**平均量**（位置、密度、圧力など）だけで記述できる物体。

    例えば、気体の**モル体積**（1 mol $= 6.02 \times 10^{23}$ 個 あたりの体積。標準状態で 22.4 ℓ）の部分について、それに含まれる個々の粒子の力学を考える代わりに、気体の微小な一部分（**流体素辺**）についての平均量だけで記述する場合には連続体として扱われる。ただし、個々の流体素辺にも十分多数の粒子が含まれるとする。

    個々の粒子（微視的描像）と連続体（巨視的描像）のどちらに注目するかは、どの長さスケールの物理現象に注目したいかに応じて決まる。

    * **弾性体**: 外力に対して弾性的に振る舞う（外力を除いたときに元の形状に復帰する）連続体。弦・膜のような物体とその振動などを議論するのが弾性体力学。
    * **流体**: 定まった形を持たず、（静止状態の時に）変形させても物体内部に弾性力が発生しない連続体。[2]

[**流体力学極限**] 流体としての記述が精度良くなるためには、注目する物理現象の長さ・時間スケール L, T が流体を構成する分子の平均自由行程・平均衝突時間 λ, τ と比べて十分大きい必要がある：

$$L \gg \lambda\,, \qquad T \gg \tau\,. \tag{1.1}$$

この場合、**流体素辺**の大きさ ℓ を $L \gg \ell \gg \lambda$ のようにとれば、以下のような状況が実現される：

- 各流体素辺は**局所熱平衡**に達していて、平均的物理量（密度 ρ, 温度 T, 圧力 P、位置 $\mathbf{x}(t)$）だけで記述できる。

- 流体素辺よりも十分大きいスケール L では、時間･位置依存性を持った流体の運動（$\rho(t,\mathbf{x}), P(t,\mathbf{x})$ や流速 $\mathbf{V}(t,\mathbf{x})$ などで記述される）が存在する。

このように、各流体素辺については内部の微視的構造を粗視化して熱力学的に取り扱い、流体素辺よりもずっと大きなスケールの物理現象だけに注目する場合に成立するのが**流体力学**である。流体力学が成立する式 (1.1) のような状況を考えることを**流体力学極限を取る**と言うこともある。

流体素辺内部の物質を平均化してその微視的な運動を見ないことにする場合、微視的な粒子の運動方程式の代わりとなる方程式を新たに導入しないと流体の時間発展が決まらなくなる。流体素辺は局所熱平衡に達している場合には、素辺を特徴づける物理量 ρ, P, T を互いに関係づける**状態方程式**が成立する。これが微視的な運動方程式の代わりの役割を果たし、**流体素辺の（力学的な）運動方程式＋状態方程式**という方程式系によって流体の時間発展が決定されることになる。今後の講義で、この流体力学の運動方程式を順次導入していく。

[1] 本講義ノートでは 3 次元ベクトルを太字で表す。例）$\mathbf{x} = (x, y, z), \mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt, \ldots$

[2] 流体でも、粘性と速度勾配がある場合には変形に対する抵抗力（せん断応力、ずり粘性）は生じる。

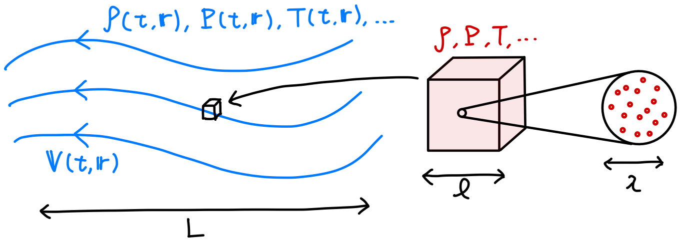


図 1: 流体力学極限で考える状況。各流体素辺内部の物理量 $(\rho, P, T, \dots)$ は一様で、それより十分大きいスケールで物理量が変化する。流体素辺は流体の構成要素（流体分子など）よりも十分に大きい。

1.2 流れの記述

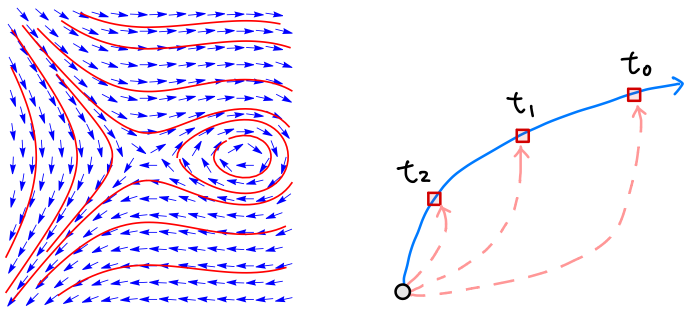
本講義では、空間に固定された座標系を用いて流体の運動を記述する**オイラー描像**を主に用いる[3]。流体はこの座標系の上を時間とともに通過していくことになる。流体の運動方程式を作るのに先立ち、まずは流体の速度に相当する**速度場**と、流れを可視化するうえで便利な**流線**を導入する。

- **速度場** $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$: オイラー描像では空間に座標系が張られているので、**ある時刻 t における各位置 $\mathbf{r}$ の流体の速度** $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ を指定すれば流体全体の速度が表される。このベクトル場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ を**速度場**と呼ぶ。

  流体中の全体に微粒子をばらまいたところを想像して、ある時刻 t の瞬間における各微粒子の速度が速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ である。

- **流線**: ある時刻 t の瞬間の速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ を考える。ある曲線で、**曲線の接線が常に速度場の方向を向いているもの**を**流線**と呼ぶ。

  ある時刻 t におけるベクトル $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ を単純につなげていったときに描かれる曲線で、ベクトル場である速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の積分曲線に相当する。流線は各時刻 t ごとに定められる。



(a) 速度場、流線　(b) 流跡線、流脈線

図 2: (a) 速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$（青色の矢印）と、それに対応する流線（赤色の曲線）の例。(b) 基準点（黒点）から時刻 $t = t_0 < t_1 < t_2$ に出た各流体素辺（赤四角）の軌道（赤点線）を流跡線、基準点から一定時間流し続けた流体素辺全体がなす曲線（青線）を流脈線と呼ぶ。

[流線の定義式] 流線の位置を $(x(\ell), y(\ell), z(\ell))$ と指定する。ただし、ℓ は曲線に沿って測った距離で

$$dl^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.2}$$

を満たす。この式を書き換えると、曲線の接ベクトル $d\mathbf{r}(\ell)/d\ell$ は単位ベクトルとなることがわかる：

$$\frac{d\mathbf{r}(\ell)}{d\ell} \cdot \frac{d\mathbf{r}(\ell)}{d\ell} = 1 \ . \tag{1.3}$$

[3] ある流体素辺の運動に注目した場合に得られる**ラグランジュ描像**もあるが、必要に応じて今後導入する。

流線の定義からして、この接ベクトルは速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の方向を向いている。したがって

$$\frac{d\mathbf{r}(\ell)}{d\ell} = \frac{\mathbf{v}(t, \mathbf{r})}{|\mathbf{v}(t, \mathbf{r})|} \,. \tag{1.4}$$

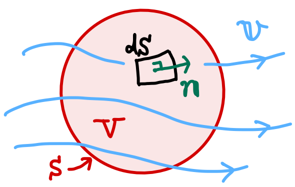
すなわち、速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の長さを単位ベクトルに直したものを用意しておき、ある点から出発してそのベクトル場の方向に線を引いていけば流線が得られる。

[**流線の解釈**] 流線は一見わかりやすい定義なのだが、**速度場が時間変化する場合は実際の流れと対応しない**ので注意が必要である。

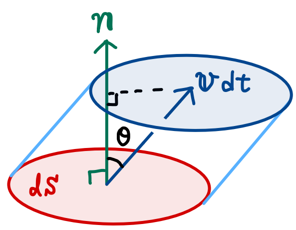
- 速度場が時間に依存しない**定常流の場合、流線は実際の流体の軌道と一致する。**
  ($\because$) この場合、速度場は $\mathbf{v}(t, r) = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ で、また流体中のある素辺の軌道 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ は
  $$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}\big(t, \mathbf{r}(t)\big) = \mathbf{v}\big(\mathbf{r}(t)\big) \tag{1.5}$$
  となる。$d\ell = |\mathbf{v}|dt$ となることに気を付けると、この式は流線の式 (1.3) と一致する。
- **速度場が時間に依存する場合、流線と流体の軌道は一致しない。**
  流線はある時刻 $t = t_0$ の速度場 $\mathbf{v}(t_0, \mathbf{r})$ に接する曲線である一方、流体の軌道は
  $$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}\big(t, \mathbf{r}(t)\big) \neq \mathbf{v}(t_0, \mathbf{r}) \tag{1.6}$$
  のように、各時刻 t における速度場 $\mathbf{v}\big(t, \mathbf{r}(t)\big)$ に接している。$\mathbf{v}$ が時間依存する場合にはこれらは一致しない。
- **流跡線・流脈線**: 流体の運動を描き表す曲線として、流線以外にも**基準点から出たある微粒子の軌道を描いた曲線である流跡線**（図 2b の赤線)、**基準点から一定時間流し続けた微粒子全体が作る曲線である流脈線**（図 2b の青線）がある。速度場が時間に依存しない場合はどちらも流線と一致し、そうでない場合は一般に一致しない。流脈線はいわゆる「墨流し」をした際に得られる曲線である。

1.3 連続の方程式

質点の運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ には粒子の質量 m があらわれるが、流体でこれに相当するのは流体の密度 $\rho(t, \mathbf{r})$、ないしある体積 ΔV の流体素辺の質量 $\rho\Delta V$ である。密度は流体の運動に伴って変化するが、ある流体素辺が持つ質量自体はもちろん保存する。この**流体素辺の質量保存則**に相当する**連続の式**を導入する。



(a) 領域 V を通る流体



(b) dS を通る流体

図 3: (a) 領域 V を通過する速度 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の流体。(b) 表面の素辺 dS を時間 dt あたりに通過する流体。

まず、ある領域 V（図 3 参照）に含まれる流体（密度 $\rho(t,\mathbf{r})$）の質量 $M(t)$ は

$$M(t) = \int_V \rho(t,\mathbf{r})dV \ . \tag{1.7}$$

次に、領域 V の表面 S について、面積要素 dS、S に垂直で外向きの単位法線ベクトル $\mathbf{n}$, 面積要素ベクトル $d\mathbf{S} \equiv \mathbf{n}\,dS$ を導入する。微小面積 dS を通って流出する流体の体積は、図 3b からもわかる通り

$$|\mathbf{v}(t,\mathbf{r})|dS\cos\theta = \mathbf{v}(t,\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S} \ . \tag{1.8}$$

これに密度 $\rho(t,\mathbf{r})$ をかければ質量の流出分が得られる。以上を用いると、S 全体を時間 dt の間に外向きに通過する流体の質量は

$$\int_S \rho(t,\mathbf{r})\mathbf{v}(t,\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}dt = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\rho(t,\mathbf{r})\mathbf{v}(t,\mathbf{r})\big)\,dV dt \ . \tag{1.9}$$

式 (1.9) の右辺に出てくる

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.10}$$

は**ナブラ演算子**と呼ばれ、特に $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v})$ は発散 $\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})$ を表す：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = \frac{\partial\rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial\rho v_z}{\partial z} = \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) \tag{1.11}$$

また、式 (1.9) の等号はベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ についての**ガウスの定理**から従う：

$$\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r})dV \tag{1.12}$$

流体の湧き出し・吸い込みがない場合には、質量保存則が成り立ち、V 中の流体の質量 (1.7) の変化分 $dM(t)$ は表面 S を通じた流出分（のマイナス）だけで与えられる。これを式で表すと

$$dM(t) + \int_V \mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r})dVdt = 0 \ . \tag{1.13}$$

この式全体を dt で割り、式 (1.7) を使って書き換えると

$$0 = \frac{dM(t)}{dt} + \int_V \mathrm{div}\big(\rho(t,\mathbf{r})\mathbf{v}(t,\mathbf{r})\big)dV = \int_V \left[\frac{d\rho(t,\mathbf{r})}{dt} + \mathrm{div}\big(\rho(t,\mathbf{r})\mathbf{v}(t,\mathbf{r})\big)\right] dV \ . \tag{1.14}$$

ここで、この議論の最初に取った領域 V を空間内のどんな領域に取ったとしてもこの式が成立する。特に、V として地点 $\mathbf{r}$ 近傍の微小領域をとったとすると、その点で

連続の式

$$\frac{d\rho}{dt} + \mathrm{div}\big(\rho\mathbf{v}\big) = 0 \tag{1.15}$$

が成立する。これが任意の地点 $\mathbf{r}$ について成立するので、結局空間全体で式 (1.15) が成立する。これが**連続の式**と呼ばれる基礎方程式の一つで、例えば $\rho(t,\mathbf{r})$ の時間発展を決める式とみなすことができる。