

流体力学 講義ノート

棚橋典大

2022 年度後期 火曜 2 限

目次

第 1 回 導入	3
1.1 連続体・流体の力学	3
1.2 流れの記述	4
1.3 連続の方程式	5
第 2 回 オイラーの方程式	7
2.1 導出	7
2.2 完全流体の運動方程式系	11
2.3 静水圧平衡	11
第 3 回 流体の運動の例 / 運動量保存則	13
3.1 流体の運動の例: 回転流体柱	13
3.2 運動量保存則	15
第 4 回 エネルギー保存則	19
4.1 運動エネルギーの時間変化	19
4.2 内部エネルギーの時間変化	21
4.3 全エネルギーの時間変化	22
第 5 回 循環のある流れ	24
5.1 循環	24
5.2 渦線、渦管	26
5.3 ケルヴィンの渦定理	27
第 6 回 渦のない流れ	30
6.1 ヘルムホルツの定理	30
6.2 渦無し流	31
6.3 非圧縮性完全流体の流れ	34
第 7 回 非圧縮性完全流体の流れ：具体例	35
7.1 等ポテンシャル面と流線	35
7.2 ポテンシャル流の具体例	36

第 8 回	具体例：物体の周りの流れ	40
8.1	物体表面の境界条件	40
8.2	具体例：一様流中の球体	40
8.3	静止流体中で運動する球体	44
8.4	物体にかかる圧力と力	44
第 9 回	流体の波動	46
9.1	音波	46
9.2	音速	49
第 10 回	音波の性質	52
10.1	音波のエネルギー	52
10.2	球面波	55
第 11 回	水面の波：浅水波	57
11.1	設定	57
11.2	波動方程式の導出	57
11.3	波の変形	60
11.4	正弦波	61
第 12 回	水面の波：深水波	63
12.1	設定	63
12.2	運動方程式	63
12.3	正弦波解	65
12.4	深水波の特徴	67
第 13 回	群速度	69
13.1	位相速度・群速度	69
13.2	波束の群速度	71
13.3	ケルビン波	72
第 14 回	非線形波動	75
14.1	移流方程式	75
14.2	特性曲線法	76
14.3	衝撃波形成	77
14.4	理想気体の非線形波動	78

第1回 導入

1.1 連続体・流体の力学

- ニュートン力学 = 広がりのない質点の力学

物理量は質点の位置 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, 質量 m , 外力 \mathbf{F} など¹

- 連続体力学 = 広がりを持ち変形する物体（固体、流体など）の力学

- 連続体: 微視的構造を平均化して得られる平均量（位置、密度、圧力など）だけで記述できる物体。

例えば、気体のモル体積（1 mol = 6.02×10^{23} 個あたりの体積。標準状態で 22.4 l）の部分について、それに含まれる個々の粒子の力学を考える代わりに、気体の微小な一部分（流体素辺）についての平均量だけで記述する場合には連続体として扱われる。ただし、個々の流体素辺にも十分多数の粒子が含まれるとする。

個々の粒子（微視的描像）と連続体（巨視的描像）のどちらに注目するかは、どの長さスケールの物理現象に注目したいかに応じて決まる。

- * 弾性体: 外力に対して弾性的に振る舞う（外力を除いたときに元の形状に復帰する）連続体。弦・膜のような物体とその振動などを議論するのが弾性体力学。
- * 流体: 定まった形を持たず、（静止状態の時に）変形させても物体内部に弾性力が発生しない連続体。²

[流体力学極限] 流体としての記述が精度良くなるためには、注目する物理現象の長さ・時間スケール L, T が流体を構成する分子の平均自由行程・平均衝突時間 λ, τ と比べて十分大きい必要がある:

$$L \gg \lambda, \quad T \gg \tau. \quad (1.1)$$

この場合、流体素辺の大きさ l を $L \gg l \gg \lambda$ のようにとれば、以下のような状況が実現される:

- 各流体素辺は局所熱平衡に達していて、平均的物理量（密度 ρ , 温度 T , 圧力 P , 位置 $\mathbf{x}(t)$ ）だけで記述できる。
- 流体素辺よりも十分大きいスケール L では、時間・位置依存性を持った流体の運動（ $\rho(t, \mathbf{x}), P(t, \mathbf{x})$ や流速 $\mathbf{V}(t, \mathbf{x})$ など）で記述される）が存在する。

このように、各流体素辺については内部の微視的構造を粗視化して熱力学的に取り扱い、流体素辺よりもずっと大きなスケールの物理現象だけに注目する場合に成立するのが流体力学である。流体力学が成立する式 (1.1) のような状況を考えることを流体力学極限を取ると言うこともある。

流体素辺内部の物質を平均化してその微視的な運動を見ないことにする場合、微視的な粒子の運動方程式の代わりとなる方程式を新たに導入しないと流体の時間発展が決まらなくなる。流体素辺は局所熱平衡に達している場合には、素辺を特徴づける物理量 ρ, P, T を互いに関係づける状態方程式が成立する。これが微視的な運動方程式の代わりの役割を果たし、流体素辺の（力学的な）運動方程式 + 状態方程式という方程式系によって流体の時間発展が決定されることになる。今後の講義で、この流体力学の運動方程式を順次導入していく。

¹本講義ノートでは3次元ベクトルを太字で表す。例) $\mathbf{x} = (x, y, z), \mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt, \dots$

²流体でも、粘性と速度勾配がある場合には変形に対する抵抗力（せん断応力、ずり粘性）は生じる。

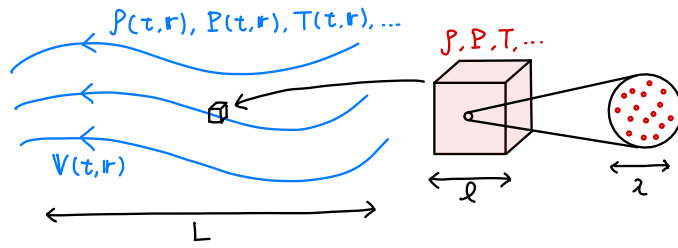


図 1: 流体力学極限で考える状況。各流体素辺内部の物理量 (ρ, P, T, \dots) は一様で、それより十分大きいスケールで物理量が変化する。流体素辺は流体の構成要素 (流体分子など) よりも十分に大きい。

1.2 流れの記述

本講義では、空間に固定された座標系を用いて流体の運動を記述するオイラー描像を主に用いる³。流体はこの座標系の上を時間とともに通過していくことになる。流体の運動方程式を作るのに先立ち、まずは流体の速度に相当する速度場と、流れを可視化するうえで便利な流線を導入する。

- **速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$** : オイラー描像では空間に座標系が張られているので、ある時刻 t における各位置 \mathbf{r} の流体の速度 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ を指定すれば流体全体の速度が表される。このベクトル場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ を速度場と呼ぶ。

流体中の全体に微粒子をばらまいたところを想像して、ある時刻 t の瞬間における各微粒子の速度が速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ である。

- **流線**: ある時刻 t の瞬間の速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ を考える。ある曲線で、曲線の接線が常に速度場の方向を向いているものを流線と呼ぶ。

ある時刻 t におけるベクトル $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ を単純につなげていったときに描かれる曲線で、ベクトル場である速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の積分曲線に相当する。流線は各時刻 t ごとに定められる。

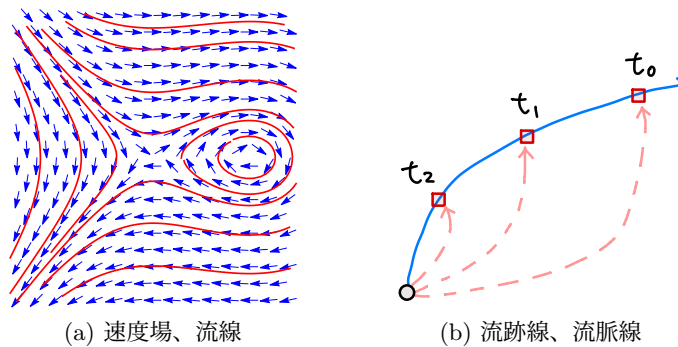


図 2: (a) 速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ (青色の矢印) と、それに対応する流線 (赤色の曲線) の例。(b) 基準点 (黒点) から時刻 $t = t_0 < t_1 < t_2$ に出た各流体素辺 (赤四角) の軌道 (赤点線) を流跡線、基準点から一定時間流し続けた流体素辺全体がなす曲線 (青線) を流脈線と呼ぶ。

[流線の定義式] 流線の位置を $(x(\ell), y(\ell), z(\ell))$ と指定する。ただし、 ℓ は曲線に沿って測った距離で

$$d\ell^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.2)$$

を満たす。この式を書き換えると、曲線の接ベクトル $d\mathbf{r}(\ell)/d\ell$ は単位ベクトルとなることがわかる:

$$\frac{d\mathbf{r}(\ell)}{d\ell} \cdot \frac{d\mathbf{r}(\ell)}{d\ell} = 1. \quad (1.3)$$

³ある流体素辺の運動に注目した場合に得られるラグランジュ描像もあるが、必要に応じて今後導入する。

流線の定義からして、この接ベクトルは速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の方向を向いている。したがって

$$\frac{d\mathbf{r}(\ell)}{d\ell} = \frac{\mathbf{v}(t, \mathbf{r})}{|\mathbf{v}(t, \mathbf{r})|}. \quad (1.4)$$

すなわち、速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の長さを単位ベクトルに直したものを用意しておき、ある点から出発してそのベクトル場の方向に線を引いていけば流線が得られる。

[流線の解釈] 流線は一見わかりやすい定義なのだが、速度場が時間変化する場合は実際の流れと対応しないので注意が必要である。

- 速度場が時間に依存しない定常流の場合、流線は実際の流体の軌道と一致する。
(\therefore) この場合、速度場は $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ で、また流体中のある素辺の軌道 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ は

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t)) = \mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) \quad (1.5)$$

となる。 $d\ell = |\mathbf{v}|dt$ となることに気を付けると、この式は流線の式 (1.3) と一致する。

- 速度場が時間に依存する場合、流線と流体の軌道は一致しない。
流線はある時刻 $t = t_0$ の速度場 $\mathbf{v}(t_0, \mathbf{r})$ に接する曲線である一方、流体の軌道は

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t)) \neq \mathbf{v}(t_0, \mathbf{r}) \quad (1.6)$$

のように、各時刻 t における速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t))$ に接している。 \mathbf{v} が時間依存する場合にはこれらは一致しない。

- 流跡線・流脈線: 流体の運動を描き表す曲線として、流線以外にも基準点から出たある微粒子の軌道を描いた曲線である流跡線 (図 2b の赤線)、基準点から一定時間流し続けた微粒子全体が作る曲線である流脈線 (図 2b の青線) がある。速度場が時間に依存しない場合はどちらも流線と一致し、そうでない場合は一般に一致しない。流脈線はいわゆる「墨流し」をした際に得られる曲線である。

1.3 連続の方程式

質点の運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ には粒子の質量 m があらわれるが、流体でこれに相当するのは流体の密度 $\rho(t, \mathbf{r})$ 、ないしある体積 ΔV の流体素辺の質量 $\rho\Delta V$ である。密度は流体の運動に伴って変化するが、ある流体素辺が持つ質量自体はもちろん保存する。この流体素辺の質量保存則に相当する連続の式を導入する。

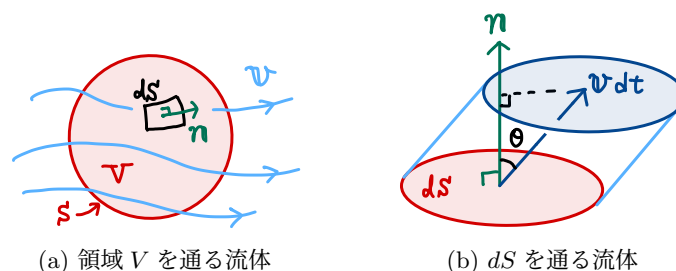


図 3: (a) 領域 V を通過する速度 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の流体。(b) 表面の素辺 dS を時間 dt あたりに通過する流体。

まず、ある領域 V (図 3 参照) に含まれる流体 (密度 $\rho(t, \mathbf{r})$) の質量 $M(t)$ は

$$M(t) = \int_V \rho(t, \mathbf{r}) dV . \quad (1.7)$$

次に、領域 V の表面 S について、面積要素 dS 、 S に垂直で外向きの単位法線ベクトル \mathbf{n} 、面積要素ベクトル $d\mathbf{S} \equiv \mathbf{n} dS$ を導入する。微小面積 dS を通って流出する流体の体積は、図 3b からわかる通り

$$|\mathbf{v}(t, \mathbf{r})| dS \cos \theta = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} . \quad (1.8)$$

これに密度 $\rho(t, \mathbf{r})$ をかければ質量の流出分が得られる。以上を用いると、 S 全体を時間 dt の間に外向きに通過する流体の質量は

$$\int_S \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} dt = \int_V \nabla \cdot (\rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r})) dV dt . \quad (1.9)$$

式 (1.9) の右辺に出てくる

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.10)$$

はナブラ演算子と呼ばれ、特に $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ は発散 $\text{div}(\rho \mathbf{v})$ を表す：

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = \text{div}(\rho \mathbf{v}) \quad (1.11)$$

また、式 (1.9) の等号はベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ についてのガウスの定理から従う：

$$\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV \quad (1.12)$$

流体の湧き出し・吸い込みがない場合には、質量保存則が成り立ち、 V 中の流体の質量 (1.7) の変化分 $dM(t)$ は表面 S を通じた流出分 (のマイナス) だけで与えられる。これを式で表すと

$$dM(t) + \int_V \text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV dt = 0 . \quad (1.13)$$

この式全体を dt で割り、式 (1.7) を使って書き換えると

$$0 = \frac{dM(t)}{dt} + \int_V \text{div}(\rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r})) dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \text{div}(\rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r})) \right] dV . \quad (1.14)$$

ここで、この議論の最初にとった領域 V を空間内のどんな領域にとったとしてもこの式が成立する。特に、 V として地点 \mathbf{r} 近傍の微小領域をとったとすると、その点で

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.15)$$

が成立する。これが任意の地点 \mathbf{r} について成立するので、結局空間全体で式 (1.15) が成立する。これが連続の式と呼ばれる基礎方程式の一つで、例えば $\rho(t, \mathbf{r})$ の時間発展を決める式とみなすことができる。

第2回 オイラーの方程式

前回の講義では、流体（素辺）の質量保存則に対応する連続の式を導出し、それが密度分布 $\rho(t, \mathbf{r})$ の時間微分を与える式であることを説明した。

今回は、流体の運動方程式の一つであるオイラーの方程式を導出し、速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の時間微分を与える式であることを見る。点粒子についてのニュートンの運動方程式は点粒子の加速度に質量をかけたもの、もしくは運動量の時間微分を与える式と見ることができる：

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}(t)) = \mathbf{F}. \quad (2.1)$$

オイラーの方程式は、流体（素辺）についてこの式を立てたものに相当する。

2.1 導出

導出にあたり、前回と同様に空間に固定された座標系 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を使い、偏微分 $\partial/\partial x, \dots$ はこの座標についての微分とする。また、 $\partial/\partial t$ はある（固定された）点 \mathbf{r} における時間微分とする。

一方、空間に固定された領域中の流体に注目した前回と異なり、今回はある流体素辺に注目して式を立てることにする⁴。この流体素辺を広がりを持った点粒子のようなものと考え、点粒子についてのニュートンの運動方程式 (2.1) との対応が少し見やすくなる。

2.1.1 流体素辺の運動量変化

式 (2.1) のような運動量とその時間変化についての式を立てるにあたり、まずはある流体素辺に注目して、その速度の時間変化を記述する必要がある。

速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ を持つ流体中のある流体素辺（位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ）に注目する。この流体素辺のある時刻 t からその少し後の時刻 $t + \Delta t$ までの運動について、以下で順を追って調べてみる（図 4 参照）。

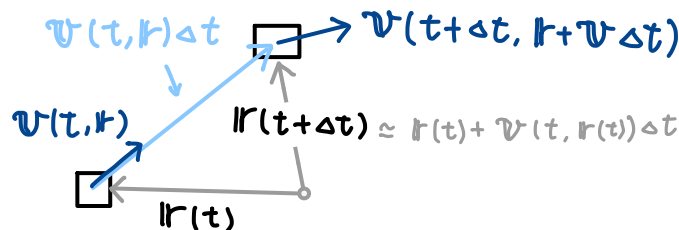


図 4: 流体素辺の位置・速度変化。

- **流体素辺の位置:** 時刻 t における流体素辺の速度は $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t))$ なので、その後の時刻 $t + \Delta t$ における位置は⁵

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t)) \Delta t. \quad (2.2)$$

- **流体素辺の速度:** 流体素辺の位置が動いたことで、その速度には時間経過による変化と位置のずれによる変化が生じる。これを見るために、時刻 $t + \Delta t$ における流体素辺の速度 $\mathbf{v}(t + \Delta t, \mathbf{r}(t + \Delta t))$

⁴前回と同様に、空間に固定された領域内に含まれる流体ととその表面からの流出量を計算しても全く同じ結果が得られる。

⁵より厳密には、速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の時間・空間依存性が原因で、式 (2.2) の右辺には $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ 程度の大きさの誤差項がつく。今回の導出では Δt について一次の項だけに注目するので、簡単のため誤差項については単に書かないことにする。

を微小量 Δt について1次までテイラー展開する。ただし、引数に含まれる $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ については式 (2.2) を使って書き換えておく。

$$\mathbf{v}(t + \Delta t, \mathbf{r}(t + \Delta t)) \simeq \mathbf{v}(t + \Delta t, \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t))\Delta t) \quad (2.3)$$

$$= \mathbf{v}(t + \Delta t, x(t) + v_x \Delta t, y(t) + v_y \Delta t, z(t) + v_z \Delta t) \quad (2.4)$$

$$= \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t)) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z \Delta t \quad (2.5)$$

$$= \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t)) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Delta t + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v} \Delta t \quad (2.6)$$

$$= \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t)) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) \Delta t. \quad (2.7)$$

ただし、途中式に出てくる v_i ($i = x, y, z$) や偏微分 $\partial \mathbf{v} / \partial t, \dots$ は全て初期位置・初期時刻 $(t, \mathbf{r}(t))$ における値である。

式 (2.7) の右辺の第二項が、ある流体素辺に注目した場合の (ある流体素辺に乗って測った) 速度の変化分である。この変化分を使って、ある流体素辺についての速度の時間微分を新たに $D\mathbf{v}/Dt$ と定義すると

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t, \mathbf{r}(t + \Delta t)) - \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t))}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right] \mathbf{v}. \quad (2.8)$$

先ほどと同様、右辺に現れる偏微分は初期時刻・初期位置 $(t, \mathbf{r}(t))$ における値である。

式 (2.8) で定義される $D\mathbf{v}/Dt$ の特徴は、単なる時間微分 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ に加えて、流体素辺の移動に伴って生じる移流項 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ が入ってくることである。この、ある流体素辺に乗った観測者から見た時間微分 $D\mathbf{v}/Dt$ はラグランジュ微分や物質微分などと呼ばれる。

- **流体素辺の運動量:** ある流体素辺の体積を ΔV とすると、その素辺が持つ質量は $\rho \Delta V$ 、運動量は $\rho \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \Delta V$ となる。先ほど速度の変化を見たのと同じ要領で、この素辺の運動量がどのように時間変化するかを調べてみる。先ほどと同様の計算を素辺の運動量 $\rho \mathbf{v} \Delta V$ について行くと、

$$\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v} \Delta V) = \rho \Delta V \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{v} \frac{D(\rho \Delta V)}{Dt} = \rho \Delta V \frac{D\mathbf{v}}{Dt}. \quad (2.9)$$

ここで、流体素辺の境界は流体とともに運動するため、流体素辺の境界からの流体の流出はゼロで、そのため質量 $\rho \Delta V$ の時間微分 $D(\rho \Delta V)/Dt$ はゼロであることを使った。

2.1.2 流体素辺にかかる力

点粒子についての運動方程式 (2.1) は点粒子の運動量の時間変化 = 点粒子にかかる力 ということの意味している。流体素辺についてもこの法則は成り立つので、前節で調べた運動量変化は流体素辺にかかる力に等しくなるはずである。そこで、今度は流体素辺にかかる力がどのように与えられるかを調べてみる。

- **体積力:** 流体素辺に全体に直接かかる力。質量に比例してかかる重力や、もし流体が電荷を帯びていればその電荷に比例してかかる電気力などが例として挙げられる。
- **面積力:** 流体素辺の表面にかかる力。隣接する流体素辺同士の間で働く力。流体の圧力 (勾配) や粘性 (の一部) から生じる力がこれに相当する。

今回の講義では、簡単のため流体の粘性がゼロ（完全流体、理想流体と呼ぶ）の場合に注目し、流体にかかる重力と圧力勾配から生じる力だけについて考える。

[重力] 流体素辺の体積を $\rho\Delta V$ 、重力加速度を \mathbf{g} （長さ $|\mathbf{g}|$ が重力加速度の大きさに等しい鉛直下向きの定数ベクトル）とする。この場合、素辺にかかる重力は $\rho\Delta V \mathbf{g}$ となる。

[圧力勾配力] 流体中に圧力勾配（圧力の空間的変化）があると、その流体中の体積 ΔV の素辺には圧力勾配の逆向きの力 $-\nabla P \Delta V$ がかかる。以下では、これを2通りの方法で導出する。

<導出 1: 直接計算>

図5のように、座標原点に頂点を持ち、各辺が x, y, z 軸向きに $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ の微小な長さを持つ立方体状の流体素辺を考える。この素辺の各面にかかる圧力の合計を計算する。

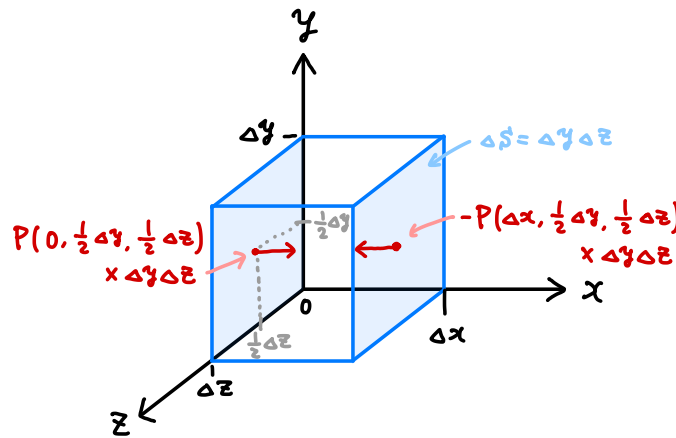


図 5: 流体素辺の外部の圧力が流体素辺に及ぼす力。

まず、以下の2点に留意する。

- パスカルの法則: ある微小な面にかかる圧力は、面の垂直方向にかかり、その大きさは面積だけに比例して向きには依存しない。今回は素辺の外部から内向きにかかる圧力を考える。
- 流体素辺は微小であるので、各面にかかる圧力をその面の中心における値で近似する。

(x 軸方向の力) $x = 0$ 面（面積 = $\Delta y \Delta z$ ）にかかる力は、 x 軸向きの力を正とすると

$$P\left(0, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right) \Delta y \Delta z . \tag{2.10}$$

同様に、 $x = \Delta x$ 面にかかる力は、 x 軸の負の向きを向いており

$$-P\left(\Delta x, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right) \Delta y \Delta z . \tag{2.11}$$

したがって、素辺にかかる x 軸方向の力の合計は

$$P\left(0, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right) \Delta y \Delta z - P\left(\Delta x, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right) \Delta y \Delta z \tag{2.12}$$

$$= -\frac{1}{\Delta x} \left[P\left(\Delta x, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right) - P\left(0, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right) \right] \Delta x \Delta y \Delta z \tag{2.13}$$

$$\simeq -\frac{\partial P}{\partial x} \left(0, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z\right) \Delta x \Delta y \Delta z \tag{2.14}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} (0,0,0) + \mathcal{O}(\Delta y, \Delta z)$$

$$\simeq -\frac{\partial P}{\partial x} (0, 0, 0) \Delta x \Delta y \Delta z . \tag{2.15}$$

すなわち、 x 軸方向にかかる力は $-\partial P/\partial x$ (の原点での値) に素辺の体積 $\Delta x\Delta y\Delta z$ をかけたもので与えられる。

(圧力勾配力の 3 次元成分) y, z 軸方向についても上記と同じ計算によって圧力からくる力が計算できる。それらをまとめると、圧力が素辺に及ぼす力の 3 次元成分は

$$-\underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}\right)}_{=\nabla P} \underbrace{\Delta x\Delta y\Delta z}_{=\Delta V} = -\nabla P \Delta V . \quad (2.16)$$

この力は圧力 P の勾配 $\text{grad}P = \nabla P$ に比例するため、**圧力勾配力**と呼ばれる⁶。

<導出 2: ガウスの定理>

上記の導出では、流体素辺の形状を座標軸に沿った立方体を取っていた。実は、**ガウスの定理**を使うことで、任意の形状を持つ流体素辺についても全く同じ結果が得られる。

任意の領域 V を取ったとすると、その表面 S 上の素辺 (面積 ΔS) には

$$-P \mathbf{n} dS = -P d\mathbf{S} \quad (2.17)$$

の力がかかる。ただし、 \mathbf{n} と $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ は前回の講義で導入した外向き単位法線ベクトルと面積要素ベクトルである。この力を表面 S 全体で積分すると、領域 V 中の流体にかかる力が計算できる：

$$\int_S (-P) d\mathbf{S} = - \int_V \nabla P dV . \quad (2.18)$$

この式は任意の領域 V について成立するので、微小な流体素辺にかかる力は $-\nabla P dV$ で与えられることがわかる。なお、この式の等号では、ガウスの定理から導出できる以下の公式を用いた⁷：

$$\int_S A d\mathbf{S} = \int_V (\nabla A) dV . \quad (2.21)$$

2.1.3 オイラーの方程式

ニュートンの運動方程式 (2.1) は (運動量の時間変化) = (力) というものであった⁸。流体素辺について求めた運動量の時間変化と力をそれぞれ代入すると、以下の式が得られる：

$$\rho \Delta V \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P \Delta V + \rho \Delta V \mathbf{g} . \quad (2.22)$$

⁶単位質量あたりの力、すなわち式 (2.16) を質量 $\rho \Delta V$ で割ったものを圧力勾配力と呼ぶのがより正式であるらしい。

⁷ガウスの定理

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV$$

に、 $\mathbf{B} = A \mathbf{e}_x$ (\mathbf{e}_x は x 軸向きの単位ベクトル) を代入すると

$$\int_S A \mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot (A \mathbf{e}_x) dV = \int_V \mathbf{e}_x \cdot \nabla A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial x} dV .$$

2 番目の等号では \mathbf{e}_x が定数ベクトルのため $\nabla \mathbf{e}_x = 0$ となることを使った。この式の最左辺に出てくる $\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S}$ は、3 次元ベクトル $d\mathbf{S} = (dS_x, dS_y, dS_z)$ の x 成分たる dS_x そのものである：

$$\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{e}_x \cdot (dS_x \mathbf{e}_x + dS_y \mathbf{e}_y + dS_z \mathbf{e}_z) = dS_x . \quad (2.19)$$

したがって、結局

$$\int_S A dS_x = \int_V \frac{\partial A}{\partial x} dV \quad (2.20)$$

という式が得られた。これは x, y, z の 3 成分を持つ式 (2.21) のうち x 成分そのものである。同様の計算を y, z についても行えば式 (2.21) の全成分が得られる。

⁸式 (2.1) を (質量)×(加速度)=(力) と思って流体についての式を立てても同じ結果が得られる。流体素辺の質量 $\rho \Delta V$ のラグランジュ微分がゼロであるために、式 (2.9) で $\rho \Delta V$ が微分の外側に抜けてくるのが原因。

この式の両辺を素辺の質量 $\rho\Delta V$ で割ると、以下の（外力として重力を考えた場合の）**オイラーの方程式**が得られる。

オイラーの方程式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \mathbf{g}. \quad (2.23)$$

この式の左辺を普通の偏微分で表すこともできて、以下のようになる：

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \mathbf{g}. \quad (2.24)$$

2.2 完全流体の運動方程式系

ここまでで、粘性のない完全流体について**連続の式**と**オイラーの方程式**を導出した：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \mathbf{g} \quad (2.25)$$

これらの式から ρ と \mathbf{v} の時間微分は得られるが、 P の時間微分の値が得られない。そのため、これらの方程式を時間積分して流体の運動の時間発展を定めるには、 P の時間依存性を定めるための追加の式が必要になる。

それが実現される最も簡単な場合は、流体の**状態方程式**として

$$P = P(\rho) \quad (2.26)$$

が成立し、圧力 P が密度 ρ だけの関数で与えられる場合である⁹。**等温流体** $P = C\rho$ (C : 定数), **断熱流体** $P = C\rho^\gamma$ (γ : 比熱比) などがその例として挙げられる¹⁰。式 (2.26) を式 (2.25) に代入すると

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P(\rho) + \mathbf{g} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP(\rho)}{d\rho}\nabla\rho + \mathbf{g} \quad (2.27)$$

のように ρ と \mathbf{v} だけの式になり、それらの時間微分の値および時間発展がこの2本の方程式によって定められる。つまり、状態方程式 (2.26) を持つ完全流体の運動方程式は**連続の式+オイラーの方程式+状態方程式**で与えられる。

2.3 静水圧平衡

流体の運動方程式 (2.27) の解の簡単な例として、**大気密度の高度分布**を調べてみよう。簡単のため、次の仮定を課す。

- 大気は**静的**である (= 時間依存しない)。すなわち、 $\rho = \rho(t)$ かつ $\mathbf{v} = 0$ 。
- 大気高度によらず**温度が一定の理想気体**として振る舞う。
⇒ 大気の状態方程式は $P = C\rho$ (C は定数)¹¹。

⁹式 (2.26) のような状態方程式を**バロトロピック状態方程式**、この状態方程式を持つ流体を**バロトロピック流体**と呼ぶ。語源については各自で調べられたい。

¹⁰**非圧縮性流体** $\rho = C$ (C : 定数) も状態方程式 (2.26) の一種である。この場合については今後の講義で別途扱う。

¹¹より正確には、理想気体の状態方程式 $P = (RT/\mu)\rho$ (ただし、 $R \simeq 8.3\text{ J/kg mol}$ は気体定数、 $\mu \simeq 29\text{ kg/mol}$ は大気分子量) が成立し、温度 T が一定の場合は単に $\rho \propto P$ となる。

もちろんこれらの仮定は正確ではないが、最終的に得られる解は実際の大气密度を近似的に再現することが知られている。

この場合、連続の式は自明な式（両辺が自動的にゼロ）となり、一方オイラーの方程式は

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} = -\frac{C}{\rho} \nabla \rho + \mathbf{g} \quad (2.28)$$

という式になる。ここで、密度 ρ が高度 z だけに依存すると仮定したうえで式 (2.28) の z 成分を書き下すと

$$0 = -\frac{C}{\rho(z)} (\nabla \rho(z))_z + (\mathbf{g})_z = -\frac{C}{\rho(z)} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z} - g = -C \frac{\partial}{\partial z} \log \rho(z) - g. \quad (2.29)$$

この式を z について積分することで

$$\log \rho(z) = -\frac{g}{C} z + C_0 \quad (C_0 : \text{積分定数}) \quad \therefore \rho(z) = e^{C_0} e^{-\frac{g}{C} z}. \quad (2.30)$$

すなわち、**大气密度 $\rho(z)$ は高度 z について指数関数的に減少**することが示された。状態方程式は $P = C \rho$ だったので、大气圧力 $P(z)$ も同様の振る舞いをする。この結果は高度およそ 15000 m までの大气の密度・圧力分布をある程度精度よく再現するそうである¹²。

¹² 出典：恒藤俊彦「弾性体と流体」（岩波書店） 3-1 節

第3回 流体の運動の例 / 運動量保存則

前回は、粘性のない完全流体の運動方程式であるオイラーの方程式を導出し、これと連続の式および状態方程式を組み合わせることで流体の運動の時間発展が定められることを説明した。今回は、流体の運動方程式の復習と、これらの方程式を解く練習を兼ねて、簡単な流体の運動の例を紹介する。また、前回の講義でも一部説明したが、流体についての運動量保存則がどのように与えられるかを見る。

3.1 流体の運動の例: 回転流体柱

図6のように、一定の角速度 Ω で全体が回転（剛体回転）している流体の柱で、回転軸が重力の向きに沿っているものを考える。また、簡単のため、この流体は非圧縮性で密度が常に一定であると仮定する¹³。例えば、円筒の容器に水を入れ、容器と水の全体が一定の角速度で回っている場合がこのようなセットアップに相当する。

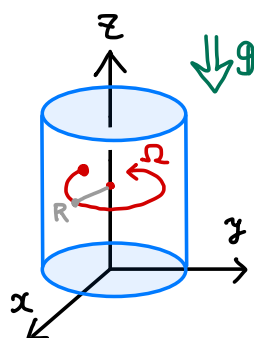


図6: 重力場中で円柱状の容器とともに剛体回転する流体柱。

3.1.1 復習: 流体の運動方程式

今回は非圧縮性流体で粘性の影響を無視できる場合について考えるので、流体の運動は以下の方程式系に従う:

$$\text{連続の式: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\text{オイラーの方程式: } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} \quad (3.2)$$

$$\text{状態方程式: } \rho = \rho_0 \text{ (一定)} \quad (3.3)$$

[流体の位置] 流体柱が角速度 Ω で回転するので、その中の流体素辺の位置 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\Omega t + \phi_0) \\ R \sin(\Omega t + \phi_0) \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

ただし、 R は回転軸から測った半径で、 ϕ_0, z_0 は流体素辺の初期位置に対応する定数。

¹³このセットアップでは、流体が変形しないまま運動するため、流体に粘性がある（完全流体でない）場合でも粘性は流体の運動に影響を与えない。そのため、完全流体について成立するオイラーの方程式を使って正しい結果が得られる。

[流体の速度] 式 (3.4) を時間微分すれば流体素辺の速度が得られる。

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial t} = \begin{pmatrix} -R\Omega \sin(\Omega t + \phi_0) \\ R\Omega \cos(\Omega t + \phi_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega y(t) \\ \Omega x(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

したがって、(流体素辺の集合全体が作る) 流体の速度場 \mathbf{v} は

$$\mathbf{v} = (-\Omega y, \Omega x, 0). \quad (3.6)$$

この速度場は位置 x, y, z だけに依存し、時間 t には依存しない¹⁴。

[連続の式]

では、流体の運動方程式 (3.1), (3.2) が上記の速度場 \mathbf{v} に対してどのような式になるかを順次見ていく。まず、連続の式 (3.1) は、密度 $\rho = \rho_0$ が定数であることから

$$\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.7)$$

と、速度場の発散 $\text{div } \mathbf{v}$ がゼロという式になる。実際、式 (3.6) の速度場 \mathbf{v} はこの式を満たす¹⁵。

物理的には、 $\text{div } \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow$ (流体を注入する蛇口のような) 流体の湧き出しがない ということを意味する。実際、今回考えている流体中は剛体回転しているだけで、流体はいたるところ増加も減少もしていない。

[オイラーの方程式]

次に、オイラーの方程式 (3.2) について調べる。まず、 \mathbf{v} が時間に依存せず、また密度が一定で $\rho = \rho_0$ という設定に留意して式を整理すると

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \mathbf{g}. \quad (3.8)$$

この式の左辺を式 (3.6) の速度場について評価すると (ただし $\partial_x \equiv \partial/\partial x, \dots$ と略記する)

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \Omega (-y \partial_x + x \partial_y) \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \Omega^2 \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

特に、この x, y 成分は単に $-\Omega^2 R$ (R : 回転半径) と書くことができ、回転軸方向を向く大きさ $\Omega^2 R$ のベクトルとなっている。これは、単位質量当たりの向心力 (回転運動に伴う加速度) そのものである。

式 (3.9) を使うと、式 (3.8) を圧力 P についての式に書き換えられる。鉛直下向きにかかる重力加速度のベクトルを $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ と書くと

$$\nabla P = \begin{pmatrix} \partial_x P \\ \partial_y P \\ \partial_z P \end{pmatrix} = \rho_0 [-(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{g}] = \rho_0 \begin{pmatrix} \Omega^2 x \\ \Omega^2 y \\ -g \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \rho_0 \Omega^2 x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho_0 \Omega^2 y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_0 g. \quad (3.11)$$

式 (3.11) は式 (3.10) の x, y, z 成分をそれぞれ書き下したものだ。これらを微分方程式として解くことで P の関数形を定めることができる。今回は、系の軸対称性があらわにあらわに見えるようにするため円筒座標系 (r, ϕ, z) :

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = z \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \phi = \frac{y}{x} \quad (3.12)$$

¹⁴式 (3.6) のような速度場が時間的に一定である流れのことを定常流と呼ぶのであった。

¹⁵式 (3.6) の \mathbf{v} について $\text{div } \mathbf{v} = 0$ となることは以下の通り示される。

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial(-\Omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\Omega x)}{\partial y} = 0.$$

を使ってこれらの式を解いてみる。

式 (3.11) について (第1式) $\times x +$ (第2式) $\times y$ を書き下すと

$$x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} = \rho_0 \Omega^2 (x^2 + y^2) = \rho_0 \Omega^2 r^2 . \quad (3.13)$$

ここで、左辺は実は以下のように書き換えられる：

$$x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} = r \frac{\partial P}{\partial r} . \quad (3.14)$$

(\because) 左辺を書き換えて右辺を作ろうとすると若干難儀するが、右辺が左辺に等しいことを確認するのは比較的簡単である。円筒座標系の定義式 (3.12) と微分の連鎖律を使うと

$$r \frac{\partial P}{\partial r} = r \left(\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial z}} \right) \quad (3.15)$$

$$= r \left(\frac{\partial(r \cos \phi)}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial(r \sin \phi)}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (3.16)$$

$$= r \left(\cos \phi \frac{\partial P}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (3.17)$$

$$= x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} . \quad (3.18)$$

したがって、式 (3.13) は

$$r \frac{\partial P}{\partial r} = \rho_0 \Omega^2 r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial r} = \rho_0 \Omega^2 r . \quad (3.19)$$

この式を r について積分することで

$$P(r, \phi, z) = \frac{1}{2} \rho_0 \Omega^2 r^2 + C(\phi, z) . \quad (3.20)$$

ただし $C(\phi, z)$ は r 積分した際に生じた積分定数。ここで、今考えている系は軸対称性を持つので、圧力 P も角度座標 ϕ には依存せず、したがって $C(\phi, z) = C(z)$ となる¹⁶。また、式 (3.13) の第3式にこれを代入すると

$$\frac{\partial P(r, \phi, z)}{\partial z} = \frac{\partial C(z)}{\partial z} = -\rho_0 g \quad \Leftrightarrow \quad C(z) = -\rho_0 g z + P_0 . \quad (3.21)$$

ただし、 P_0 は積分定数。結局、圧力 $P(r, \phi, z)$ は

$$P(r, \phi, z) = \rho_0 \Omega^2 r^2 - \rho_0 g z + P_0 \quad (3.22)$$

流体の遠心力がかかるため外側 (r が大) の方が圧力が大きく ($\rho_0 \Omega^2 r^2$ 項の寄与)、また重力のために深い地点 (z が小) ほど水圧が大きくなっている ($-\rho_0 g z$ 項の寄与)。

3.2 運動量保存則

前回の講義でも軽く説明したが、ニュートンの運動方程式は

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}) \quad (3.23)$$

¹⁶式 (3.13) を組み合わせて円筒座標系で書き直すことで

$$\frac{\partial P}{\partial \phi} = \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) P = 0$$

となり、この式から $P(r, \phi, z)$ が ϕ に依存しないことを見ることもできる。

のように運動量の時間変化を表す式 (運動量の流出入も考慮に入れた場合の**運動量保存則**) と見ることが出来る。これと同様に、流体についての**オイラーの方程式も運動量保存則**であることがあらわになるように書き直すことができる。

この書き直しを行う際に、**連続の式**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.24)$$

を参考にする。この式の各項の物理的な意味は

- 第1項 $\partial_t \rho$: 現在注目している領域 V の流体の密度の時間変化。
- 第2項 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$: **質量密度の流れ**を表すベクトル $\rho \mathbf{v}$ の発散 $\text{div}(\rho \mathbf{v})$ 。

ガウスの定理を通じて、この項は V の表面 S を通じた**質量密度の流出** $\int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ の形に書ける。

質量密度が勝手に増大・減少せず**質量保存則が成立**する場合は、これら2つの和は常にゼロに等しくなる。この意味で、**連続の式は質量保存則を書き換えたもの**とみなすことができる。オイラーの方程式を書き換える際も、式 (3.24) のように

$$\partial_t(\text{運動量密度}) + \nabla \cdot (\text{運動量流}) = 0 \quad (3.25)$$

の形に表すことを目指す¹⁷。

3.2.1 オイラーの方程式の再導出

前回の講義のある運動する流体素辺に注目して (ラグランジュ描像で) オイラーの方程式を導出したが、今回は空間に固定された領域中の流体に注目して (オイラー描像で) 導出する。特に、その領域中に含まれる**流体の運動量**とその変化に注目する。

まず、**流体の運動量密度**を表すベクトル $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$:

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \equiv \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \quad (3.26)$$

を使うと、ある領域 V 中に含まれる**全運動量** $\mathbf{J}(t)$ は

$$\mathbf{J}(t) = \int_V \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) dV . \quad (3.27)$$

この**全運動量の時間変化** $d\mathbf{J}(t)/dt$ は、以下の要因によって引き起こされる:

1. 領域 V の表面 S を通じた**流体の流出入**
2. 表面 S にかかる**圧力**
3. 流体そのものにかかる**体積力** (重力など)

このそれぞれの表式を以下で導出する。

1. 領域 V の表面 S を通じた**流体の流出**:

まず、表面 S の微小部分 dS を通じて流出する流体の量は $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ である。この流出分の流体に含まれる運動量は

$$\mathbf{j}(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) . \quad (3.28)$$

したがって、単位時間あたりに表面 S 全体から流出する運動量の合計は

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) \quad \Leftrightarrow \quad \int_S j_i(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) \quad (i = x, y, z) . \quad (3.29)$$

¹⁷ただし、後述するように流体に外力 (体積力) がかかる場合には右辺にその寄与が入ってくる。

この式の $i = x, y, z$ 各成分についてガウスの定理を適用すると

$$\int_S j_i (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) = \int_V \operatorname{div} (j_i \mathbf{v}) dV = \int_V \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial}{\partial x_j} (j_i v_j) dV \quad (i = x, y, z). \quad (3.30)$$

この式が正（負）のとき、領域 V から運動量密度が流出（流入）している。

2. 表面 S にかかる**圧力**、3. 流体そのものにかかる**体積力**（重力など）：

今回は、簡単のため体積力として**重力** \mathbf{g} だけ考える¹⁸。前回の講義で、ある流体素辺にかかる圧力と重力の合計値を計算し、その結果として

$$\int_V (-\nabla P + \rho \mathbf{g}) dV \quad \Leftrightarrow \quad \int_V \left(-\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i \right) dV \quad (i = x, y, z) \quad (3.31)$$

となることを示した。領域 V 中の運動量は単位時間あたりこの値の分だけ変化する。

以上の結果を踏まえて運動量 $\int_V j_i dV$ ($i = x, y, z$) の時間変化を表す式を書き下すと、以下のようになる：

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V j_i dV}_{\text{運動量の時間変化}} = \int_V \frac{\partial j_i}{\partial t} dV = - \underbrace{\int_V \operatorname{div} (j_i \mathbf{v}) dV}_{\text{運動量流出}} + \underbrace{\int_V \left(-\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i \right) dV}_{\text{流体にかかる力}} \quad (i = x, y, z) \quad (3.32)$$

この式が任意の領域 V について成立するので、結局

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} = -\operatorname{div} (j_i \mathbf{v}) - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (3.33)$$

$$= - \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial}{\partial x_j} (j_i v_j) - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (i = x, y, z). \quad (3.34)$$

計算は省略するが、**連続の式 (3.1)** を使ってこの式を整理すると**オイラーの方程式 (3.2)**（に ρ をかけた式）が得られる。

3.2.2 運動量保存則の式

式 (3.34) の右辺第 2 項を $\partial/\partial x_i$ ではなく $\partial/\partial x_j$ で表すように書き換えると

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial}{\partial x_j} (P \delta_{ij}). \quad (3.35)$$

ただし、 δ_{ij} は**クロネッカーのデルタ記号**で

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}. \quad (3.36)$$

この書き換えを行った後、 \mathbf{g} 項以外を左辺に移行し式を整理すると

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial}{\partial x_j} (j_i v_j + P \delta_{ij}) = \rho g_i. \quad (3.37)$$

ここで、**運動量流テンソル** Π_{ij} を¹⁹

$$\Pi_{ij} = j_i v_j + P \delta_{ij} = \rho v_i v_j + P \delta_{ij} \quad (i, j = x, y, z) \quad (3.38)$$

¹⁸重力だけでなく、一般の体積力についてもまったく同じ式が成立する。

¹⁹運動量密度の流れのテンソルと呼ぶ方が本当はより正確だが、簡単のためこのように呼ぶことにする。

と定義すると、式 (3.37) は

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial}{\partial x_j} \Pi_{ij} = \rho g_i \quad (3.39)$$

となる。この式の特徴は下記の通り。

- **運動量流テンソル Π_{ij} の物理的解釈：**

Π_{ij} の ij 成分は、**単位時間あたりに第 j 方向に流れる運動量の第 i 成分 p_i の量**を表す。

例えば、 Π_{ij} の第一項 $\rho v_i v_j = j_i v_j$ はちょうど運動量密度 $\rho v_i = j_i$ が速度 v_j で流れている状態を表している。

また、圧力はある面について垂直方向に働くため、その面を通じて流れる運動量の向きは面の垂直方向で、なおかつ運動量の流れる向きも同じく面の垂直方向になるという性質がある。この性質に対応して、 Π_{ij} の圧力項はクロネッカーデルタ δ_{ij} (単位行列に相当) に比例している²⁰。

- **保存形の式：**

式 (3.37) の左辺は、本節冒頭で予告した通り

$$\partial_t(\text{運動量密度}) + \nabla \cdot (\text{運動量流}) \quad (3.41)$$

という形をしており、特に外力 (今回の場合は重力 \mathbf{g}) がゼロの時は (左辺)=0 という式になる。第2項 (div(運動量流)) が運動量密度の流出量に対応することなどから、この式は**運動量保存則**を表すものと解釈できる。

式 (3.37) を含め、式 (3.41) のような形を持つ方程式を**保存形** (もしくは**流束形式**) の式と呼ぶ。流体にかかる \mathbf{g} などの外力 (体積力) がある場合には式 (3.37) の右辺に入ってくるが、これはその外力による運動量の注入量を表している。

²⁰流体が粘性を持つ場合 (で、特に流体が Newton 流体という種類の場合) には、流体に粘性由来の力がかかるために Π_{ij} に追加の項が生じて

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j + P \delta_{ij} - \lambda (\text{div} \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} - \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.40)$$

となる。 μ は粘性率、 λ は第二粘性率と呼ばれる。この Π_{ij} を式 (3.39) に代入したものは、**粘性流体についての運動方程式であるナヴィエーストークス方程式**と呼ばれる。

第4回 エネルギー保存則

前回の講義では、流体が満たす運動方程式を**運動量保存則**と解釈できることを説明した。今回は、流体の**エネルギー保存則**に注目してみる。

点粒子に外力 \mathbf{F} がかかっている場合についてのエネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (4.1)$$

とあらわされる。左辺は粒子の運動エネルギーで、右辺は外力による仕事 (=エネルギー変化量) に相当する。流体についてももちろんエネルギー保存則が成立するが、最初の講義で説明したとおり**各流体素辺について粗視化**を行うために、流体を構成する個々の粒子のエネルギーが直接は式に出てこなくなる代わりに、流体素辺に含まれる流体の**内部エネルギー**を考慮に入れる必要が出てくる。この点に注意しつつ、流体のエネルギー保存則がどのように与えられるかを見ていくことにする。

[設定] 簡単のため、以下の仮定をおく。

- **完全流体**、すなわち粘性のない流体について考える。粘性が原因で起こる流体の**運動エネルギーの内部エネルギーへの転化が起こらない**とする。
- **断熱流体**、すなわち流体素辺間の**熱流が生じない**流体について考える。断熱的でない一般の流体について発生する**流体素辺同士の間熱流 (エネルギー移動) がない**という仮定である。

状況にもよるが、空気や温度が一定に近い水について、粘性の効果が無視できるような流れを考える場合におおよそ相当する。なお、状態方程式については特に指定せず一般のままにしておく。

[熱力学第一法則] 断熱流体の**内部エネルギー E** の変化は、**熱力学第一法則 $dE = \delta Q - PdV$** (δQ は熱量の流入分で、断熱仮定についてはゼロ) より

$$dE = -PdV \quad (4.2)$$

のように、圧力が流体に与える仕事 $-PdV$ で与えられる。以下の導出でもこの式を使う。

[今回の方針] 前回の講義で運動量保存則の式を書き下した時と同様、流体のエネルギー密度について

$$\partial_t(\text{エネルギー密度}) + \nabla \cdot (\text{エネルギー流}) = 0 \quad (4.3)$$

のような形の式を導出することを目指す。ある領域 V に含まれる流体について考えると、左辺の第2項が V から流出するエネルギーに対応し、その分だけ V 中のエネルギーが時間変化するということを表す式である。なお、上式は流体素辺へのエネルギー流入がない場合の式で、**外力などによるエネルギー流入がある場合には右辺が非ゼロになる**。

左辺に出てくるエネルギー密度は、先ほど述べた通り流体の**運動エネルギーと内部エネルギーの和**で与えられる。そのそれぞれについて、式 (4.3) の左辺がどのような式になるかを以下で順次導出する。

4.1 運動エネルギーの時間変化

流体の運動エネルギー密度は、点粒子の場合と同様に

$$\frac{1}{2}\rho(t, \mathbf{r})|\mathbf{v}(t, \mathbf{r})|^2 \quad (|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \quad (4.4)$$

で与えられる。式 (4.3) の第1項に出てくるエネルギー密度の時間微分は以下のようになる：

$$\partial_t \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 \right) = \frac{1}{2}(\partial_t \rho)|\mathbf{v}|^2 + \rho \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v} . \quad (4.5)$$

式 (4.5) の右辺に出てくる $\partial_t \rho$, $\partial_t \mathbf{v}$ は、それぞれ連続の式とオイラーの方程式で書き換えられる：

$$\text{連続の式： } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.6)$$

$$\text{オイラーの方程式： } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{f} \quad (4.7)$$

ただし、 \mathbf{f} は流体の単位質量あたりにかかる外力（体積力）である。前回以前の講義のように重力だけを考える場合には $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ となる。

式 (4.6), (4.7) を使って運動エネルギーの時間変化 (4.5) を書き換えると

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right) = \frac{1}{2} (\partial_t \rho) |\mathbf{v}|^2 + \rho \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v} \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 [-\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] + \rho \mathbf{v} \cdot \left[-(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{f} \right] \quad (4.9)$$

$$= -\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \frac{1}{2} \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{v} \cdot \nabla) P + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \quad (4.10)$$

$$= -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) P + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} . \quad (4.11)$$

上記の計算の詳細は下記の通り。

- 2つ目の等号：連続の式 (4.6)、オイラーの方程式 (4.7) を使って $\partial_t \rho$, $\partial_t \mathbf{v}$ を書き換えた。
- 3つ目の等号： $\mathbf{v} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}]$ の外側の \mathbf{v} を微分の内側に入れて $\frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) |\mathbf{v}|^2$ とまとめた。
念のため確認してみると

$$\frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) |\mathbf{v}|^2 = \sum_{i,j=x,y,z} \frac{1}{2} v_i \partial_i (v_j v_j) = \sum_{i,j=x,y,z} v_j v_i \partial_i v_j = \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] . \quad (4.12)$$

最後の等号では、まず $\sum_{i=x,y,z} v_i \nabla_i = \mathbf{v} \cdot \nabla$ と書き換えて、その外側から \mathbf{v} ($\Leftrightarrow v_j, j = x, y, z$) が $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ ($\Leftrightarrow (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_j, j = x, y, z$) に内積されている。

- 4つ目の等号：3行目の第1, 2項を一つにまとめて $-\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right)$ とした。
念のため確認してみると、以下の通り4行目の第1項から3行目の第1, 2項が実際に出てくる。

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=x,y,z} \partial_i (\rho v_j v_j v_i) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=x,y,z} [v_j v_j \partial_i (\rho v_i) + \rho v_i \partial_i (v_j v_j)] \quad (4.13)$$

$$= -\frac{1}{2} [|\mathbf{v}|^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla |\mathbf{v}|^2] . \quad (4.14)$$

式 (4.11) を書き換えると、左辺が保存形になった以下の式が得られる：

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) P + \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{f}) . \quad (4.15)$$

この式の左辺のうち、第1項は $\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2$ は流体の運動エネルギー密度の時間変化、第2項 $\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right) = \text{div} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right)$ はエネルギー密度流の発散で、これを体積積分したものは、ガウスの定理を通じて

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right) = \int_S \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (4.16)$$

とある領域 V の表面 S から単位時間あたりに流出するエネルギーの量に書き換えられる。

なお、式 (4.15) の右辺に現れる項のうち、第1項 $-(\mathbf{v} \cdot \nabla) P = \mathbf{v} \cdot (-\nabla P)$ は圧力勾配力 $-\nabla P$ がなす仕事率、第2項 $\mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{f})$ は体積力 $\rho \mathbf{f}$ がなす仕事率にそれぞれ対応する。流体のエネルギーは、単位時間あたりにこれだけの分だけ変化する。

4.2 内部エネルギーの時間変化

前節に引き続き、今度は内部エネルギーの時間変化+流出量を表す式について調べていく。式(4.15)は運動エネルギー密度についての式だったので、内部エネルギーについても密度についての式

$$\partial_t(\text{内部エネルギー密度}) + \nabla \cdot (\text{内部エネルギー密度流}) \quad (4.17)$$

を立てることを目指す。

4.2.1 熱力学第一法則

熱力学第一法則は、今回の場合は式(4.2):

$$dE = -PdV \quad (4.18)$$

で与えられる。ただし、 E は現在注目している流体要素に含まれる内部エネルギーで、またこの式はその流体要素について成立する。すなわち、流体要素の流れに沿った(ラグランジュ)微分についてこの式が成立して

$$\frac{DE}{Dt} = -P \frac{DV}{Dt} \quad \left(\frac{Df}{Dt} = \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla f \right) . \quad (4.19)$$

[単位質量あたりの内部エネルギー] ここで、新たに単位質量あたりの内部エネルギー ε を導入する。すなわち、内部エネルギーの密度(単位体積あたりに含まれる内部エネルギー)を $\rho\varepsilon$ 、体積 V の領域に含まれる内部エネルギーを $E = \rho\varepsilon V$ とする。

[ε についての熱力学第一法則] 式(4.18)に $E = \rho\varepsilon V$ を代入すると

$$dE = d(\rho\varepsilon V) = \varepsilon d(\rho V) + \rho V d\varepsilon = -PdV . \quad (4.20)$$

ここで、領域 V に含まれる流体の質量 ρV は、流体の状態(圧力など)が変化しても不変である。そのため、以下の式が成立する:

$$0 = d(\rho V) = V d\rho + \rho dV . \quad (4.21)$$

これを使って式(4.20)を書き換えると

$$\varepsilon d(\rho V) + \rho V d\varepsilon = -PdV = + \frac{PV}{\rho} d\rho \quad \therefore d\varepsilon = \frac{P}{\rho^2} d\rho . \quad (4.22)$$

式(4.22)はある流体要素について成り立つ式なので、その流体要素の流れに沿って

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \varepsilon + \mathbf{v} \cdot \nabla \varepsilon = \frac{P}{\rho^2} (\partial_t \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho) \quad (4.23)$$

が成立する。

<単位質量あたりの熱力学第一法則> 式(4.22)を少し変形すると

$$d\varepsilon + P d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \quad (4.24)$$

となる。第2項に現れる $1/\rho$ は単位質量あたりの体積である。 ε が単位質量あたりの内部エネルギーだったので、これは熱力学第一法則(4.18)を単位質量あたりについて書き下した式である。

なお、断熱的ではない一般の流体については

$$d\varepsilon + P d\left(\frac{1}{\rho}\right) = T ds \quad \Rightarrow \quad \frac{D\varepsilon}{Dt} + P \frac{D\left(\frac{1}{\rho}\right)}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} \quad (4.25)$$

となる。ただし、 s は単位質量あたりのエントロピーである。今回考えている断熱流体については $Ds/Dt = 0$ 、すなわち流れに沿ってエントロピーが一定(等エントロピー流)となる。

4.2.2 内部エネルギー密度の時間変化

では、やや天下りの的ではあるが内部エネルギー密度 ε の時間変化+流出量を表す式

$$\partial_t(\rho\varepsilon) + \nabla \cdot (\rho\varepsilon\mathbf{v}) \quad (4.26)$$

を計算してみる。各項を展開し、先ほど導出した式 (4.23) と連続の式 (4.6) を使って変形すると

$$\partial_t(\rho\varepsilon) + \nabla \cdot (\rho\varepsilon\mathbf{v}) = \rho\partial_t\varepsilon + \varepsilon\partial_t\rho + \varepsilon\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla\varepsilon \quad (4.27)$$

$$= \rho(\partial_t\varepsilon + \mathbf{v} \cdot \nabla\varepsilon) + \varepsilon(\partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v})) \quad (4.28)$$

$$= \rho \frac{P}{\rho^2} (\partial_t\rho + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho) \quad (4.29)$$

$$= \frac{P}{\rho} [\partial_t\rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) - \rho\nabla \cdot \mathbf{v}] \quad (4.30)$$

$$= -P\nabla \cdot \mathbf{v} . \quad (4.31)$$

この式の右辺に現れる $P\nabla \cdot \mathbf{v}$ は、体積変化率 $\partial_t V = \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}$ に対応する内部エネルギーの変化率 $P\partial_t V$ である。

< $\text{div } \mathbf{v} = \partial_t V$ について > $\nabla \cdot \mathbf{v}$ をある流体要素 V について体積積分すると、ガウスの定理により

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.32)$$

と、流体要素 V の表面 S 全体にわたる表面積分になる。右辺に現れる $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ は、微小面積要素 dS から単位時間あたりに速度 \mathbf{v} で流出する流体の占める体積である。流体要素の表面はこの流体に沿って拡張するので、式 (4.32) は流体要素 V の体積の増加分を表す。

4.3 全エネルギーの時間変化

流体の持つ全エネルギー密度（運動エネルギー密度と内部エネルギー密度の合計）の時間変化を表す式は、これまでに導出した式 (4.15) と (4.31) の和で与えられる：

$$\partial_t \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho\varepsilon \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\mathbf{v} + \rho\varepsilon\mathbf{v} \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla P + \mathbf{v} \cdot (\rho\mathbf{f}) - P\nabla \cdot \mathbf{v} . \quad (4.33)$$

この右辺に現れる圧力項は一つにまとめることができる：

$$-\mathbf{v} \cdot \nabla P - P\nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot (P\mathbf{v}) . \quad (4.34)$$

これはちょうど $P\mathbf{v}$ というベクトルの発散の形をしているので、式 (4.33) でこの項を左辺に移項すると

$$\partial_t \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho\varepsilon \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2\mathbf{v} + \rho\varepsilon\mathbf{v} + P\mathbf{v} \right) = \mathbf{v} \cdot (\rho\mathbf{f}) . \quad (4.35)$$

右辺に現れる $\mathbf{v} \cdot (\rho\mathbf{f})$ は、4.1 節の最後でも説明した通り体積力 $\rho\mathbf{f}$ が流体に与える仕事率で、流体のエネルギーは単位時間あたりにこの分だけ変化する。

[エネルギー流ベクトル] 式 (4.35) の左辺第二項は

$$\text{div} \left[\rho \left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \varepsilon \right) \mathbf{v} + P\mathbf{v} \right] \quad (4.36)$$

という形をしている。式 (4.35) がエネルギー保存則であることを踏まえると、発散 (div) の中に入っているベクトルはエネルギー流ベクトルであると解釈できる。

式 (4.36) のうち、 $\rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \varepsilon \right) \mathbf{v}$ はある固定された領域 V についての単位時間あたりの運動エネルギー・内部エネルギー流出量である。

一方、 $P\mathbf{v}$ 項については、ガウスの法則を使うと

$$\int_V \operatorname{div}(P\mathbf{v}) dV = \int_S P\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_S P\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.37)$$

となるが、 $P\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ は V の表面の微小面積 dS あたりについて (dS の法線方向に働く) 圧力 $P\mathbf{n}$ がなす仕事率である。圧力は領域 V の表面から内向きに働くので、 $P\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ の分だけ流出する流体は仕事をし、その分だけ V 中の流体のエネルギーは減少する。このエネルギー収支を表しているのが式 (4.35) である。

式 (4.36) に含まれるエネルギー流ベクトルは

$$\rho \left[\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \left(\varepsilon + P \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{v} \right] \quad (4.38)$$

とも書き直せる。この式に含まれる $\varepsilon + P \frac{1}{\rho}$ は、エンタルピー $E + PV$ の単位質量あたりの値である。実際、 $1/\rho$ は単位質量あたりの体積であった。そこで、改めて単位質量あたりのエンタルピーを $w = \varepsilon + P \frac{1}{\rho}$ とおくと、エネルギー流ベクトルは

$$\rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w\mathbf{v} \right) \quad (4.39)$$

と、より単純な式で書き表すことができる。

第5回 循環のある流れ

これまでの講義では、流体力学の基礎方程式とその性質についてまとめてきた。今後、実際の流体の運動の解析を行うための準備を徐々に進める。そのための第一歩として、流体の流れの渦の基本的性質について今回は解説する。

5.1 循環

5.1.1 定義

日常的な現象でもよく見られる「渦」が、これまでに導入してきた流体の特徴量を使うとどのように表されるのかを改めて考えてみる。

渦の基本的な特徴はある点を中心に**流れの回転**があることで、「回転」があるということは円環状の経路に沿った速度分布が存在しているはずである。この考えに基づき、ある時刻 t における速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ について、ある閉曲線 C に沿った**循環** κ_C を

$$\kappa_C \equiv \oint_C \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5.1)$$

と定義する。ただし、 $d\mathbf{l}$ は曲線 C の微小部分で、 $\oint_C \dots d\mathbf{l}$ は閉曲線 C (の、事前に決めた方向) に沿った一周積分である。図 7a のとおり、**循環** κ_C は速度場 \mathbf{v} を経路 C に射影した成分の大きさを C の一周にわたって積分したものである。

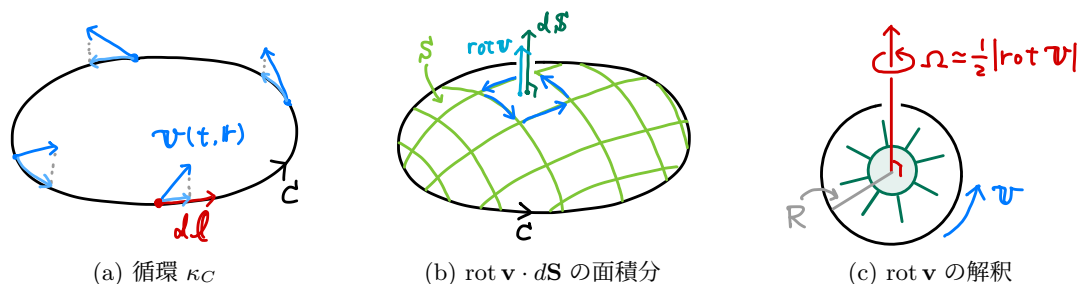


図 7: (a) 速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ の閉経路 C に沿った成分を線積分したものを循環 κ_C と定義する。(b) ストークスの定理を使うことで、循環 κ_C は C を縁を持つ曲面 S 上で $\text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ を面積分したものと等しくなる。上図は $\text{rot } \mathbf{v}$ が面 S に垂直という特別な場合なので注意。(c) 経路 C が半径 R の微小な円の場合、 $\frac{1}{2}|\text{rot } \mathbf{v}|$ は円 C に沿った流体の角速度 Ω に等しくなる。 C 内に置かれた水車などの回転角速度を Ω と思ってもよい。

また、**ストークスの定理**を使うことにより (図 7b 参照)

$$\kappa_C = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \equiv \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.2)$$

と、 C を縁として持つ曲面 S 上で、 \mathbf{v} の渦度²¹ $\boldsymbol{\omega} \equiv \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ の面 S に垂直な成分の大きさ $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ を面積分したものと等しくなる。ただし、**面積要素ベクトル** $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ は経路 C の向きについて右ねじの進む方向にとる必要があるので注意する。なお、 $\text{rot } \mathbf{v}$ の成分は

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

²¹ベクトル解析では、 $\text{rot } \mathbf{v}$ はベクトル場 \mathbf{v} の**回転** (rotation) と呼ばれる。

5.1.2 渦度の解釈

循環 κ_C は、任意の大きさの経路 C と曲面 S について定義されている。この定義を C の大きさが微小な場合に使うと、近似的に

$$\kappa_C = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\ell \simeq \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S . \quad (5.4)$$

ただし、 ΔS は面 S の面積である。特に、半径 R の円形の経路についてこの式を評価すると (図 7c 参照)

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\ell = 2\pi R v_{\text{平均}} = \kappa_C = \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S = \pi R^2 \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} . \quad (5.5)$$

ただし、 $v_{\text{平均}}$ は経路 C に沿った流体の速度の平均値。これらをもとに、 C 上の流体の平均角速度 $\Omega = v_{\text{平均}}/R$ を求めると

$$\Omega = \frac{v_{\text{平均}}}{R} = \frac{1}{R} \frac{\pi R^2 \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{2\pi R} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} . \quad (5.6)$$

すなわち、流体の平均角速度 Ω は、渦度 $\text{rot } \mathbf{v}$ の回転面に垂直な成分 ($\text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$) の半分に等しい。

流体の中に微小な水車 (平面的な流体であれば、水面に浮かぶビート板などでもよい) が一様に分布している状況を考えて、**回転角速度 (の 2 倍) が渦度 $\text{rot } \mathbf{v}$ の大きさ、回転軸の方向が渦度の方向** にそれぞれ相当する、と考えるとイメージがつかみやすいかもしれない。

5.1.3 渦度を持つ流れの例

渦度と循環の定義を述べたところで、では実際に渦度を持つ速度場 \mathbf{v} の例を少し見てみよう。特に、**渦度がある場合でも、いわゆる「渦」状の流れがない時もある** という点には注意が必要である。

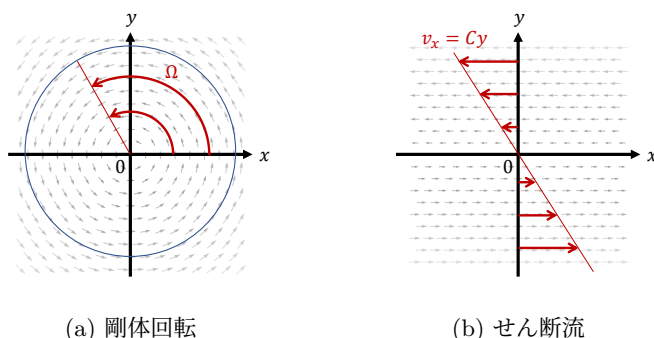


図 8: (a) 角速度 Ω の剛体回転流。(b) 速度 $v_x = Cy$ を持つせん断流。図は $C < 0$ の場合である。 $C = -2\Omega$ のとき、この 2 つの流れの渦度 $\text{rot } \mathbf{v}$ はたがいに等しくなり、 z 軸 (紙面から手前側の垂直方向) 向きの大きさ一定のベクトルとなる。

[剛体回転] 流体全体が z 軸を回転軸として角速度 Ω で剛体回転している場合の速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\Omega y \\ \Omega x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

となるのであった (図 8a 参照)。この場合の渦度 $\text{rot } \mathbf{v}$ は

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_x \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x(\Omega x) - \partial_y(-\Omega y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\Omega \end{pmatrix} . \quad (5.8)$$

すなわち、渦度はどこでも一定で、回転軸 (z 軸) を向いた大きさ 2Ω のベクトルとなる。

[せん断流] 次に、 x 方向の速度が y 座標に比例するせん断流の場合を調べてみる。この速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} Cy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (C : \text{定数}) \quad (5.9)$$

で与えられる (図 8b 参照)。この場合の渦度 $\text{rot } \mathbf{v}$ は

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_x \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\partial_y(Cy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -C \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

この場合にも、渦度はいたるところ一定で、 z 軸 (の負の方向) を向いた大きさ C のベクトルで与えられる。特に、 $C = -2\Omega$ ととれば、先ほどの剛体回転の場合とまったく同じ渦度が得られる。

このように、渦度が等しくても速度場 \mathbf{v} は異なる場合があるということを意味する。渦度が同じなので、これらの流れの各点に微小な水車を置けば同じ速度で回る。一方、流れ全体の構造は互いに異なる。

5.2 渦線、渦管

5.2.1 定義

[渦線] ある時刻 t の渦度 $\boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ に接し続ける曲線を渦線と呼ぶ。以前、速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ にいたるところで接する曲線を流線と定義したが、これと同様である。

渦度ベクトルは流れの回転の回転軸の方向を向いているので、渦線は (局所的な) 回転軸をつなげていってできる曲線と考えることもできる。ただ、5.1.3 節で説明したとおり、渦度があってもいわゆる「渦」状の流れが存在しない場合もあるので注意が必要である。なお、5.1.3 節の 2 つの例では、 z 軸に沿った任意の直線が渦線となる。

[渦管] 流体中のある閉曲線 C を考え、それを横切る渦線の集合で囲まれる筒状の領域を渦管と呼ぶ。5.1.3 節の 2 つの例では、 (x, y) 平面上に閉曲線 C を取ったとすると、それを z 軸方向に平行移動してできる柱状の領域が C に対応する渦管となる。そのほかの例については図 9 参照。

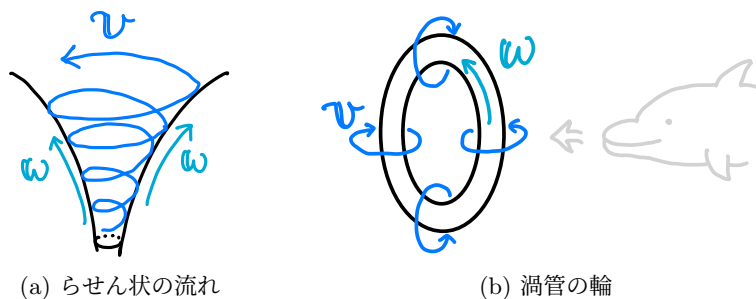


図 9: (a) らせん状の流れ、および (b) 渦線が輪を作る場合の渦管。青線が速度場 \mathbf{v} 、水色線が渦度 $\boldsymbol{\omega}$ に平行な渦線、黒線が渦管である。

5.2.2 渦管の連続性

渦度 $\boldsymbol{\omega}$ には、発散がゼロ ($\text{div } \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$) という重要な性質がある：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0. \quad (5.11)$$

この式は、 $\nabla \times \mathbf{v}$ の表式 (5.3) について、その発散を定義通り計算すれば示せる。

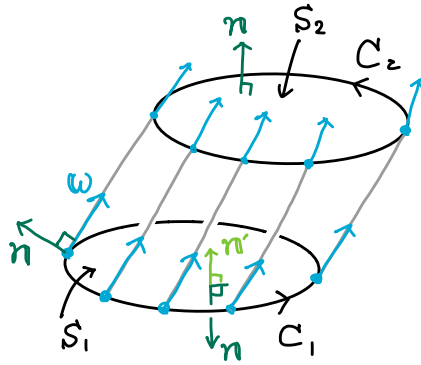


図 10: 渦管とその断面 S_1, S_2 .

$\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0$ を使うことで、渦管に沿って循環 κ_C が一定となることを以下のように示せる。ある渦管について、任意の2つの断面 C_1, C_2 をとる (図 10 参照)。断面 C_1, C_2 と渦管の側面で囲まれる領域を V として、 $\text{div } \boldsymbol{\omega} (= 0)$ を体積積分し、ガウスの定理を用いると

$$0 = \int_V \text{div } \boldsymbol{\omega} dV = \int_{\text{表面}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\text{側面}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.12)$$

$$= \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot (-\mathbf{n}') dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = -\kappa_{C_1} + \kappa_{C_2} . \quad (5.13)$$

- 1行目の最後の等号では、 $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ の表面積分を面 S_1, S_2 (C_1, C_2 を縁に持つ曲面) および側面についての積分に分けた。なお、単位法線ベクトル \mathbf{n} は領域 V から見て外向きにとるので注意。
- 1行目の最後の項で、 $\boldsymbol{\omega}$ と \mathbf{n} はそれぞれ渦管の側面に平行 / 垂直なので、 $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ となり積分値も消えることを使った。
- 面 S_1, S_2 上の $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ の面積分は、式 (5.2) で説明した通り循環 $\kappa_{C_1}, \kappa_{C_2}$ と等しくなる。ただし、この際に法線ベクトル \mathbf{n} の向きを経路 C_1, C_2 の向きについて右ねじの進む方向に取る必要がある。そのため、底面 S_1 については法線ベクトルの向きを逆向き ($\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$) に取ってから循環 κ_{C_1} に書き換えることになり、その分のマイナス符号がついている。

式 (5.13) は循環 κ_C が渦管に沿って一定 ($\kappa_{C_1} = \kappa_{C_2}$) ということの意味する。循環があるなら流体の渦度と渦管が必ず存在するため、この結果は渦管は流体中で途切れないこと、すなわち渦管は無限に伸びるか、壁などの境界面に達するか、リング状になるかのいずれかとなることを意味する。

5.3 ケルヴィンの渦定理

前節では、循環は渦管に沿って (空間的に) 一定であることを示し、そのことから渦管が途中で途切れることがないことを述べた。本節では、完全流体中では循環は流体の流れに沿って時間的に一定であるというケルヴィンの渦定理を示し、そのため流体の時間発展中に渦管が途切れることがないことを説明する。

この定理の証明には、オイラーの方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{f} \quad (5.14)$$

を用いる。また、以下の仮定をおく。

- (単位質量あたりの) 外力 \mathbf{f} はポテンシャル力であるとする。すなわち、ある (スカラー) 関数 $U(t, \mathbf{r})$ が存在して

$$\mathbf{f} = -\nabla U \quad (5.15)$$

と与えられる²²。

- バロトロピックな状態方程式、すなわち

$$P = P(\rho) \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \rho(P) \quad (5.16)$$

が成り立つとする。このとき、新たに関数 $w(P)$ を

$$w(P) \equiv \int^P \frac{dP'}{\rho(P')} \quad (5.17)$$

と定義すると、

$$dw = \frac{1}{\rho} dP \quad \Rightarrow \quad -\nabla w = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (5.18)$$

が成立する²³。なお、 $1/\rho$ が単位質量あたりの体積であることを思い出すと、関係式 $dw = \frac{1}{\rho} dP$ は w が単位質量あたりのエンタルピーであることを示している。

これらの仮定の下で、オイラーの方程式 (5.14) は

$$\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla(w + U) \quad (5.22)$$

となる。なお、左辺の \mathbf{v} の微分をラグランジュ微分 $D\mathbf{v}/Dt$ で書き換えた。

では、循環 κ_C が流れに沿ってどのように時間変化するかを調べる。流れに沿った時間微分はラグランジュ微分で与えられるので

$$\frac{D}{Dt} \kappa_C = \frac{D}{Dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C \frac{D}{Dt} (\mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell}) = \oint_C \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \mathbf{v} \cdot \frac{D(d\boldsymbol{\ell})}{Dt} \right). \quad (5.23)$$

[式 (5.23) の右辺第 1 項] 式 (5.23) の右辺のうち、被積分関数の一つ目の項の寄与は、オイラーの方程式 (5.22) を使うとゼロになることが示せる²⁴：

$$\oint_C \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C [-\nabla(w + U)] \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \oint_C \frac{d}{d\ell} [w(\ell) + U(\ell)] d\ell = \left[w(\ell) + U(\ell) \right]_{\text{始点}}^{\text{終点}} = 0. \quad (5.24)$$

(\because) この式の 2 番目の等号では、勾配 $\nabla(w + U)$ と経路 C に沿った線素ベクトル $d\boldsymbol{\ell}$ との内積が C に沿った微分に線素長 $d\ell$ をかけたものに等しいこと、すなわち

$$d\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla(w + U) = \frac{d[w(\ell) + U(\ell)]}{d\ell} d\ell \quad (5.25)$$

²²ポテンシャル力は回転がゼロ ($\nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times (-\nabla U) = 0$) であるため、流体の回転を生む力の成分 (トルク) を持たない。流体の循環の保存則たるケルヴィンの定理が成立するための条件として $\mathbf{f} = -\nabla U$ を課しているのはこのため、より一般の $\nabla \times \mathbf{f} \neq 0$ となる外力がある場合はケルヴィンの定理も成り立たない。

²³ $w(t, \mathbf{r})$ について

$$dw = \frac{\partial w}{\partial t} dt + \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_i \quad (5.19)$$

が成立し、また $dw = \frac{1}{\rho} dP$ なので

$$dw = \frac{1}{\rho} dP = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + \sum_{i=x,y,z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} dx_i \quad (5.20)$$

も成立する。これらの式が任意の dt, dx_i について成立するので、各項の係数同士が等しい必要があり

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (i = x, y, z) \quad (5.21)$$

が成立する。式 (5.18) の第 2 式 $\nabla w = \frac{1}{\rho} \nabla P$ が成立するのはこのためである。

²⁴式 (5.27) 以下の導出のほかに、ストークスの定理を使って $\oint_C \nabla(w + U) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S [\text{rot } \nabla(w + U)] \cdot d\mathbf{S} = 0$ ($\text{rot } \nabla(w + U) = 0$ のため) としても同じ結果が得られる。

を使った。また、最右辺の $[w(\ell) + U(\ell)]_{\text{始点}}^{\text{終点}}$ は一周積分の始点と終点における $w(\ell) + U(\ell)$ の値の差、すなわち

$$[w(\ell) + U(\ell)]_{\text{始点}}^{\text{終点}} = [w(\ell) + U(\ell)]_{\text{終点}} - [w(\ell) + U(\ell)]_{\text{始点}} \quad (5.26)$$

である。今回は経路 C に沿った一周積分を考えており、始点と終点が一致していて、それらの点における $w + U$ の値も一致するため、上式はゼロになる

[式 (5.23) の右辺第 2 項] また、式 (5.23) の右辺第 2 項についても、以下の通りゼロになる：

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{D(d\ell)}{Dt} = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \oint_C \frac{1}{2} d(|\mathbf{v}|^2) = \left[\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right]_{\text{始点}}^{\text{終点}} = 0. \quad (5.27)$$

(\because) 一つ目の等号で $\frac{D(d\ell)}{Dt} = d\mathbf{v}$ となっているが、これは以下のように示せる。まず、 $d\ell$ の始点と終点を $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ とすると、近似的に (図 11 参照)

$$d\ell(t) \simeq \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t). \quad (5.28)$$

これをラグランジュ微分すると

$$\frac{D(d\ell(t))}{Dt} = \frac{D\mathbf{r}_2(t)}{Dt} - \frac{D\mathbf{r}_1(t)}{Dt}. \quad (5.29)$$

となるが、 $\frac{D\mathbf{r}_1(t)}{Dt}$ は $d\ell(t)$ の始点の位置 $\mathbf{r}_1(t)$ を流体の流れに沿って時間微分したものなので、定義により $\frac{D\mathbf{r}_1(t)}{Dt} = \mathbf{v}_1(t)$ となる。ただし、 $\mathbf{v}_1(t)$ は地点 $\mathbf{r}_1(t)$ における流速。 $\mathbf{r}_2(t)$ についても同様なので、以下の式が従う：

$$\frac{D(d\ell(t))}{Dt} = \mathbf{v}_2(t) - \mathbf{v}_1(t) \simeq d\mathbf{v}. \quad (5.30)$$

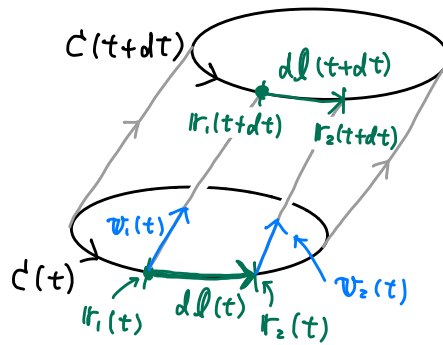


図 11: 流体の流れに沿って移動する線素 $d\ell(t)$.

式 (5.23), (5.24), (5.30) より、循環 κ_C が流体の流れに沿った時間微分がゼロであることが示される：

$$\frac{D}{Dt} \kappa_C = 0. \quad (5.31)$$

式 (5.31) は、ある経路 C について循環 κ_C が流体の流れに沿って時間的に一定であることを意味する。循環 κ_C が非ゼロであれば経路 C から延びる渦管が存在するので、渦管は流体の時間発展中で途切れることがないことがわかる。式 (5.31) およびこの考察をケルヴィンの渦定理と呼ぶ。5.2.2 節の結果と合わせて、渦管は空間方向にも時間方向にも途切れることがない、ということを表している。

第6回 渦のない流れ

流体の流れは一般的に非常に複雑になりうるが、このうち渦のない流れ (渦度 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ がゼロの流れ) は比較的簡単に扱うことができる。今回の講義で渦無し流を取り扱うための基本をまとめる。

6.1 ヘルムホルツの定理

渦のない流れが比較的簡単に扱える理由は、この場合には速度場がポテンシャル $\phi(t, \mathbf{r})$ の勾配で与えられる ($\mathbf{v} = \nabla\phi$) ためである。これを理解するためには、ベクトル場を回転のある部分とない部分に分解するヘルムホルツの定理を使う。

ヘルムホルツの定理

(3次元中の) 任意のベクトル場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は、スカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ と発散がゼロのベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を用いて

$$\mathbf{v} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.1)$$

と表せる。

右辺の $\nabla\phi$ がベクトル場 \mathbf{v} の発散 $\text{div } \mathbf{v}$ を、 $\nabla \times \mathbf{A}$ が \mathbf{v} の回転 $\text{rot } \mathbf{v}$ をそれぞれ担っている²⁵。

[証明] まず、式 (6.1) の両辺の発散を計算すると

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot \nabla\phi \equiv \Delta\phi. \quad (6.2)$$

2つ目の等号では、ベクトルの回転の発散がゼロ ($\text{div rot } \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$) を用いた。また、最右辺に現れる Δ はラプラシアンと呼ばれる微分演算子で $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。式 (6.2) は、スカラー場 ϕ が以下のポアソン方程式を解けば得られることを示している：

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (6.3)$$

ここで、右辺に現れる $\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})$ は、与えられたベクトル場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ でその値が決まるスカラー関数とみなせる。

次に、式 (6.1) の回転を計算すると

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}_{=0} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}. \quad (6.4)$$

2つ目の等号でスカラー場の勾配の回転がゼロになること ($\text{rot grad } \phi = \nabla \times (\nabla\phi) = 0$)、および3つ目の等号でベクトル解析の公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \cdot \nabla \mathbf{A}$ を用いた。また、4つ目の式では仮定 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を使って第一項を消した。この式から、 \mathbf{A} を定めるポアソン方程式が得られる：

$$\Delta \mathbf{A} = -\nabla \times \mathbf{v} \quad (\nabla \cdot \mathbf{A} = 0). \quad (6.5)$$

この式の右辺 $-\nabla \times \mathbf{v}$ は、 \mathbf{v} からその値が計算できるベクトル場となる。

ϕ, \mathbf{A} を定めるポアソン方程式 (6.3), (6.5) の解き方については省略するが、得られる解 (のひとつ) は以下のようになることが示せる：

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dV'. \quad (6.6)$$

ここで、 $\nabla' \equiv (\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'})$ はプライム付きの座標 $\mathbf{r}' \equiv (x', y', z')$ についてのナブラ演算子で、右辺の積分も \mathbf{r}' について行う。 \mathbf{r} は $\phi(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})$ の引数で、右辺の積分では定数として扱われる²⁶。

²⁵ ϕ, \mathbf{A} には、ラプラス方程式 $\Delta f = 0$ を満たす関数と $\nabla f + \nabla \times \mathbf{B} = 0$ を満たすベクトル場 \mathbf{B} を足しても ($\phi \rightarrow \phi + f, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B}$)、結果として得られる $\mathbf{v} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}$ の値は変化しない。これに加え、 $\phi \rightarrow \phi + c, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi$ (c : 定数、 ψ : スカラー場) としても \mathbf{v} は不変である。この分だけ ϕ, \mathbf{A} は一意に定まらないことになる。

²⁶式 (6.6) はベクトル場 \mathbf{v} が無限遠でゼロになる場合の表式で、そのほかの境界条件を満たす \mathbf{v} については式 (6.6) にラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ の解を適当に足す必要がある。

6.2 渦無し流

前節の式 (6.6) からわかる通り、 $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = 0$ となる渦無し流については、速度場 \mathbf{v} がポテンシャル ϕ だけで表せる：

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r}) . \quad (6.7)$$

実際、この速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ についての回転は $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \nabla\phi = 0$ となる。今後、速度場を表すのに使ったスカラー場 $\phi(t, \mathbf{r})$ を速度ポテンシャルと呼ぶ。

6.2.1 オイラーの方程式

渦無し流 (6.7) について、オイラーの方程式がどのように与えられるかを調べる。これに際し、前回の講義で用いた以下の仮定を今回も課す：

- 完全流体
- 外力がポテンシャル力: $\mathbf{f} = -\nabla U$ (U : スカラー場)
- 状態方程式が $P = P(\rho) \Leftrightarrow \rho = \rho(P)$ で与えられる。このとき、

$$w(P) = \int^P \frac{dP'}{\rho(P')} \quad (6.8)$$

という関数を導入でき、これについて $dw = \frac{1}{\rho}dP \Rightarrow \frac{1}{\rho}\nabla P = \nabla w$ となる。

以上の仮定の下で得られるオイラーの方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{f} = -\nabla(w + U) \quad (6.9)$$

に、渦無し流の速度場 (6.7) を代入して整理する。

オイラーの方程式 (6.9) を整理するにあたり、以下のベクトル解析の公式を用いる：

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (6.10)$$

$$\Rightarrow \nabla |\mathbf{v}|^2 = 2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) . \quad (6.11)$$

式 (6.11) は公式 (6.10) で $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{v}$ としたもの。特に、渦無し流 ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$) の場合、式 (6.11) の右辺第二項がゼロとなるため以下が成立する：

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 . \quad (6.12)$$

式 (6.9) に式 (6.7), (6.12) を代入すると

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi}_{= \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2 = -\nabla(w + U) \quad (6.13)$$

$$\therefore \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \right) = 0 . \quad (6.14)$$

∇ は空間の各方向への微分演算子なので、式 (6.14) はかっこの中のスカラー量が時刻 t だけの関数であり、そのために勾配がゼロであることを意味する。すなわち、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U = f(t) . \quad (6.15)$$

$f(t)$ は時間 t の任意関数である。ここで、さらに速度ポテンシャルの不定性を使うと、 $f(t)$ を時間によらない定数 C に修正できる。

(\therefore) やや恣意的だが、式 (6.15) を以下のように変形する：

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - f(t) + C\right) + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + w + U = C. \quad (6.16)$$

ここで、新たに関数 $\bar{\phi}(t, \mathbf{r})$ を以下の通り定義する：

$$\bar{\phi}(t, \mathbf{r}) = \phi(t, \mathbf{r}) - \int^t f(t')dt' + Ct. \quad (6.17)$$

この関数を時間 t で微分すると

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} - f(t) + C \quad (6.18)$$

となるので、式 (6.16) は

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + w + U = C \quad (6.19)$$

とも表せる。また、 $\bar{\phi}$ から得られる速度場 $\bar{\mathbf{v}}$ は

$$\bar{\mathbf{v}} \equiv \nabla\bar{\phi} = \nabla\left(\phi(t, \mathbf{r}) - \int^t f(t')dt' + Ct\right) = \nabla\phi = \mathbf{v} \quad (6.20)$$

と、もともとの速度ポテンシャル ϕ から得られる速度場と一致する。ただし、積分 $\int^t f(t')dt'$ と Ct がどちらも t だけの関数であり、空間微分 ∇ を取るとゼロになることを使った。したがって、 \mathbf{v} を表すための速度ポテンシャルとして最初から $\bar{\phi}$ を使っていたと考えても差し支えない。

以上の解析から、式 (6.15) で右辺を定数 C にしたもの（もしくは式 (6.19) で $\bar{\phi} \rightarrow \phi$ と書き直したもの）が成立することが示された。これはベルヌーイの定理として知られている結果である。

(一般化された) ベルヌーイの定理

6.2.1 節冒頭で述べた仮定を満たす渦度がない（一般には非定常の）流れについて

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + w + U = C \quad (C: \text{定数}). \quad (6.21)$$

[定常流についてのベルヌーイの定理] 時間的に変化しない定常流 ($\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$) の場合には

$$\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + w + U = C \quad (C: \text{定数}) \quad (6.22)$$

が成立し、式 (6.21) でもそうであったように定数 C は流体全体にわたって一定の値となる。なお、以上では渦度がゼロの場合を考えていたが、渦度がある定常流については、 C は流体全体にわたって一定とはならないものの、式 (6.22) の左辺 ($= C$) が流体中の各流線・各渦線に沿って一定となることが別途示せる²⁷。こちらの方をベルヌーイの定理と呼ぶ場合も多い。

6.2.2 ベルヌーイの定理 \simeq エネルギー保存則

定常流の場合には、ベルヌーイの定理を流体のエネルギー保存則からも導出できる。4.3 節で、(断熱的な) 完全流体についての単位質量あたりのエネルギー保存則は

$$\partial_t \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho\varepsilon \right) + \nabla \cdot \left[\rho \left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + w \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{v} \cdot (\rho\mathbf{f}). \quad (6.23)$$

²⁷ 渦度がある定常流についてのベルヌーイの定理の導出は本講義では割愛する。流線に沿って一定となることについてはこの後 6.2.2 で見る。

ただし、 $w = \varepsilon + \frac{P}{\rho}$ は単位質量あたりのエンタルピーである²⁸。ここで、外力がポテンシャル力 ($\mathbf{f} = -\nabla U$) であり、さらに時間に依存しない ($\partial U/\partial t = 0$) と仮定すると

$$\mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{f}) = -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla U = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) + U \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) - U \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} U) - \frac{\partial \rho U}{\partial t} \quad (6.24)$$

となる。最後から2番目の等号では連続の式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ を使った。この式を式 (6.23) の右辺に代入し、全ての項を左辺に移行すると

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon + \rho U \right) + \nabla \cdot \left[\rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \right) \mathbf{v} \right] = 0. \quad (6.25)$$

流れが定常であれば、左辺の第一項がゼロとなるので

$$0 = \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \right) \right] = \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \right) + \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \right) \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}). \quad (6.26)$$

右辺で $(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U)$ 項が消えているのは、定常流についての連続の式が $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ となるためである。式 (6.26) は関数 $\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U$ が流れの方向について一定 ($\mathbf{v} \cdot \nabla(\dots) = 0$) ということを示しており、そこから式 (6.22) が少なくとも流線に沿って満たされることが言える。エネルギー保存則の式 (6.23) は渦度の有無にかかわらず成立するので、渦度がある場合でも $\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U$ が流線に沿って一定であることは示せたことになる。なお、渦線に沿った方向についても同じ性質を示せるのだが、それをするためにはオイラーの方程式に基づいた別の計算が必要になる。

6.2.3 応用例

図 12 のように、水が満たされた容器の底に小さな穴が開いているとする。この時に、穴から流れ出す水の流速はいくらになるかを、ベルヌーイの定理 (6.22) を使って求めてみる。

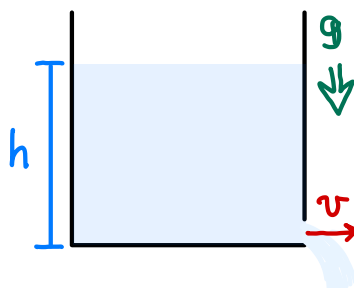


図 12: トリチェリの定理を示すために用いるセットアップ。水がたまった容器の底付近に穴が開いており、そこから水が流出する。

図 12 の系では、流体に外力として重力がかかっている。水面の位置を基準とした時、穴の位置における重力ポテンシャルは

$$U|_{\text{穴}} = -gh. \quad (6.27)$$

また、空気と接している水面は大気圧がかかっているが、これは水面の位置と穴の位置でほぼ同じである。圧力 P が同じなら、 P だけの関数である $w(P)$ の値も同じになるので

$$w|_{\text{水面}} = w|_{\text{穴}}. \quad (6.28)$$

²⁸ このエンタルピーの表式 ($w = \varepsilon + \frac{P}{\rho}$) は式 (6.8) で与えられるものと一致する。実際、4.3 節で導出した式 $d\varepsilon = \frac{P}{\rho^2} d\rho$ を使うと、 $w = \varepsilon + \frac{P}{\rho}$ の微分は $dw = d\varepsilon + d\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{P}{\rho^2} d\rho + \frac{dP}{\rho} - \frac{P}{\rho^2} d\rho = \frac{dP}{\rho}$ となり、式 (6.8) の微分 ($dw = \frac{dP}{\rho}$) と一致する。

また、穴が十分に小さい時、水面の位置や容器内部の流れは時間的にほぼ変化しない。したがって、近似的に**定常流**となり

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (6.29)$$

ここで、ベルヌーイの定理は、式 (6.21) の左辺が**流体のどの位置でも一定**であることを意味する：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \Big|_{\text{水面}} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U \Big|_{\text{穴}}. \quad (6.30)$$

式 (6.27), (6.28), (6.29) を踏まえてこの式を整理すると

$$0 = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \Big|_{\text{穴}} - gh \quad \therefore |\mathbf{v}| = \sqrt{2gh}. \quad (6.31)$$

この結果は**トリチェリの定理**として知られている。例えば、 $h = 1\text{ m}$, $g = 9.8\text{ m/s}^2$ とすると $|\mathbf{v}| \simeq 4.4\text{ m/s}$ となる。流速 $|\mathbf{v}|$ の表式に流体の密度 ρ が出てこないのは、この流速の起源が重力のポテンシャルエネルギーで、それによって生成される流体の速度は密度 ρ に依存しない (ポテンシャルエネルギーと流体の慣性がどちらも ρ に比例するため打ち消しあう) ためである。

6.3 非圧縮性完全流体の流れ

水などの流体は、圧力がかかっても**体積がほぼ変化しない**。このような流体を**非圧縮性流体**と呼ぶ。この流体の状態方程式は単純に $\rho = \rho_0$ (定数) となる。なお、圧力は状況に応じて変化する。

非圧縮流体について、連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \therefore \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (6.32)$$

以前も軽く説明した通り、 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ は注目している流体の部分の**体積変化率**に対応する (式 (4.32) 参照)。これがゼロである、という意味の式が得られたわけだが、**非圧縮性流体は体積が不変** (変形はする) ということと対応している。

以下、非圧縮流体の**渦無し流**について考えることにする。式 (6.32) を速度ポテンシャルで表すと

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi \quad \therefore \Delta \phi = 0. \quad (6.33)$$

式 (6.33) は**ラプラス方程式**と呼ばれる微分方程式で、 $\phi(t, \mathbf{r})$ が満たす境界条件を与えれば $\Delta \phi = 0$ の解は一意に定まる。すなわち、流速 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ が流体の表面や壁面で満たす境界条件を指定すると、流体全体の速度場 $\mathbf{v} = \nabla \phi$ が一意に定まることになる²⁹。

また、 $\rho = \rho_0$ (一定) のとき、式 (6.8) で定義される w は

$$w = \int^P \frac{dP'}{\rho(P')} = \int^P \frac{dP'}{\rho_0} = \frac{P}{\rho_0} \quad (6.34)$$

となるので、ベルヌーイの定理 (6.21) は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{P}{\rho} + U = C \quad (C: \text{定数}) \quad (6.35)$$

となり、これを P について解けば

$$P = \rho \left[C - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) \right] \quad (6.36)$$

ベルヌーイの定理はオイラーの方程式を積分したものに相当するので、非圧縮流体については**オイラーの方程式は単に圧力を定める式**となったことになる。式 (6.36) からは**流速が速いと圧力が下がる**などといった有名な性質を読み取ることができる。

²⁹ \mathbf{v} の境界条件をある時刻 t に変更すると、その変化は流体全体に一瞬で反映されることになる。これは、非圧縮流体では変形に対する応答速度に相当する**音速が無限大**になっていることからくる。

第7回 非圧縮性完全流体の流れ：具体例

前回の講義で、非圧縮性完全流体の渦なし流については

$$\rho = \rho_0, \quad \mathbf{v} = \nabla\phi(t, \mathbf{r}) \quad (7.1)$$

となることを説明した。式(7.1)のように、速度ポテンシャル $\phi(t, \mathbf{r})$ だけによって速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ が決まる流れのことをポテンシャル流と呼ぶ。また、この場合の連続の式とオイラーの方程式は

$$\Delta\phi = 0, \quad P = \rho \left[C - \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) \right] \quad (7.2)$$

となる。ただし $\Delta\phi \equiv \nabla \cdot \nabla\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi$ 。特に、速度場 \mathbf{v} はラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ を解けば決まる。今回は、そのようにして得られる流れの性質と具体例を紹介する。

7.1 等ポテンシャル面と流線

各時刻 t について、速度ポテンシャル $\phi(t, \mathbf{r})$ が一定となる面 (等ポテンシャル面) を

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \phi(t, x, y, z) = C(t) \quad (7.3)$$

で定める。この式は、 C の値ごとに3次元空間内の2次元面を与える (図13参照)。等ポテンシャル面は平面上の等高線のようなもので、 $\phi(t, x, y, z)$ の分布に対応して3次元空間内に層状に広がった等ポテンシャル面の族が生じる。

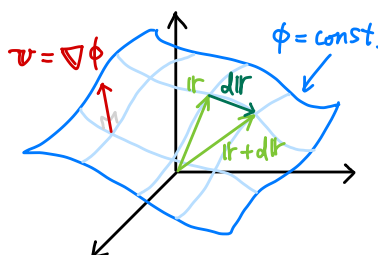


図 13: 等ポテンシャル面と速度場

等ポテンシャル面 $\phi = C$ と速度場 \mathbf{v} との間には、等ポテンシャル面の垂線方向が速度場という関係がある。

(\because) ある等ポテンシャル面上のある接ベクトルを $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ とする。 $d\mathbf{r}$ は等ポテンシャル面上にあるのだから、位置を \mathbf{r} から $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ にずらしても ϕ の値は変化しない。そのため、以下の式が満たされる：

$$\phi(t, \mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \phi(t, \mathbf{r}) = C \quad (7.4)$$

この式を変形し、 $d\mathbf{r}$ が微小な場合に式を展開すると

$$0 = \phi(t, \mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \phi(t, \mathbf{r}) = \left(\phi(t, \mathbf{r}) + \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz}_{=\nabla\phi \cdot d\mathbf{r}} \right) - \phi(t, \mathbf{r}) = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.5)$$

この式 $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$ は速度場 \mathbf{v} と等ポテンシャル面の接ベクトル $d\mathbf{r}$ が垂直であることを示している。そのため、等ポテンシャル面と速度場は常に直交する。

速度場をつないでいって作られる流線も等ポテンシャル面と垂直になる。そのため、 $\phi(t, \mathbf{r})$ が与えられたら、それに対応する等ポテンシャル面の構造を考えると、その垂線方向の曲線が流線となっている。なお、速度ポテンシャル・速度場・流線は、電磁気学の等電位面・電場・電気力線とそれぞれ対応している。

7.2 ポテンシャル流の具体例

7.2.1 一様流

最も簡単なポテンシャル流の例は、速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ がどの位置 \mathbf{r} でも等しい一様流である：

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) . \quad (7.6)$$

この速度場に対応する速度ポテンシャル ϕ は

$$\phi(t, \mathbf{r}) = v_x(t)x + v_y(t)y + v_z(t)z = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} . \quad (7.7)$$

実際、この ϕ の勾配 $\nabla\phi$ は式 (7.6) の速度場 \mathbf{v} を与える。この ϕ についての等ポテンシャル面 $\phi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = C$ は速度場 \mathbf{v} に垂直な平面となる。また、 ϕ が満たすべきラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ も満たされている。

式 (7.7) の勾配は

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \quad (7.8)$$

となり、式 (7.6) の $\mathbf{v}(t)$ に等しくなる。また、式 (7.7) の ϕ は x, y, z の一次関数なので、 x, y, z についての二階微分はゼロとなり、 $\Delta\phi \equiv \nabla \cdot \nabla\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0$ も満たされる。

7.2.2 湧き出し (吸い込み) 口まわりの流れ

次に簡単な例は速度場 \mathbf{v} が等方的 (原点などの基準点から見てどの向きも同じ) となる場合である。このとき流れは球対称となるので、流れの記述やラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ を解く際には極座標 (r, θ, φ) を用いるのが最も便利である (図 14a 参照)。

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (7.9)$$

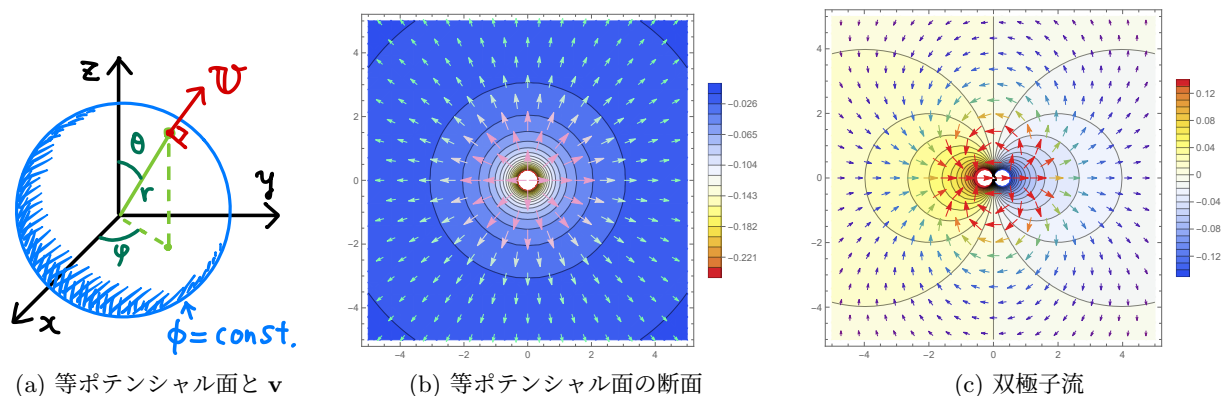


図 14: (a) 原点を中心とする極座標と、原点に湧き出しがある場合の等ポテンシャル面と速度場 \mathbf{v} . (b) 等ポテンシャルと速度場の 2次元断面。 (c) 双極子ポテンシャル (7.25) とそれに対応する速度場。図は \mathbf{a} が x 軸向きの単位ベクトルで $Q = 1$ の場合である。

この座標系で、 ϕ のラプラシアン $\Delta\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi$ は

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2\phi}{\partial \varphi^2} \quad (7.10)$$

となる。導出は本講義では省略する。また、球対称な流れについては速度ポテンシャルも球対称となり、角度座標 θ, φ には依存しなくなる ($\phi = \phi(t, r, \theta, \varphi)$)。そのため、 ϕ を定めるラプラス方程式は

$$0 = \Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) \quad \therefore \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) = 0. \quad (7.11)$$

この式を2回 r について積分すると

$$r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} = A(t) \quad \Rightarrow \quad \phi = \int \frac{\partial\phi}{\partial r} dr = \int \frac{A(t)}{r^2} dr = -\frac{A(t)}{r} + B(t). \quad (7.12)$$

ただし、 $A(t), B(t)$ は r 積分で現れた積分定数で、 t の任意関数である。このうち、 $B(t)$ の方は速度場 \mathbf{v} に影響を与えない ($\mathbf{v} = \nabla\phi$ で $\nabla B(t) = 0$ となるため)。そこで $B(t) = 0$ とすると、 ϕ と \mathbf{v} はそれぞれ

$$\phi = -\frac{A(t)}{r}, \quad \mathbf{v} = \nabla\phi = \left(\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial r}}_{v_r}, \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}}_{v_\theta}, \underbrace{\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}}_{v_\varphi} \right) = \left(\frac{A(t)}{r^2}, 0, 0 \right). \quad (7.13)$$

速度場は r 成分だけを持ち、原点から外向きに伸びる球対称なベクトル場となる。また、等ポテンシャル面は原点を中心とする球面となる (図 14a, 14b 参照)。

[流体の湧き出し] 式 (7.13) の \mathbf{v} は原点から外向き ($A > 0$ の場合。 $A < 0$ の場合は内向き) を向いているので、**原点からの流体の湧き出し** ($A < 0$ の場合は吸い込み) がある。この量を評価してみる。

単位時間あたりに半径 r の球面 S を通過する流体の体積を Q とすると、その大きさは

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \underbrace{v_r r^2}_{=\frac{A}{r^2} r^2} \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi^2 A(t). \quad (7.14)$$

この流出量 Q は半径 r に依存しないので、 $r \rightarrow 0$ とし原点近傍だけを囲むようにした場合でも湧き出しがある。これは原点から流体が湧き出していることを表している。改めて、速度ポテンシャルを Q で表すと

$$\phi(t, r) = -\frac{Q(t)}{4\pi r}. \quad (7.15)$$

[湧き出しのある場合の ϕ の方程式] 式 (7.15) は原点以外ではラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ を満たすが、実は原点直上に流体の湧き出しに対応するデルタ関数型の寄与が入っている (このタイプの方程式をポアソン方程式と呼ぶ):

$$\Delta\phi = Q(t)\delta(\mathbf{r}). \quad (7.16)$$

$\delta(\mathbf{r})$ は原点直上だけで値を持つ3次元のデルタ関数で、原点を含む領域で体積積分したときに $\int \delta(\mathbf{r}) dV = 1$ となる³⁰。

式 (7.15) の左辺を \mathbf{v} で書き直すと $\Delta\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla \cdot \mathbf{v}$ となるが、前回の講義や式 (4.32) で説明した通り $\nabla \cdot \mathbf{v}$ は流体の体積の湧き出しに対応する。今回の場合は原点に局在した湧き出し $\text{div } \mathbf{v} = Q(t)\delta(\mathbf{r})$ があることになる。

式 (7.16) が成立することを確認するためには、この式の左辺・右辺をそれぞれ原点を含む領域 V で積分してみる:

$$\text{式 (7.16) 左辺: } \int_V \Delta\phi dV = \int_V \nabla \cdot \nabla\phi dV = \int_S \nabla\phi \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = Q(t) \quad (7.17)$$

$$\text{式 (7.16) 右辺: } \int_V Q(t)\delta(\mathbf{r}) dV = Q(t). \quad (7.18)$$

³⁰式 (7.15), (7.16) で $Q(t) = 1$ とした場合に得られる式 $-\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{r} = \delta(\mathbf{r})$ をデルタ関数 $\delta(\mathbf{r})$ が満たす式として用いるのも便利である。

式 (7.17) の 2 番目の等号ではガウスの定理を用いて積分を V の表面 S 上の面積分に書き換え、また最後の等式では式 (7.14) を使った。式 (7.17), (7.18) は互いに等しくなっているが、これは原点を含む任意の領域 V の取り方について成立するため、被積分関数同士 ($\Delta\phi$ と $Q(t)\delta(\mathbf{r})$) がそもそも等しくなっている必要がある。そのため式 (7.16) が成立する。

7.2.3 双極子流

[解の重ね合わせ] 速度ポテンシャルを定める式 (7.16) は ϕ についての線形方程式なので、2 つの解を重ね合わせたものも解となる。例えば、位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ に湧き出し $Q_1(t)$ がある場合の解を ϕ_1 , $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ に湧き出し $Q_2(t)$ がある場合の解を ϕ_2 とすると³¹

$$\Delta\phi_1 = Q_1(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad \Delta\phi_2 = Q_2(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2). \quad (7.19)$$

式 (7.19) の 2 つの方程式の両辺をそれぞれ足し合わせてみると

$$\Delta(\phi_1 + \phi_2) = Q_1(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + Q_2(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \quad (7.20)$$

という式が得られる。この式は、位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ に湧き出し $Q_1(t), Q_2(t)$ が同時に存在する場合の解 ϕ が単に解 ϕ_1, ϕ_2 を足し合わせたもの ($\phi = \phi_1 + \phi_2$) で与えられるということを意味する。

[双極子ポテンシャル] 無限小の距離だけ離れた湧き出し点 ($Q > 0$) と吸い込み点 ($-Q$) のペアが作る速度ポテンシャル ϕ を双極子ポテンシャルと呼ぶ。

双極子ポテンシャルとそれに対応する流れを作るために、まず $\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$ に湧き出し Q が、 $\mathbf{r} = -\frac{1}{2}\mathbf{a}$ に湧き出し $-Q$ がある場合を考えると、 ϕ を定める方程式は

$$\Delta\phi = Q\delta\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) - Q\delta\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{a}\right). \quad (7.21)$$

この式の解は、湧き出し $Q\delta(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a})$ に対する解 $\phi = \phi_+$, $-Q\delta(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{a})$ に対する解 $\phi = \phi_-$ を個別に求めておき、それらを足し合わせれば得られる。式 (7.16) に対する解が式 (7.15) だったことを思い出すと、これら 2 つの解は

$$\Delta\phi_{\pm} = \pm Q\delta\left(\mathbf{r} \mp \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) \Rightarrow \phi_{\pm} = -\frac{\pm Q}{4\pi|\mathbf{r} \mp \frac{1}{2}\mathbf{a}|}. \quad (7.22)$$

したがって、湧き出し・吸い込みが同時に存在する場合の式 (7.21) の解は

$$\phi = \phi_+ + \phi_- = -\frac{Q}{4\pi|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a}|} - \frac{-Q}{4\pi|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{a}|} = -\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{a}|}\right). \quad (7.23)$$

双極子を作るために、式 (7.23) の解について湧き出し・吸い込み点の間の距離 $|\mathbf{a}|$ をゼロにする極限をとる。ここで、 \mathbf{a} が微小なとき、 $\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a}|}$ は

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{4}a^2}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^2} + \mathcal{O}(a^2)\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{2r^2}\right) + \mathcal{O}(a^2) \quad (7.24)$$

を満たす。ただし $r \equiv |\mathbf{r}|, a \equiv |\mathbf{a}|$ 。これを用いて、式 (7.23) を \mathbf{a} が微小だとして展開すると

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{a}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{a}|}\right) \simeq -\frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{2r^2}\right) - \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{2r^2}\right)\right] = -\frac{Q}{4\pi}\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} = -\frac{Q}{4\pi}\frac{a \cos\theta}{r^2}. \quad (7.25)$$

これが双極子ポテンシャルである (図 14c 参照)。ただし、 θ はベクトル \mathbf{a} の向きから測った角度である。また、導出の際は $a \rightarrow 0$ の場合に注目したが、 a が一般の (微小ではない) 値の場合でも式 (7.25) を双極子ポテンシャルと呼ぶ。

³¹7.2.2 節で考えた式 (7.16) は、原点 $\mathbf{r} = 0$ に湧き出し $Q(t)$ がある場合に相当する。

式 (7.23) で $\mathbf{a} \rightarrow 0$ をよく見ると、単極子ポテンシャル (7.15) について微分をとる式に $-\mathbf{a}$ をかけたものにちょうど一致している。そのため、双極子ポテンシャル (7.25) は式 (7.15) に $-\mathbf{a} \cdot \nabla$ を作用させたものと一致する：

$$-\mathbf{a} \cdot \nabla \left(-\frac{Q(t)}{4\pi r} \right) = \mathbf{a} \cdot \left(-\frac{Q(t)}{4\pi r^2} \nabla r \right) = -\frac{Q(t)}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r} = -\frac{Q(t)}{4\pi} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (7.26)$$

2 番目の等号では式 (7.27) を用いた。

[双極子流の速度場]

ポテンシャル (7.25) に対応する速度場 \mathbf{v} を求める。そのために必要となる計算を以下の通り先にやっておく：

$$\frac{\partial}{\partial x_i} r = \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{r} \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3) = a_i. \quad (7.28)$$

ただし $i = 1, 2, 3$, $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ である。これを使うと、ポテンシャル (7.25) を x_i で微分して得られる速度 v_i は

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} \right) = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^4} \frac{\partial}{\partial x_i} r \right) = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{a_i}{r^3} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^5} x_i \right). \quad (7.29)$$

これをベクトル形式 ($\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ など) で表せば

$$\mathbf{v} = \nabla \phi = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{a}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^5} \mathbf{r} \right). \quad (7.30)$$

これを図示すると図 14c のようになり、湧き出しから出た流体が広がりながら反対側に位置する吸い込みに流れ込んでいく様子が見てとれる。隣接する正電荷・負電荷がつくる静電ポテンシャルおよび電場と同様の構造である。

なお、次回の講義でこの双極子流が流体中を移動する球体の周りの流れと密接に関係していることを見る。

7.2.4 連続的に分布した湧き出しの場合

一般に、連続的に分布した湧き出し $q(t, \mathbf{r})$ がある場合には、速度ポテンシャルが満たす方程式は

$$\Delta \phi(t, \mathbf{r}) = \int q(t, \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = q(t, \mathbf{r}) \quad (7.31)$$

と、地点 \mathbf{r}' の位置にある湧き出し $q(t, \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ を空間積分したもので右辺が与えられる。これに対応して、 $\phi(t, \mathbf{r})$ は以下の式で与えられる：

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{q(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (7.32)$$

体積積分 $\int \dots dV'$ は、湧き出しの空間分布を表すのに用いた座標 \mathbf{r}' についての積分である。

第8回 具体例：物体の周りの流れ

前回の講義に引き続き、非圧縮完全流体の渦なし流の具体例について解説する。今回は特に、流体中の物体の周りの流れを取り扱うための方法について議論する。

[復習] 非圧縮完全流体の渦なし流については、速度場 \mathbf{v} が速度ポテンシャル ϕ で表せて

$$\rho = \rho_0, \quad \mathbf{v} = \nabla\phi \quad (8.1)$$

となる。この ρ, \mathbf{v} に対する連続の式とオイラーの方程式は

$$\Delta\phi = 0, \quad P = \rho \left[C - \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) \right]. \quad (8.2)$$

特に、速度ポテンシャルはラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ を解けば決まる。

ラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ の解は境界条件を与えれば一意に定まる。流体中に物体があり水を押しつけている場合には、物体の運動に合わせて流体の速度場も影響を受け、物体の表面で速度場 \mathbf{v} が特定の値を取るようになる。これに対応して、速度ポテンシャル ϕ にも何らかの境界条件が物体表面（と無限遠）で課される。この境界条件を使って $\Delta\phi = 0$ を解き ϕ を求めることで、流体全体にわたる速度場 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ が決定される。以下でこの手順を一つずつ追っていく。

8.1 物体表面の境界条件

物体の表面で流体がどのように振る舞うかは、流体及び物体表面の性質によりさまざまである。今回は、物体表面と流体は摩擦なく滑る場合に、物体が流体中を速度 \mathbf{u} で運動すると流体の速度場 \mathbf{v} にどのような影響が生じるかを考える。

[表面の接線方向] 「物体の表面と流体は摩擦なく滑る」場合、流体が物体の表面に沿って流れても特に抵抗力が発生せず、流体の速度も影響を受けない。そのため、速度場 \mathbf{v} の物体表面に平行な成分は任意となる³²。

[表面の垂直方向] 物体表面で流体が滑る場合でも、表面に垂直な方向については表面を押し / 引くとその分流体も動く。すなわち、速度場 \mathbf{v} の物体表面に垂直な成分は、物体表面の速度の垂直成分と一致する。これを数式で書くと

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n} \cdot \nabla\phi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}. \quad (8.3)$$

ただし、 \mathbf{n} は物体表面についての単位法線ベクトルである。

式 (8.3) は速度ポテンシャル $\phi(t, \mathbf{r})$ が固体表面の位置で満たすべき境界条件となる。これに加え、無限遠 $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ でも $\phi(t, \mathbf{r})$ に何らかの境界条件を課す必要がある。例えば、無限遠で流速がゼロとなる場合には $|\nabla\phi| \rightarrow 0$ (遠方で ϕ が定数に収束) となる。

8.2 具体例：一様流中の球体

流体中の物体によって引き起こされる流体の運動の具体例として、速度 \mathbf{V} の一様流の中に静止した球体 (半径 R) を置くときに生じる流れについて考える (図 15a 参照)。この場合、速度場は定常 ($\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$) となる。

³²物体表面と流体との間に摩擦力が働く場合には、物体表面に対して流体が動かない ($\mathbf{v} = \mathbf{u}$) という条件を課することになる。

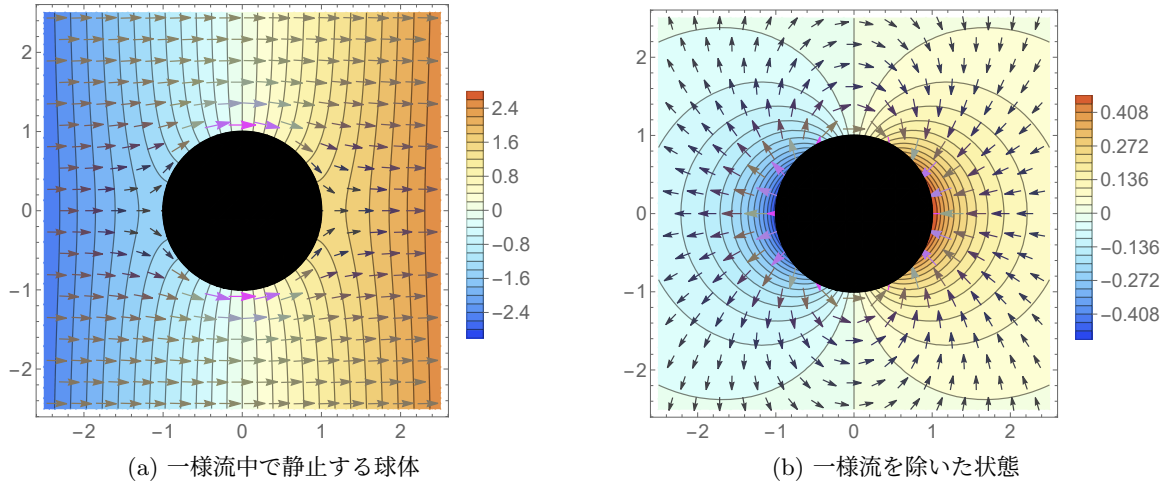


図 15: (a) 一様な流れの中に静止した球体をついた場合の流れ (矢印) と速度ポテンシャル (等高線)。一様流は右方向に流れている。(b) 前の図から一様流の成分を除いたもの。式 (8.5), (8.6) で定義される \mathbf{W}, ϕ_W に対応する。静止した流体中を球体が左に動く場合の流れもこの図で表される。

8.2.1 境界条件

球体が静止しているとき、その表面の位置で速度場 \mathbf{v} (もしくは速度ポテンシャル $\nabla\phi$) が満たす境界条件 (8.3) は、物体の速度がゼロ ($\mathbf{u} = 0$) となることに留意すると

$$\mathbf{n} \cdot \underbrace{\mathbf{v}}_{=\nabla\phi} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (8.4)$$

すなわち球面に垂直な速度の成分はゼロとなる。また、球体から十分遠方では速度 \mathbf{V} の一様流に漸近する ($|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ で $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{V}$) という条件も必要になる。

8.2.2 \mathbf{v} の分解

前節でまとめた境界条件を満たす速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ を構成するにあたり、

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} + \mathbf{W}(\mathbf{r}) \quad (8.5)$$

と分解する。この右辺のうち、第一項 \mathbf{V} が一様流の成分、 $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ が球体をついたことによるずれの成分となる。これに対応して、この $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ を与える速度ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_V(\mathbf{r}) + \phi_W(\mathbf{r}) \quad (8.6)$$

と分解される。ただし、 ϕ_V, ϕ_W はそれぞれ速度場 \mathbf{V}, \mathbf{W} に対応する速度ポテンシャル ($\mathbf{V} = \nabla\phi_V$, $\Delta\mathbf{W} = \nabla W$) で、どちらもラプラス方程式を満たす ($\Delta\phi_V = 0, \phi_W = 0$)。ラプラス方程式は ϕ について線型方程式なので、2つの解を重ね合わせたものも解となる：

$$\Delta\phi_V = 0, \quad \Delta\phi_W = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(\phi_V + \phi_W) = 0. \quad (8.7)$$

したがって、式 (8.6) の $\phi = \phi_V + \phi_W$ もラプラス方程式の解 ($\Delta\phi = 0$) となる。

8.2.3 ϕ_V を求める

上で導入した ϕ_V, ϕ_W のうち、 ϕ_V については簡単に構成できる。 $\mathbf{V} = \nabla\phi_V$ を満たす関数 ϕ_V を見つければよいわけだが

$$\mathbf{V} = \nabla\phi_V \quad \Leftrightarrow \quad \phi_V = \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} \quad (8.8)$$

とすればよい。

〔例〕 $\mathbf{V} = (V_x, 0, 0)$ の場合 $\phi_V = \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} = V_x x$ となる。この ϕ_V について $\nabla \phi_V$ を計算してみると $\nabla \phi_V = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z} \right) V_x x = (V_x, 0, 0) = \mathbf{V}$ となり、たしかに ϕ_V から \mathbf{V} が再現される。

8.2.4 ϕ_W を求める

今度は ϕ_W を構成する。こちらについては、ラプラス方程式 $\Delta \phi_W = 0$ の解で、境界条件 (8.4) を満たすものを見つける必要がある。

[W の境界条件] 式 (8.4) は $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{W}$ についての境界条件だったので、 \mathbf{W} についての境界条件に書き換える必要がある。

$$0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{W}) \quad \therefore \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = -V \cos \theta. \quad (8.9)$$

ただし、 θ は \mathbf{V} の向きから測った角度で、この式が球の表面 ($|\mathbf{r}| = R$) で満たされている必要がある。

また、無限遠では $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{V}$ となるという条件があったが、これに対応して無限遠では $|\mathbf{W}| \rightarrow 0$ となる必要がある。

[方針] ϕ_W を求める方針としては以下の 2 通りが考えられる。

- [直接解法] ラプラス方程式 $\Delta \phi_W = 0$ の一般解を求めて、境界条件 (8.9) を満たすものを探す。一般解は任意パラメタを含むが、これを境界条件に合わせて調整することで解を作る。
- [発見法] ラプラス方程式 $\Delta \phi_W = 0$ と境界条件 (8.9) を満たす解を何らかの方法で見つける。境界条件が与えられればラプラス方程式の解は一つしか存在しないので、見つけたその解が求めるべき解になっている。

今回は後者の方法で ϕ_W を求める。

[復習：双極子流] 前回の講義 (7.2.3 節) で、無限小離れた湧き出し点・吸い込み点のペアが作る双極子ポテンシャルとそれに対応する双極子流を導入した。その表式を再掲すると

$$\phi_d \equiv -\frac{Q \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{4\pi r^3} = \mathbf{a} \cdot \nabla \left(\frac{Q}{4\pi r} \right), \quad \mathbf{v}_d \equiv \nabla \phi = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{a} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^5} \mathbf{r} \right). \quad (8.10)$$

この ϕ は原点直上以外ではラプラス方程式 $\Delta \phi = 0$ を満たす。後々この速度場を球の周りの流れに応用したいので、原点を中心とする半径 $|\mathbf{r}| = R$ の球面上で $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ をこの速度場 \mathbf{v}_d について計算するとどのような式になるかを見ておく。まず、球面上の単位法線ベクトル \mathbf{n} は

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}. \quad (8.11)$$

これを用いて $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d$ を球面 $|\mathbf{r}| = R$ の上で評価すると

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d|_{|\mathbf{r}|=R} = \frac{\mathbf{r}}{R} \cdot \left[-\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{a} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^5} \mathbf{r} \right) \right] \Big|_{|\mathbf{r}|=R} \quad (8.12)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi R} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) \Big|_{|\mathbf{r}|=R} \quad (8.13)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi R} \left(\frac{1}{R^3} Ra \cos \theta - \frac{3Ra \cos \theta}{R^5} R^2 \right) = +\frac{Qa}{2\pi R^3} \cos \theta. \quad (8.14)$$

ただし、 θ はベクトル \mathbf{a} の向きから測った角度で、また球面 $|\mathbf{r}| = R$ 直上で

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}|_{|\mathbf{r}|=R} = R^2, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}|_{|\mathbf{r}|=R} = Ra \cos \theta \quad (8.15)$$

となることを計算の途中で使った。

[境界条件を使って ϕ_W を決定]

双極子流から求めた式 (8.14) には係数 Qa がかかっており、これが \mathbf{W} の満たすべき境界条件 (8.9) と一致するようにこの係数を決めれば速度場 $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ (および ϕ_W) が再現できる。これらの式が互いに等しいとおくと

$$-V \cos \theta = \frac{Qa}{2\pi R^3} \cos \theta \quad \therefore \quad Qa = -2\pi R^3 V. \quad (8.16)$$

これを式 (8.10) に代入すると、式 (8.9) の境界条件を満たす速度ポテンシャル ϕ_W および速度場 $\mathbf{W} = \nabla \phi_W$ が得られる。ただし、 $a = |\mathbf{a}|$ であったことを踏まえて $Q\mathbf{a} = -2\pi R^3 \mathbf{V}$ を代入する。

$$\phi_d = -\frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} = \mathbf{a} \cdot \nabla \left(\frac{Q}{4\pi r} \right) \quad \xrightarrow{Q\mathbf{a} \rightarrow -2\pi R^3 \mathbf{V}} \quad \phi_W = \frac{R^3}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^3} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{R^3}{2r} \right) \quad (8.17)$$

$$\mathbf{v}_d = \nabla \phi = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{a} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^5} \mathbf{r} \right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W} = \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \right) \quad (8.18)$$

実際、式 (8.18) の \mathbf{W} は以下の通り球の表面 $|\mathbf{r}| = R$ における境界条件 (8.9) を満たす：

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{W} \Big|_{|\mathbf{r}|=R} = \frac{\mathbf{r}}{R} \cdot \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \right) = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) = -V \cos \theta. \quad (8.19)$$

8.2.5 \mathbf{v} の表式

式 (8.5) で定義した通り、一様流中に球体を置いた時の速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は一様流 \mathbf{V} と球体を置いたことによる流れの変化分 $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ との和で与えられる。その表式は

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} + \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} + \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \right). \quad (8.20)$$

これを図示したのが図 15a の矢印で、球体を避けるように流体が運動している様子が見て取れる。なお、図 15b は \mathbf{W} だけを図示したものである。

また、この \mathbf{v} に対応する速度ポテンシャルは

$$\phi = \phi_V + \phi_W = \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} + \frac{R^3}{2} \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (8.21)$$

8.2.6 \mathbf{v} の性質

以上の計算で得られた速度場 \mathbf{v} (8.20) の特徴を 2 点だけ説明しておく。

- [よどみ点] 一様流が流れてくる方向から見た時の球の正面および後端の位置 ($\mathbf{r} = \mp \frac{R}{V} \mathbf{V}$) における \mathbf{v} の表式は、 $r = |\mathbf{r}| = R$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{V} = \mp \frac{R}{V} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \mp RV$ となることを使うと

$$\mathbf{v} \Big|_{\mathbf{r}=\mp \frac{R}{V} \mathbf{V}} = \mathbf{V} + \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \right) \Big|_{\mathbf{r}=\mp \frac{R}{V} \mathbf{V}} \quad (8.22)$$

$$= \mathbf{V} + \frac{R^3}{2} \underbrace{\left[\frac{1}{R^3} \mathbf{V} - \frac{3(\mp RV)}{R^5} \left(\mp \frac{R}{V} \mathbf{V} \right) \right]}_{=-\frac{2}{R^3} \mathbf{V}} = 0. \quad (8.23)$$

すなわち、一様流の向きから見た球の正面および後端の位置で流速はゼロとなる (図 15a の $x = \pm 1, y = 0$ の点)。このような流速がゼロとなる点はよどみ点と呼ばれる。

- [球体の横の速度] 一様流の向きを基準としたときの球体の真横の点 ($r = R, \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} = 0$ となる位置) における流速は

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \right) = \mathbf{V} + \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{R^3} \mathbf{V} - 0 \right) = \frac{3}{2} \mathbf{V}. \quad (8.24)$$

すなわち、球体の真横の点の流速は一様流の 1.5 倍の速度になっている。球体が押しつけた分の流体が球の側面付近を通るために流速が速くなっている。

8.3 静止流体中で運動する球体

先ほどは一樣流の中に静止する球体を考えたが、ニュートン力学における**ガリレイ変換** (同じ物理系を等速度運動する観測者から見る) を用いれば**静止する流体中を球体が等速度で運動する場合の結果も直ちに得られる**。

[**ガリレイ変換**] 静止した観測者から見た粒子の位置と速度を $\mathbf{r}, \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ としたとき、同じ粒子を一定の速度 \mathbf{V} で運動する観測者から見たときの位置と速度を $\mathbf{r}', \mathbf{V}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ とすると

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t, \quad \mathbf{V}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{V} \quad (8.25)$$

すなわち、速度 \mathbf{V} で動く観測者からは、粒子の速度が $-\mathbf{V}$ だけ変化して見える。この座標変換はニュートン力学における**ガリレイ変換**として知られている。

[**流体静止系**] ガリレイ変換を使って、先ほどの計算結果で**一樣流が静止して見える座標系**に移ってみる。一樣流は速度 \mathbf{V} で運動していたので、これと同じ速度 \mathbf{V} で運動しながら観測すると一樣流は静止して見える。この変換で、ガリレイ変換 (8.25) に従い球体の速度は 0 から $-\mathbf{V}$ に変化する。また、流体全体の速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}') = \mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{V} \Big|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' - \mathbf{V}t} = \mathbf{V} + \mathbf{W}(\mathbf{r}) - \mathbf{V} \Big|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' - \mathbf{V}t} = \mathbf{W}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' - \mathbf{V}t} . \quad (8.26)$$

すなわち、先ほど求めた速度場 \mathbf{W} が (位置座標を $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' - \mathbf{V}t$ と書き換える必要がある以外は) 静止流体中を速度 $-\mathbf{V}$ で運動する球体がおこす流れの速度場ということになる。球体の進行方向側の流体が押されて球体の後ろ側に回り込む流れ (**バックフロー**) が生成される (図 15b 参照)。

8.4 物体にかかる圧力と力

再び一樣流中で**静止する球体**について考え、**球体の表面上の圧力**を求めてみる。そのためにはオイラーの方程式 (8.2) を用いる。

$$P = \rho \left[C - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + U \right) \right] \quad (8.27)$$

今回外力は考えないので $U = 0$ としてよく、また定常流なので $\partial \phi / \partial t = 0$ となる。このとき

$$P = \rho C - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 = P_0 - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 . \quad (8.28)$$

ただし、右辺の定数部分を $\rho C \equiv P_0$ と書き換えた。 P_0 は流速が $\mathbf{v} = 0$ となる点の圧力であり、例えば 8.2.6 節で説明した**よどみ点における圧力**がこれにあたる。

球体の表面直上 ($|\mathbf{r}| = R$) における P の振る舞いを調べるために、まず \mathbf{v} および $|\mathbf{v}|^2$ の表式を書き下すと

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} + \frac{R^3}{2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{V} - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{r^5} \mathbf{r} \right) \Big|_{|\mathbf{r}|=R} = \frac{3}{2} \left(\mathbf{V} - \frac{V \cos \theta}{R} \mathbf{r} \right) \quad (8.29)$$

$$|\mathbf{v}|^2 = \left| \frac{3}{2} \left(\mathbf{V} - \frac{V \cos \theta}{R} \mathbf{r} \right) \right|^2 = \frac{9}{4} \left(V^2 - \frac{2V \cos \theta}{R} \underbrace{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}_{=V R \cos \theta} + \frac{V^2 \cos^2 \theta}{R^2} |\mathbf{r}|^2 \right) = \frac{9}{4} V^2 \sin^2 \theta \quad (8.30)$$

$= V^2 (1 - \cos^2 \theta)$

θ は \mathbf{V} の向きから測った角度である。したがって、球の表面上の圧力分布は

$$P = P_0 - \frac{9}{8} \rho V^2 \sin^2 \theta . \quad (8.31)$$

よどみ点 ($\theta = 0, \pi$) で圧力が最大 ($P = P_0$) となり、流速が最大となる球体の側面 ($\theta = \pi/2$) で圧力が最小 ($P = P_0 - \frac{9}{8}\rho V^2$) となる。

[物体にかかる力] 圧力 P が物体の表面にかかっているとき、表面上の面積 ΔS の部分には面の垂直方向に $P\Delta S$ だけの力がかかる。これを積分すれば、**流体の流れが球体に及ぼす力 \mathbf{F}** を求められる。

今回考える物体は原点に置かれた半径 R の球体なので、表面上の位置 \mathbf{r} ($|\mathbf{r}| = R$) における微小面積 ΔS にかかる力は $-P(\mathbf{r})\Delta S \frac{\mathbf{r}}{R}$ である³³。この力を球体の表面全体で積分すれば球体にかかる力 \mathbf{F} が求められる。

$$\mathbf{F} = \int \left(-P(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{R} \right) dS = \underbrace{\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} R \sin\theta d\phi}_{=f dS} \left[- \left(P_0 - \frac{9}{8}\rho V^2 \sin^2\theta \right) \right] \frac{\mathbf{r}}{R}. \quad (8.32)$$

この積分で重要な点は、被積分関数が $f(\sin\theta)\mathbf{r}$ の形をしていることである。係数部分 $f(\sin\theta)$ は球体の側面の位置 ($\theta = \pi/2$) を基準として反転対称 ($\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ と $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ で $f(\sin\theta)$ は同じ値) となる。一方、位置ベクトル \mathbf{r} の成分は球面上の反対の点を考えるとちょうど符号が反転する。この二つの性質を踏まえて式 (8.32) を改めて見ると、**球面上全体にわたる積分値はゼロ**となることがわかる。

[ダランベールの背理] 先ほど**流体中の球体にかかる力はゼロ**という結論が得られたが、これは日常的な物理現象から得られる直感 (物体は流れの方向に力を受けそう) に反するため、一見矛盾しているように思われるという意味で**ダランベールの背理**^{パラドックス}と呼ばれている。

このような現象が起きる理由は、図 15b からわかる通り、球体の前面で押された流体が物体の背面に回り込む流れ (バックフロー) が実現されており、そのため**物体が流体に与える運動量の合計がゼロ**となることからくる。これは**粘性のない完全流体**を考えたために生じた現象で、**粘性流体では流れの方向に力がかかる**ことになる。

完全流体は取り扱いが簡単かつ応用上も重要な反面、現実的な流体の解析に使おうとすると注意が必要という側面もある、というのがこの例から得られる教訓の一つである。

³³ $-\frac{\mathbf{r}}{R}$ は球面から内側向きに伸びる単位法線ベクトルで、圧力による力はこの向きにかかる。

第9回 流体の波動

前回までの講義では、どちらかという定常的な流体の流れに注目して解析を行ってきた。今回以降の講義ではより一般的な流体の運動に注目する。特に、気体をはじめとする流体中を伝わる**波動**について詳しく解析を行う。

9.1 音波

流体中を伝わる波動のもっとも簡単な例の一つは、密度の変化が音速で伝わっていく音波である。密度が上がると圧力が上がるが、そのために生じる圧力勾配力は流体の圧力を下げる向きにかかるため、密度の値をもとの値に戻そうとする**復元力**としての役割を果たす。この復元力のために流体の振動が発生するが、これが空間的に伝わっていくのが音波の伝搬である。

9.1.1 設定

簡単のため、 x 軸方向に伝搬する平面波の音波について考えることにする。以下の仮定をおく。

- 音波がないときは流体は静止している。その際の密度を $\rho = \rho_0$ (一定) とする。
- 密度が ρ_0 から**微小に変化**した場合を考える。すなわち

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \rho_0 + \delta\rho(t, \mathbf{r}), \quad |\delta\rho(t, \mathbf{r})| \ll \rho_0. \quad (9.1)$$

今回は x 方向に伝搬する平面波を考えるので、 $\delta\rho$ は t と x だけに依存する ($\delta\rho = \delta\rho(t, x)$)。

- 微小圧力変化 $\delta\rho$ に対応して、速度場も微小に変化する。音波がない場合には流体は静止しており、なおかつ x 方向に伝搬する音波については流体は x 方向に振動する。すなわち

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \underbrace{v_0}_{=0} + \delta\mathbf{v}(t, x) = \delta\mathbf{v}(t, x), \quad \delta\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\delta v(t, x), 0, 0). \quad (9.2)$$

- 状態方程式は $P = P(\rho)$ で与えられる。
- 流体に外力はかかっていない (オイラーの方程式で $\mathbf{f} = 0$)。

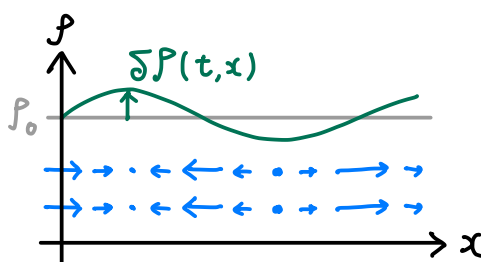


図 16: x 依存性を持つ微小圧力変化 $\delta\rho(t, x)$ とそれに対応する流体の平衡位置からのずれ (青矢印)。後者を時間微分したものが $\delta v(t, x)$ である。

9.1.2 摂動方程式

9.1.1 節の設定のもと、 $\delta\rho(t, \mathbf{r})$ (と $\delta\mathbf{v}$) の従う運動方程式を導出する。流体の運動方程式は**連続の式**と**オイラーの方程式**なので、これらに式 (9.1), (9.2) を代入し、 $\delta\rho, \delta\mathbf{v}$ が微小であるとして展開してみる。なお、 ρ, \mathbf{v} などの物理量の微小な変化 $\delta\rho, \delta\mathbf{v}$ のことを**摂動**、それらが従う運動方程式のことを**摂動方程式**と呼ぶ。摂動方程式は元の方程式と比べて単純化されており、その解析も容易になる。

[連続の式]

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \delta\rho) + \text{div}[(\rho_0 + \delta\rho)\delta\mathbf{v}] = \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \delta\mathbf{v} + \text{div}(\delta\rho \delta\mathbf{v}) \quad (9.3)$$

$$\therefore \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0. \quad (9.4)$$

式(9.3)で、 $\delta\rho \delta\mathbf{v}$ 項は二次の微小量であり $\delta\rho, \delta\mathbf{v}$ と比べて十分小さいため無視した。

[オイラーの方程式]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (9.5)$$

まず、式(9.5)の左辺は

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla) \delta\mathbf{v} \simeq \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \delta v}{\partial t}, 0, 0 \right) \quad (9.6)$$

となり、今回の場合は x 成分以外はすべてゼロになる。なお、 $(\delta\mathbf{v} \cdot \nabla) \delta\mathbf{v}$ 項は二次の微小量であり $\delta\mathbf{v}$ 項と比べて小さいため無視した。

一方、式(9.5)の右辺は、式(9.1)と状態方程式 $P = P(\rho)$ を使うと

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla P(\rho) &= -\frac{1}{\rho_0 + \delta\rho} \left(\frac{dP}{d\rho} \Big|_{\rho_0 + \delta\rho} \right) \nabla(\rho_0 + \delta\rho) = -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\delta\rho}{\rho_0} + \dots \right) \left(\frac{dP}{d\rho} \Big|_{\rho_0} + \frac{d^2P}{d\rho^2} \Big|_{\rho_0} \delta\rho + \dots \right) \nabla \delta\rho \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{dP}{d\rho} \Big|_{\rho_0} \right) \underbrace{\nabla \delta\rho}_{=(\partial_x \delta\rho, 0, 0)} + \mathcal{O}(\delta\rho^2). \end{aligned} \quad (9.7)$$

先ほどと同様、 $\delta\rho$ について二次以上の微小量(赤字部分)は $\delta\rho$ 項と比べて小さいため無視する。また、 $\delta\rho$ は t, x だけに依存するため、 $\nabla \delta\rho$ は x 成分($\frac{\partial \delta\rho}{\partial x}$)だけを持つ。

式(9.6), (9.7)を踏まえて、オイラーの方程式(の x 成分)を書き下すと

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{dP}{d\rho} \Big|_{\rho_0} \right) \frac{\partial \delta\rho}{\partial x}. \quad (9.8)$$

[波動方程式の導出]

連続の式とオイラーの方程式から得られた $\delta\rho, \delta v$ の方程式(9.4), (9.8)を改めてまとめると

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \delta v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{d\rho} \frac{\partial \delta\rho}{\partial x}. \quad (9.9)$$

$dP/d\rho$ は摂動がない $\rho = \rho_0$ の時の値で、今回の設定では t, x に依存しない定数となる。実は、この2つの方程式を一つの変数($\delta\rho$ か δv)についての二階微分方程式に書き換えることができる。第一式の時間微分(∂_t)をとり、その δv 項を第二式を用いて書き換えると

$$0 = \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial x}}_{=\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \delta v}{\partial t}} = \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{d\rho} \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} \right) \quad (9.10)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x^2} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \quad (9.11)$$

式(9.10)では、 δv が二階偏微分可能であり偏微分が可換($\frac{\partial^2 \delta v}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial t}$)であることを使った。すぐに説明するが、式(9.11)の形の微分方程式は**波動方程式**という名で知られている。

9.1.3 音波

式 (9.11) を解くと $\pm x$ 方向に伝搬する密度変化 $\delta\rho(t, x)$ の**波動**を表す解が得られる。今回の場合、これは流体中を伝搬する**音波**に他ならない。ひとまず、この音波を表す解を以下で構成する。

[波動方程式の一般解] 音波を表す解を構成するためには、やや天下りの的ではあるが式 (9.11) を

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta\rho(t, x) = 0 \quad (9.12)$$

と書き換えるとよい。実際、この式の左辺を展開すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta\rho(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} - c\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}\right) \quad (9.13)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} - c\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}\right) + c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} - c\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}\right) \quad (9.14)$$

$$= \left(\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - c\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t\partial x}\right) + c\left(\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial x\partial t} - c\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial x^2} \quad (9.15)$$

となり、式 (9.11) の左辺が再現される。最後の行では、偏微分が可換であること ($\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t\partial x} = \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial x\partial t}$) から第二、第三項が互いに打ち消しあうことを使った。なお、式 (9.12) で $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ を普通の数のようなものと思って因数分解の公式 $\partial_t^2 - (c\partial_x)^2 = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)$ と計算しても同じ結果が得られる。

式 (9.12) の微分演算子の形に基づき、以下の形の解を考えてみる。

$$\delta\rho(t, x) = f(ct - x) + g(ct + x) . \quad (9.16)$$

ただし、 $f(y), g(y)$ はそれぞれ x の任意関数で、上式では引数として y の代わりに $ct - x, ct + x$ を代入している。この $f(ct - x) + g(ct + x)$ は、それぞれ式 (9.12) に現れる各微分演算子をかけるとゼロになるという性質がある：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)f(ct - x) = \frac{\partial f(ct - x)}{\partial t} + c\frac{\partial f(ct - x)}{\partial x} \quad (9.17)$$

$$= \frac{df(y)}{dy}\bigg|_{y=ct-x} \underbrace{\frac{\partial(ct-x)}{\partial t}}_{=c} + c\frac{df(y)}{dy}\bigg|_{y=ct-x} \underbrace{\frac{\partial(ct-x)}{\partial x}}_{=-1} = \frac{df(y)}{dy}\bigg|_{y=ct-x} [c + c \times (-1)] = 0 . \quad (9.18)$$

同様の計算により $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)g(ct + x) = 0$ も示せる。したがって、式 (9.16) の $\delta\rho$ は波動方程式 (9.12) を自動的に満たす³⁴：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)(f(ct - x) + g(ct + x)) = 0 . \quad (9.19)$$

³⁴式 (9.19) について、関数 $g(ct+x)$ については微分演算子 $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)$ が直接かかっているため $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)g(ct+x) = 0$ から $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)g(ct+x) = 0$ が直ちに言える。一方、 $f(ct-x)$ については微分演算子 $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$ と関数 $f(ct-x)$ との間に別の微分演算子 $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)$ が挟まっているので、 $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)f(ct-x) = 0$ から $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)f(ct-x) = 0$ となることが言えるかを疑問に思うかもしれない。この問題は、微分演算子が互いに可換であることを使うなどして方程式の左辺を $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)f(ct-x)$ と変形しておけば回避される。また、式 (9.19) の形のまま計算しても

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)f(ct-x) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)(c - c \times (-1))f'(ct-x) \\ &= 2c\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)f'(ct-x) = 2c(c + c \times (-1))f''(ct-x) = 0 \end{aligned}$$

と、たしかに $f(ct-x)$ が方程式 (9.12) を満たすことを確認することもできる。ただし $f'(y) = \frac{df(y)}{dy}$, $f''(y) = \frac{d^2f(y)}{dy^2}$ 。

すなわち、波動方程式 (9.11) の解 $\delta\rho(t, x)$ は式 (9.16) で与えられることになる。なお、詳細は省略するが式 (9.16) の形の解が方程式 (9.11) の最も一般的な解 (一般解) となっており、任意の解 $\delta\rho(t, x)$ は必ず式 (9.16) の形に表せる。

[一般解の解釈] 結論から言うと、式 (9.16) のうち $f(ct - x)$ は x 軸の正の向きに、 $g(ct + x)$ は負の向きに伝搬する音波を表している。 $f(ct - x)$ は、 C を定数として

$$ct - x = C \quad \Leftrightarrow \quad x = ct - C \quad (9.20)$$

を満たす直線上で一定の値をとる (引数 $ct - x$ が一定値 C をとるため)。この式は、初期時刻で x の位置にあった f の波形が速度 c で移動し、 Δt 秒後には $x + c\Delta t$ の位置にあることを表している。同様に、 $g(ct - x)$ については g の波形が速度 $-c$ をもち $x - c\Delta t$ の位置に移動することになる (図 17 参照)。これを踏まえて改めて式 (9.16) を見ると、微小密度変化 $\delta\rho(t, x)$ がある時刻に存在した場合、それは x 軸の正・負の方向に速度 c で伝搬していくことがわかる。これが一般に音波と呼ばれているものである。また、伝搬速度 $c = \sqrt{dP/d\rho}$ は音速となる。

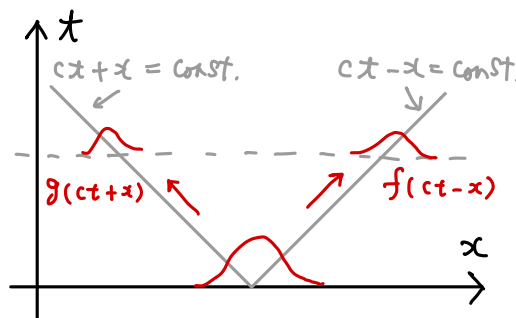


図 17: 波動方程式 (9.12) の一般解 (9.16)。 $f(ct - x)$, $g(ct + x)$ がそれぞれ x 軸の正・負の方向に伝搬する音波に対応する。

9.2 音速

先ほどの解析で、流体の圧力変化は音速 $c = \sqrt{dP/d\rho}$ で伝搬することが分かった。この音速の性質について少し説明を加える。

9.2.1 流体の「固さ」と音速

音速 c は圧力 $P(\rho)$ と $c^2 = dP/d\rho$ という関係にある。以下のように考えると、この $dP/d\rho$ は流体の「硬さ」を表す量であるとわかる。

物体の「硬さ」は、その物体を変形させたときにどの程度強い反発力が生じるかで表せる。流体の場合には、流体を押すと密度 ρ が変化し、圧力 P が上昇して変形を元に戻そうとする方向の力が生じる。この復元力の大きさは、密度変化に対する圧力の変化率 $dP/d\rho$ に比例する。この意味で、 $dP/d\rho$ は流体の「硬さ」を表す量とみなすことができる。

$dP/d\rho$ の値は状態方程式 $P = P(\rho)$ を与えると決まるが、上記の考え方に基づいて、 $dP/d\rho$ が大きい (小さい) 値を取る状態方程式のことを「硬い (柔らかい) 状態方程式」と呼ぶことがある。

音速の表式 $c = \sqrt{dP/d\rho}$ は、 $dP/d\rho$ が大きい (流体が「硬い」) ほど音速が大きいことを意味している。これは我々の身近な物質について実際にその通りになっており、例えば空気中の音速は約 340 m/s, 水については約 1500 m/s, 金属については種類にもよるが数千 m/s となっている。

9.2.2 流体の圧縮率

流体の性質を表す量として $dP/d\rho$ をそのまま使ってもよいが、以下で定義される**圧縮率** κ :

$$\kappa \equiv \left. \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} \quad (9.21)$$

もよく使われるので紹介する。以下で示す通り、この κ は**圧力を変化させたときに体積がどれだけ変わるかを表す係数**となっている。ある流体要素の体積を V 、質量を M とすると、 $\rho = M/V$ なので

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} \frac{M}{\rho} = -\frac{M}{\rho^2} = -\frac{V^2}{M} \quad (9.22)$$

これを使って κ^{-1} を V についての式として書き直すと

$$\kappa^{-1} = \rho \frac{dP}{d\rho} = \frac{M}{V} \underbrace{\frac{dV}{d\rho}}_{=-\frac{V^2}{M}} \frac{dP}{dV} = -V \frac{dP}{dV} \quad \therefore \quad \kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} \quad (9.23)$$

この κ の表式は、**単位体積の流体について、圧力が上がった時に体積がどれだけ減少するかを表す係数**、すなわち流体の**圧縮率**であることを示している：

$$dV = \frac{dV}{dP} dP = -V \kappa dP \quad (9.24)$$

なお、圧縮率 κ で音速を表すと以下ようになる：

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa}} \quad (9.25)$$

例えば、前回以前の講義で取り扱っていた非圧縮性流体については、圧縮率が $\kappa = 0$ となり、それに対応して音速は $c = \infty$ となる。

9.2.3 理想気体の音速

ある気体を構成する分子について、分子間の相互作用が働かず、なおかつ分子の大きさが非常に小さく無視できる場合には、その流体は**理想気体**として振る舞い、その状態方程式は

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu} \quad (9.26)$$

で与えられる。ただし、 μ は気体 1 mol あたりの質量、 $R = 8.314 \times 10^7 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$ は気体定数。

$PV = nRT$ (n : 気体の物質質量 = 体積 V 中の mol 数) のような表式の方が有名かもしれない。これを書き換えて

$$P = RT \frac{n}{V} = RT \frac{M/V}{M/n} = RT \frac{\rho}{\mu} \quad (9.27)$$

として式を整理したものが式 (9.26) である。ただし、 M は体積 V の気体の質量である。

この理想気体について、音速 (9.25) がどのように与えられるかを調べてみる。気体の変化 $d\rho, dP, dT$ が発生したとき、それらは式 (9.26) によって

$$\frac{dP}{\rho} - \frac{P}{\rho^2} d\rho = \frac{R}{\mu} dT \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \quad (9.28)$$

と関係づけられる。右側の表式は、左側の表式を式 (9.26) で片々割って得られたものである。

式 (9.28) には dT が表れるが、これを消去できれば $d\rho$ と dP だけの関係式が得られて、そこから圧縮率 κ と音速 $c = (\rho\kappa)^{-1/2}$ が求められる。そのために**気体の内部エネルギー ε** と**熱力学第一法則**に注目する。まず、理想気体の単位質量あたりの内部エネルギー ε は、気体が単分子気体の場合には

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{RT}{\mu} \quad \Rightarrow \quad d\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} dT \quad (9.29)$$

で与えられる。さらに、断熱的な変化だけを考える場合、単位質量あたりの熱力学第一法則は

$$d\varepsilon = \cancel{TdS} - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad \left(\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu}\right) = \frac{RT}{\mu\rho} d\rho. \quad (9.30)$$

最後の等号では式 (9.26) を使った。式 (9.29), (9.30) を組み合わせると、 dT と $d\rho$ とを関係づける式が

$$\frac{3}{2} \frac{R}{\mu} dT = \frac{RT}{\mu\rho} d\rho \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dT}{T} = \frac{2}{3} \frac{d\rho}{\rho} \quad (9.31)$$

と得られる。

式 (9.31) を式 (9.28) に代入すると

$$\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} = \frac{2}{3} \frac{d\rho}{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dP}{P} = \frac{5}{3} \frac{d\rho}{\rho} \quad (9.32)$$

$$\therefore \kappa^{-1} = \rho \frac{dP}{d\rho} = \frac{5}{3} P. \quad (9.33)$$

この表式から音速 c を求めると

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho\kappa}} = \sqrt{\frac{5P}{3\rho}}. \quad (9.34)$$

[分子速度との比較] 音速の表式 (9.34) を状態方程式 (9.26) と内部エネルギーの表式 (9.29) を用いてさらに書き換えると

$$c = \sqrt{\frac{5P}{3\rho}} = \sqrt{\frac{5RT}{3\mu}} = \sqrt{\frac{10}{9}\varepsilon}. \quad (9.35)$$

さらに、気体分子運動論を使うと、単原子分子気体の内部エネルギーは分子の熱運動のエネルギー $\frac{1}{2}v^2$ に等しいことがわかる。これを代入すると

$$c = \sqrt{\frac{5}{9}v^2} \simeq v. \quad (9.36)$$

すなわち、**音速は気体分子の熱運動の速さ程度**であることがわかる。

[空気の音速] 同様の導出を2分子原子気体について行くと

$$\varepsilon = \frac{5}{2} \frac{RT}{\mu}, \quad c = \sqrt{\frac{7}{5} \frac{RT}{\mu}} \quad (9.37)$$

となる。これに窒素のモル質量 28.0×10^{-3} kg/mol, 温度として $T = 273$ K を代入して計算すると $c \simeq 337$ m/s となる。これは、 0°C の空気中の音速 331.45 m/s をおおよそ再現する。

第10回 音波の性質

前回の講義で、流体の密度の波動である**音波**について解説した。その性質について解説を加える。

[復習：音波] 平衡状態にある静止した流体 ($P = P_0, \mathbf{v} = 0$) に微小な密度変化を

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \rho_0 + \delta\rho(t, \mathbf{r}), \quad |\delta\rho(t, \mathbf{r})| \ll \rho_0 \quad (10.1)$$

と与える。これに対応して微小な流速 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \neq 0$ が発生する。連続の方程式とオイラーの方程式にこれを代入し、 $\delta\rho, \mathbf{v}$ について一次までの項を残す近似をすると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right) \delta\rho = 0, \quad c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (10.2)$$

という方程式が得られる³⁵。この方程式の一般解は、 x 軸方向に伝搬する平面波を考える場合は

$$\delta\rho(t, x) = f(ct - x) + g(ct + x) \quad (f, g: \text{任意関数}) \quad (10.3)$$

となり、 $f(ct - x)$ が右向き ($x = ct$)、 $g(ct + x)$ が左向き ($x = -ct$) に伝搬する波動を表す。なお、速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ はオイラーの方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} \nabla \delta\rho = -\frac{c^2}{\rho} \nabla \delta\rho \quad (10.4)$$

を満たすように定められる。

10.1 音波のエネルギー

流体の微小な密度変化が音速で伝搬するという現象が音波だったが、音波に伴って流体が運動するので**音波はエネルギーを伴い、音波の伝搬と共にエネルギーも伝搬する**。

10.1.1 エネルギー密度

流体のエネルギー密度の保存則については第4回の講義で調べており、特に**エネルギー保存則**に対応する式は、流体に外力がかからない場合は

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} + \rho \varepsilon \mathbf{v} + P \mathbf{v} \right) = 0 \quad (10.5)$$

で与えられるのであった。ただし ε は単位質量あたりの内部エネルギーで、断熱的な時間変化を考える場合は

$$d\varepsilon + Pd \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0 \quad (\Leftrightarrow dE + PdV = 0) \quad (10.6)$$

を満たす。式 (10.5) の左辺の各項のかつこの中身

$$\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon, \quad \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon + P \right) \mathbf{v} \quad (10.7)$$

はそれぞれ**エネルギー密度**と**エネルギー密度流ベクトル**である。

³⁵第9回の講義では x 軸方向に伝搬する平面波だけを考えたため、 $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \delta\rho = 0$ という x 成分だけを持った式 (9.11) が得られていた。式 (10.2) は、 x 方向だけではなく一般の方向に音波が伝搬するとして導出した式で、 $\partial^2/\partial x^2$ が ∇^2 に置き換わっている。

式 (10.7) のうち、流体のエネルギー密度にまず注目する。これは内部エネルギー密度 $\rho\varepsilon$ と運動エネルギー密度 $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2$ で構成されるが、そのそれぞれが微小密度変化 (10.1) に対してどう振る舞うかを見る。

[内部エネルギー密度] まず、内部エネルギー密度を ρ の二次までテイラー展開する：

$$\rho\varepsilon = \rho_0\varepsilon_0 + \frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho\varepsilon}{\partial\rho^2}\delta\rho^2 + \mathcal{O}(\delta\rho^3) . \quad (10.8)$$

この係数に現れる $\rho\varepsilon$ の微分を式 (10.6) に従って計算しておく：

$$d\varepsilon + Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\varepsilon = +P\frac{d\rho}{\rho^2} \quad \therefore \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} = \frac{P}{\rho^2} \quad (10.9)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial\rho} = \varepsilon + \rho \underbrace{\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}}_{=P/\rho^2} = \varepsilon + \frac{P}{\rho} , \quad (10.10)$$

$$\frac{\partial^2\rho\varepsilon}{\partial\rho^2} = \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\varepsilon + \frac{P}{\rho} \right) = \cancel{\frac{P}{\rho^2}} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} - \cancel{\frac{P}{\rho^2}} \right) = \frac{c^2}{\rho} . \quad (10.11)$$

これらを式 (10.8) に代入すると

$$\rho\varepsilon \simeq \rho_0\varepsilon_0 + \left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \delta\rho + \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho^2 . \quad (10.12)$$

[全エネルギー密度] 式 (10.12) に運動エネルギー密度を足すと、全エネルギー密度 (10.7) が得られる：

$$\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + \rho\varepsilon \simeq \underbrace{\rho_0\varepsilon_0}_{1.} + \underbrace{\left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \delta\rho}_{2.} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho^2 + \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{v}|^2}_{3.} + \mathcal{O}(\delta\rho^3, \delta\rho|\mathbf{v}|^2) . \quad (10.13)$$

運動エネルギー $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2}(\rho_0 + \delta\rho)|\mathbf{v}|^2$ については、三次の微小量である $\delta\rho|\mathbf{v}|^2$ を無視した。式 (10.13) の右辺の各項の性質を少し細かく見ると

1. $\rho_0\varepsilon_0$: 音波のない平衡状態の流体の内部エネルギー
2. $\left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \delta\rho$: この項は (定数) $\times \delta\rho(t, \mathbf{r})$ という形をしている。一般的な音波については $\delta(t, \mathbf{r})$ は振動的に振る舞い、正・負両方の値を取るうえ、波長よりも長いスケールで平均を取ると正・負の部分が打ち消しあってほぼゼロになる。したがって、この項は音波のエネルギーにほとんど寄与しない。
3. $\frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho^2 + \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{v}|^2$: この項は必ず正になる $\delta\rho^2, |\mathbf{v}|^2$ だけで構成されており、空間平均をとった暁にも非ゼロの値を与える。

以上の考察より、3. の部分を音波に伴うエネルギー密度とみなすのが適切であると考えられる。改めて、音波のエネルギー密度 \mathcal{E} を書き下しておく

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho^2 + \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{v}|^2 . \quad (10.14)$$

10.1.2 エネルギー密度流

同様に、エネルギー密度流 (式 (10.7) の後者) を音波について評価する。圧力 P が

$$P = P_0 + \frac{dP}{d\rho} \delta\rho + \mathcal{O}(\delta\rho^2) = P_0 + c^2 \delta\rho + \mathcal{O}(\delta\rho^2) \quad (10.15)$$

と展開できることを使うと、エネルギー流の表式は

$$\left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho \varepsilon + P \right) \mathbf{v} = \left[\rho_0 \varepsilon_0 + \left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \delta\rho + P_0 + c^2 \delta\rho \right] \mathbf{v} + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^3, \delta\rho |\mathbf{v}|^2) . \quad (10.16)$$

$$= \underbrace{\left[(\rho_0 + \delta\rho) \left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \right]}_2 + \underbrace{c^2 \delta\rho}_3 \mathbf{v} + \dots \quad (10.17)$$

実は、この式の 2. の部分は、エネルギー密度の式 (10.13) のうち 2. の部分に対応するエネルギー流である。実際、連続の式に式 (10.1) を代入し、 $\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0}$ (定数) をかけると

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho_0 + \delta\rho) \mathbf{v}] \quad (10.18)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \delta\rho \right] + \nabla \cdot \left[(\rho_0 + \delta\rho) \left(\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \mathbf{v} \right] = 0 . \quad (10.19)$$

この式は、エネルギー密度の式 (10.13) の 2. の部分とエネルギー密度流の式 (10.17) の 2. の部分が保存則によって結び付けられていることを表している。

したがって、音波のエネルギー密度 (式 (10.13) の 3., および式 (10.14)) に対応するエネルギー密度流 \mathbf{j}_ε は、式 (10.17) の 3. の部分であり

$$\mathbf{j}_\varepsilon \equiv c^2 \delta\rho \mathbf{v} . \quad (10.20)$$

実際、音波のエネルギー密度 ε とエネルギー密度流ベクトル \mathbf{j}_ε についての保存則の式を書き下してみると

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho^2 + \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{v}|^2 \right) + \nabla \cdot (c^2 \delta\rho \mathbf{v}) \quad (10.21)$$

$$= \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c^2 \delta\rho \nabla \cdot \mathbf{v} + c^2 \mathbf{v} \cdot \nabla \delta\rho \quad (10.22)$$

$$= \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho \left[\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) \right] + \rho_0 \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c^2}{\rho_0} \nabla \delta\rho \right) = 0 \quad (10.23)$$

となる。最後の行の**第一項**は連続の式 (10.18) (の一次の部分)、**第二項**はオイラーの方程式 (10.4) (で $\rho \simeq \rho_0$ と近似した式) によってそれぞれゼロとなっている。

10.1.3 音波のエネルギーの伝搬

式 (10.3) に示した x 方向に伝搬する平面波のうち、 x 軸の正の方向に伝搬するモード

$$\delta\rho(t, x) = f(ct - x) \quad (10.24)$$

について考える。なお、 \mathbf{v} の x 成分を v として、これが満たす式 (10.4) をこれについて書き下すと

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} \simeq -\frac{c^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} f(ct - x) = +\frac{c^2}{\rho_0} f'(ct - x) . \quad (10.25)$$

ただし $f'(y) \equiv \frac{df}{dy}$. この式の両辺を t について積分し、音波がないところでは $v = 0$ であるとして積分定数をゼロとすると

$$v(t, x) = \frac{c}{\rho_0} f(ct - x) . \quad (10.26)$$

x 軸向きに伝搬する波動 (10.24), (10.26) について、音波のエネルギー密度 (10.14)、エネルギー密度流ベクトル (10.20) の x 成分 $j_{\mathcal{E}}$ を求めてみると

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \delta\rho^2 + \frac{1}{2} \rho_0 v^2 = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} f^2(ct-x) + \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{c}{\rho_0} f(ct-x) \right)^2 = \frac{c^2}{\rho_0} f^2(ct-x) \quad (10.27)$$

$$j_{\mathcal{E}} = c^2 \delta\rho v = c^2 f(ct-x) \frac{c}{\rho_0} f(ct-x) = \frac{c^3}{\rho_0} f^2(ct-x) = \mathcal{E} \times c. \quad (10.28)$$

これらの式は、 x 軸方向に伝搬する音波に伴って、エネルギー密度 \mathcal{E} が音速 c で伝搬することを表している。流体そのものが移動しているのではなく、密度の振動が伝わることでエネルギーが輸送されているので注意が必要である。

10.2 球面波

ここまでは主に一方向だけに伝搬する平面波に注目してきたが、ある一点から発生して全方向へ等方的に広がる球面波についても調べておく。

[密度変化] 球面波について調べるため、音源の位置を基準点とする極座標 (r, θ, ϕ) を取ると、密度の変化は

$$\delta\rho(t, r, \theta, \phi) = \delta\rho(t, r) \quad (10.29)$$

と表される。また、 $\delta\rho$ が従う波動方程式 (10.2) は

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right) \delta\rho = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \delta\rho. \quad (10.30)$$

ここで、やや天下りのだが

$$\frac{\partial^2 (r \delta\rho)}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\delta\rho + r \frac{\partial \delta\rho}{\partial r} \right) = r \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \delta\rho}{\partial r} = r \left(\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \delta\rho}{\partial r} \right) \quad (10.31)$$

となることに留意すると、式 (10.30) は

$$\frac{\partial^2 (r \delta\rho)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 (r \delta\rho)}{\partial r^2} = 0. \quad (10.32)$$

この式は第9回の講義で調べた平面波が従う方程式について $x \rightarrow r, \delta\rho \rightarrow r \delta\rho$ と置き換えた式になっている。そのため、式 (10.32) の一般解は、平面波の場合の一般解 (10.3) についてその置き換えを行ったもので与えられて

$$r \delta\rho = f(ct-r) + g(ct+r) \quad (10.33)$$

となる。 $f(ct-r), g(ct+r)$ は任意の関数で、それぞれ動径座標 r の正の向き (外向き)、負の向き (内向き) に伝搬する音波を表す。

中心点 $r=0$ から出て外向きに伝搬する波を考える場合は、式 (10.33) のうち $f(ct-r)$ だけを考えることになる。この場合の密度変化は

$$\delta\rho(t, r) = \frac{f(ct-r)}{r} \quad (10.34)$$

となる。

[速度場] 速度場 \mathbf{v} を定める式 (10.4) を使って球面波 (10.34) の \mathbf{v} を求めてみる。球面波については \mathbf{v} の r 成分 v_r だけが値を持つので、オイラーの方程式 (10.4) の r 成分を書き下してみると

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{c^2}{\rho} (\nabla \delta\rho)_r = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \delta\rho}{\partial r} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \frac{f(ct-r)}{r} = -\frac{c^2}{\rho} \left(-\frac{f(ct-r)}{r^2} - \frac{f'(ct-r)}{r} \right). \quad (10.35)$$

これを t について積分すれば v_r が得られる。関数 $f(y)$ の積分を $F(y) \equiv \int^y f(y') dy'$ と定義すると

$$v_r(t, r) = \int dt \frac{c^2}{\rho} \left(\frac{f(ct-r)}{r^2} + \frac{f'(ct-r)}{r} \right) = \frac{c^2}{\rho c} \int d(ct) \left(\frac{f(ct-r)}{r^2} + \frac{f'(ct-r)}{r} \right) \quad (10.36)$$

$$= \frac{c^2}{\rho c} \left(\frac{F(ct-r)}{r^2} + \frac{f(ct-r)}{r} \right) = \frac{c}{\rho} \left(\frac{F(ct-r)}{r^2} + \frac{F'(ct-r)}{r} \right). \quad (10.37)$$

式 (10.37) は、音源を中心とする半径 r の球面を単位時間に通過する流体の流量が

$$4\pi r^2 v_r = \frac{4\pi c}{\rho} (F(ct-r) + r F'(ct-r)) \quad (10.38)$$

で与えられることを示している。この球面を音源 $r=0$ の近くまで縮める ($r \rightarrow 0$) ことで、原点から時刻 t に湧き出す流体の流量を求めることができる。これを $Q(t)$ とすると

$$Q(t) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \frac{4\pi c}{\rho} (F(ct-r) + r F'(ct-r)) = \frac{4\pi c}{\rho} F(ct). \quad (10.39)$$

これを使って半径 r の地点での流速 v_r (10.37) を原点における流体の湧き出し $Q(t)$ で表しなおすと³⁶

$$v_r = \frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2} + \frac{Q'(t - \frac{r}{c})}{4\pi c r}. \quad (10.40)$$

式 (10.40) の右辺の各項に物理的な解釈を与えると以下のようになる。

- $\frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2}$ 項：

- 以前 7.2.2 節で非圧縮流体がある一点から $Q(t)$ だけ湧き出している場合の流速を調べたが、この場合の流速は

$$v_r = \frac{Q(t)}{4\pi r^2} \quad (10.41)$$

となり、 $\frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2}$ 項とほぼ同じ形をしている。そのため、 $\frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2}$ 項は**流体の湧き出しから直接生じた流速**であると解釈できる。

- なお、 $\frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2}$ 項では Q の引数が $t \rightarrow t - \frac{r}{c}$ と置き換わっているが、これは**流体の湧き出しが音速 c で伝搬するため**、遠方の位置 r では v_r が変化するのが $\Delta t = r/c$ だけ遅延することを表している。
- 非圧縮流体の音速は無限大であり、実際 $\frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2}$ について $c \rightarrow \infty$ とすれば式 (10.41) が再現される。

- $\frac{Q'(t - \frac{r}{c})}{4\pi c r}$ 項：

- この項は $1/r$ に比例するため、特に遠方 ($r \rightarrow \infty$) では第一項 $\frac{Q(t - \frac{r}{c})}{4\pi r^2} \propto 1/r^2$ よりも大きくなる。
- この項は $1/r$ に比例しており、非圧縮流体の場合の式 (10.41) には存在しなかったものである。また、**圧力変化は $1/r$ に比例している** (式 (10.34) 参照)。以上より、この項は**圧力変化 $\delta\rho$ の伝搬が原因で生じた流速**であると解釈できる。
- 流体が直接流れたのではなく、流体自体はほとんど動いていないものの**密度変化が音速で伝搬したために生じた流速**である。その意味で**音波の伝搬に伴う流速**であると言うこともできる。

³⁶式 (10.37) から式 (10.38) への書き換えは、式 (10.39) を使って以下のようにできる：

$$\frac{4\pi c}{\rho} F(ct-r) = Q(t)|_{t \rightarrow t - \frac{r}{c}} = Q\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad \frac{4\pi c}{\rho} F'(ct-r) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4\pi c}{\rho} F(ct-r) \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} Q\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{c} Q'\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

第11回 水面の波：浅水波

これまでの講義では、圧縮性流体の密度変化が音速で伝わる音波について解説してきた。今回は再び非圧縮性の（完全）流体に注目し、その表面に伝わる波について解説する。普通の水が大気に接している場合について、その水面を伝わる波について調べるとしてもよい。

水面を伝わる波は、波の波長と水面から水底までの距離（水深）のどちらが長いかによってその性質が大きく異なる。今回は、波の波長に比べて水深が短い場合（浅水波と呼ぶ）について解説する。浅い水路を伝わる波や、波打ち際の浅瀬の波などがこの浅水波におおよそ対応する。

11.1 設定

以下の設定を考える。図(18)参照。

- 流体は非圧縮的で、密度 ρ は一定である。
- x 方向に伸びる深さ h_0 の水路があり、波がないときの水面が $z = 0$ 、水底が $z = -h_0$ にある。
- x, z 方向の流体の動きだけを考え、 y 方向には流体は常に一様である。すなわち

$$\mathbf{v}(t, x, z) = (v_x(t, x, z), 0, v_z(t, x, z)) . \quad (11.1)$$

- 波によって水面の位置は $z = 0$ から $z = h(t, x)$ にずれる。
- 微小な波を考える。すなわち、 $v_x, v_z, h(t, x)$ はどれも微小である。
- 水底と流体は摩擦なく滑る。そのため、水底 $z = -h$ では $v_z = 0$ となる一方 v_x は制限されず

$$\mathbf{v}(t, x, z = -h) = (v_x(t, x, -h), 0, 0) . \quad (11.2)$$

- 水面における圧力は大気圧 P_0 に等しく、いたるところで $P(t, x, z = h(t, x)) = P_0$ (定数)。
- 流体全体に下向きの重力がかかっている。すなわち、単位体積あたり $\rho \mathbf{g}$ ($\mathbf{g} = (0, 0, -g)$) の力が流体にかかり、この項がオイラーの方程式の右辺に入る。

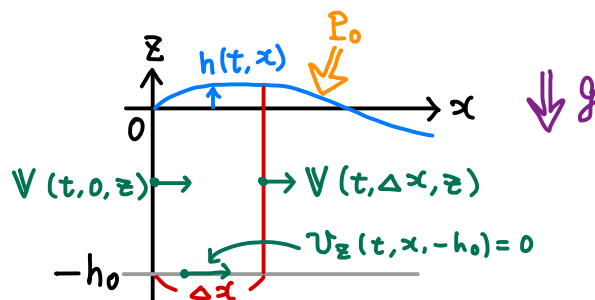


図 18: x 方向に伸びる水路の水面の波。水底で $v_z = 0$ となる。下向きに重力 g がかかっており、また水面 $z = h(t, x)$ の位置での圧力はいたるところ大気圧 P_0 に等しい。

11.2 波動方程式の導出

音波についての波動方程式を導出した場合と同様に、流体の基礎方程式である連続の式とオイラーの方程式を使って、水面の波が従う方程式を導出する。

[流体柱] 流体の $x = 0 \sim \Delta x, y = 0 \sim \Delta y$ の部分を考える。この領域は十分微小であるとして、水面の高さ $z = h(t, x)$ を $x = 0$ における値で近似する:

$$z = h(t, x) = h(t, 0) + \frac{\partial h}{\partial x}(t, 0)x + \cdots = \underbrace{h(t, 0)}_{\equiv h(t)} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (11.3)$$

以下では $h(t, x = 0)$ を単に $h(t)$ と書くことにする。

11.2.1 連続の式

連続の式を直接考える代わりに、先ほど導入した流体柱の質量 $M(t)$ がどのように時間変化するかを考えてみる。まず、今回の設定では流体中の質量 $M(t)$ は

$$M(t) = \Delta y \times \int_0^{\Delta x} dx \int_{-h}^{h(t)} dz \rho = \rho (h_0 + h(t)) \Delta x \Delta y. \quad (11.4)$$

この $M(t)$ は、 $x = 0$ および $x = \Delta x$ の位置での流体の流入・流出により変化する。この流入量は $x = 0, \Delta x$ での (流速)×(密度) を高さ $z \in [-h_0, h(t)]$ と横幅 Δy にわたって積分すると得られる:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \rho \Delta y \int_{-h_0}^{h(t)} \left[\underbrace{v_x(t, x = 0, z)}_{\text{流入}} - \underbrace{v_x(t, x = \Delta x, z)}_{\text{流出}} \right] dz. \quad (11.5)$$

ここで、水深が浅い場合には、 v_x はどの高さ z でもほぼ一定であるという近似を使う。すなわち、 x 方向の速度 $v_x(t, x, z)$ について

$$v_x(t, x, z) = v_x(t, x, z = 0) + \frac{\partial v_x}{\partial z}(t, x, z = 0)\Delta z + \cdots \simeq v_x(t, x, z = 0) \quad (11.6)$$

と、右辺第二項 (赤字部分) を第一項 $v_x(t, x, 0)$ に対して無視する³⁷。このようにすると、 $M(t)$ の変化の式 (11.5) は

$$\frac{1}{\rho \Delta y} \frac{dM(t)}{dt} = \int_{-h_0}^{h(t)} [v_x(t, x = 0, z) - v_x(t, x = \Delta x, z)] dz \quad (11.7)$$

$$\simeq \int_{-h_0}^{h(t)} [v_x(t, 0, 0) - v_x(t, \Delta x, 0)] dz \quad (11.8)$$

$$= [v_x(t, 0, 0) - v_x(t, \Delta x, 0)] \times (h_0 + h(t)). \quad (11.9)$$

さらに、 $v_x(t, \Delta x, 0)$ を微小量 Δx についてテイラー展開すると

$$[v_x(t, 0, 0) - v_x(t, \Delta x, 0)] (h_0 + h(t)) = \left[\cancel{v_x(t, 0, 0)} - \left(\cancel{v_x(t, 0, 0)} + \frac{\partial v_x}{\partial x}(t, 0, 0) \Delta x + \cdots \right) \right] (h_0 + h(t)) \quad (11.10)$$

$$= -\frac{\partial v_x}{\partial x}(t, 0, 0) \times (h_0 \Delta x + \cancel{h(t) \Delta x}) + \cdots. \quad (11.11)$$

$h_0 \Delta x$ (一次の微小量) に対して $h(t) \Delta x$ は二次の微小量となるので無視した。結局、流体中の質量 $M(t)$ の変化の式 (11.5) は

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\rho \frac{\partial v_x}{\partial x}(t, 0, 0) h_0 \Delta x \Delta y. \quad (11.12)$$

ここで、 $M(t)$ が式 (11.4) と与えられていたことを思い出すと、式 (11.12) は

$$\frac{dM(t)}{dt} = \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial h(t)}{\partial t} = -\rho \frac{\partial v_x}{\partial x}(t, 0, 0) h_0 \Delta x \Delta y \quad \therefore \quad \frac{\partial h(t)}{\partial t} = -h_0 \frac{\partial v_x}{\partial x}(t, 0, 0) \quad (11.13)$$

となり、水面の高さ $h(t)$ の時間変化を表す式が得られた。

³⁷ この近似の妥当性をきちんと示すには、この近似を使わない場合の流体の流れを求めたうえで、深さ h_0 が波の波長に比べて十分小さい場合に $v_x(t, x, z) \simeq v_x(t, x, 0)$ となることを示す必要がある。本講義では導出を省略するが、このようなステップを踏むとたしかに $v_x(t, x, z) \simeq v_x(t, x, 0)$ となっていることが示される。詳細については巽友正著「流体力学」(培風館)などを参照のこと。

11.2.2 オイラーの方程式

今回の設定におけるオイラーの方程式は、二次の微小量となる $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ 項を無視すると

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \cancel{(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}} \right) \simeq \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P + \rho \mathbf{g}. \quad (11.14)$$

ここで、流体の流れに伴い、圧力も波がない場合の値 $\bar{P}(z)$ から微小に変化する：

$$P(t, x, z) = \bar{P}(z) + \Delta P(t, x, z). \quad (11.15)$$

波がない場合には流体は静水圧平衡の状態にあり、その圧力 $\bar{P}(z)$ は高さ z だけに依存する。

式 (11.14) の x, y, z 各成分を書き下すと

$$x: \quad \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{P}(z) + \Delta P(t, x, z)) = -\frac{\partial \Delta P}{\partial x} \quad (11.16)$$

$$y: \quad \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} (\bar{P}(z) + \Delta P(t, x, z)) = 0 \quad (11.17)$$

$$z: \quad \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} (\bar{P}(z) + \Delta P(t, x, z)) - \rho g = -\frac{d\bar{P}(z)}{dz} - \frac{\partial \Delta P}{\partial z} - \rho g \quad (11.18)$$

y 成分の式 (11.17) は、今回の場合 $v_y = 0$ なので自明に満たされる。また、 z 成分の式 (11.18) は、波がない場合にも存在する 0 次の項 (青字部分) と、波によって生じた 1 次の微小量の項 (赤字部分) のそれぞれが個別に満たされる：

$$0 \text{ 次: } \quad \frac{d\bar{P}(z)}{dz} = -\rho g \quad (11.19)$$

$$1 \text{ 次: } \quad \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial \Delta P}{\partial z}. \quad (11.20)$$

- z 成分の 0 次: 式 (11.19) は波のない状態の流体についての式で、圧力 $\bar{P}(z)$ は z だけの関数となり t, x には依存しないことに注意する。この式を z について積分すると

$$\bar{P}(z) = C - \rho g z \quad (C: \text{定数}). \quad (11.21)$$

波がない状態では、水面はいたるところ $z = 0$ の位置にあり、その地点における圧力は大気圧 P_0 に等しくなる。すなわち

$$\bar{P}(z) = P_0 - \rho g z. \quad (11.22)$$

式 (11.22) を踏まえて、圧力 P の表式 (11.15) を改めて書き下すと

$$P(t, x, z) = \bar{P}(z) + \Delta P(t, x, z) = P_0 - \rho g z + \Delta P(t, x, z). \quad (11.23)$$

この圧力 $P(t, x, z)$ は、水面の位置 $z = h(t, x)$ の位置で大気圧 P_0 に等しくなる。この条件から ΔP が満たすべき式を書き下すと

$$P(t, x, h(t, x)) = P_0 - \rho g h(t, x) + \Delta P(t, x, h(t, x)) = P_0 \quad (11.24)$$

$$\therefore \underbrace{\Delta P(t, x, h(t, x))}_{=\Delta P(t, x, 0) + \mathcal{O}(h(t, x))} = \rho g h(t, x). \quad (11.25)$$

今回の設定では水面のずれ $h(t, x)$ は微小だとしているので、この式の左辺で $z = h(t, x) \rightarrow 0$ とした式が近似的に成立して

$$\Delta P(t, x, 0) \simeq \rho g h(t, x). \quad (11.26)$$

- x 成分: 引き続いて、式 (11.16) を $z = 0$ で評価する。 ΔP の式 (11.26) を代入すると

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t}(t, x, 0) = -\frac{\partial \Delta P}{\partial x}(t, x, 0) = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x}(t, x) \quad \therefore \quad \frac{\partial v_x}{\partial t}(t, x, 0) = -g \frac{\partial h}{\partial x}(t, x). \quad (11.27)$$

この式は v_x の時間変化を h によって与える式で、 h の時間変化を v_x で与える式 (11.13) と対になるものである。これら 2 つの式から水面の位置 $h(t, x)$ の運動を定める波動方程式を後ほど導出する。

なお、 z 成分の 1 次の式 (11.20) については 11.4 節で再訪する。

11.2.3 波動方程式の導出

連続の式とオイラーの方程式から得られた $h(t, x)$, $v_x(t, x, z = 0)$ についての方程式をまとめると

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) = -h_0 \frac{\partial v_x}{\partial x}(t, x, 0), \quad \frac{\partial v_x}{\partial t}(t, x, 0) = -g \frac{\partial h}{\partial x}(t, x). \quad (11.28)$$

連続の式から得られた第一式 (11.13) は位置を $x = 0$ に固定して導出したが、注目する位置をどの x に変更しても同じ式が得られるので、第一式で h, v_x の x 依存性を復活させて書き表している。

音波の場合と同様、式 (11.28) を変形することで $h(t, x)$ (ないし $v_x(t, x, 0)$) についての波動方程式を導出できる。第一式について時間微分 $\partial/\partial t$ をとり、第二式をつかって整理すると

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -h_0 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_x}{\partial x}}_{= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial t}} = -h_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \frac{\partial h}{\partial x} \right) = gh_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (11.29)$$

$$\therefore \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) h = 0 \quad (c^2 \equiv gh_0). \quad (11.30)$$

式 (11.30) は波面の位置 $h(t, x)$ についての波動方程式であり、その一般解は速度 $c = \sqrt{gh_0}$ で x 軸方向に伝搬する波動解で与えられる：

$$h(t, x) = f(ct - x) + g(ct - x) \quad (f(y), g(y) : y \text{ の任意関数}). \quad (11.31)$$

この解があらわす波動は速度 $c = \sqrt{gh_0}$ で伝搬する。浅水波の速さは水底が深いほど速く $c \propto \sqrt{h_0}$ となる、というのが特徴である。

11.3 波の変形

浅水波の伝搬速度 $c = \sqrt{gh_0}$ は水底の深さ h_0 が深くなるほど大きくなる。この性質を踏まえて、波打ち際 (波が進行するにつれて水底が浅くなる場合) について考えてみることにする。なお、今回は水底の深さ h_0 は一定であるとして導出したが、深さがゆっくりと変化する場合にも同様の結果 ($c = \sqrt{gh_0}$) が成立すると仮定して話を進める。

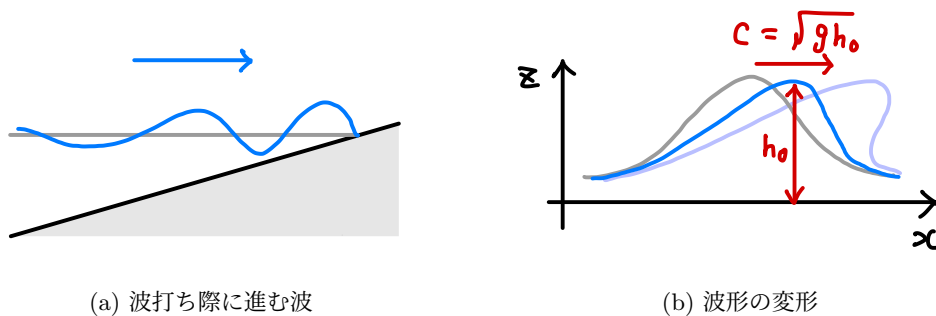


図 19: (a) 波打ち際に進む波の変形の概念図。波打ち際に近づくにつれて、波長が短くなり、振幅は大きくなる。(b) 波の速さ $c = \sqrt{gh_0}$ の深さ h_0 への依存性からくる波形の変形。波の先端部分は水底までの距離が長いので進行速度も大きくなり、そのために波形は寄り切り立った形状へ変形する (図中の灰色線→青線)。最終的には多価関数のような波形となるが (図中の薄青線)、そうなる前に波は自重で崩れることになる。

- 波が沖合から波打ち際に近づくにつれて、水深 h_0 は徐々に浅くなる。これに対応して、波の速度 $c = \sqrt{gh_0}$ は徐々に遅くなる。

- 波の速度が遅くなるにつれて、波同士の間隔（1周期の長さ）は短くなり、振幅は大きくなる。図 19a 参照。なお、振幅が水底までの距離 h_0 と同程度に大きくなると、今回の講義で行った摂動解析は破綻する。
- 波の先端（高い位置の部分）は、水底までの距離（＝「深さ」）がより長い。波の速度は深さ h_0 が大きいほど速いので、波の先端は波の下部に比べて速く進むことになる。そのため、波の波形は進行方向寄りに切り立った形状に変化していく。図 19b 参照。
- 波形の変形が進むと最終的には波の先端が波の下部よりも前方に突き出た多価関数のような形状になる。実際には、ここまで変形する前に、波が自重を支えきれずに崩れることになる。波打ち際で波が崩れて白い波飛沫を上げるのはこれが原因の一つ。

11.4 正弦波

波動方程式の解 (11.31) の任意関数 f, g を適切に選ぶことで、一方向に進む**正弦波**を表す解を作ることできる。

[波面の位置 $h(t, x, z)$] 定常波の例として、振動数 ω , 波数 k を持つ波で $x = 0$ に節を持つものと考え

$$h(t, x) = A \sin(\omega t + kx) . \quad (11.32)$$

この $h(t, x)$ も波動方程式 (11.30) を満たしている必要があるわけだが、方程式に代入してみると

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A \sin(\omega t + kx) = (-\omega^2 + c^2 k^2) A \sin(\omega t + kx) \quad \therefore \omega = \pm ck \quad (11.33)$$

となり、振動数 ω が波数 k と関係づけられることがわかる。 $\omega = +ck$ を式 (11.32) に代入すると

$$h(t, x) = A \sin[k(ct + x)] \quad (11.34)$$

という定常波を表す解が得られる。なお、 $\omega = -ck$ を使った場合でも、波動の位相が変化するだけで本質的には同じ解が得られる。

[水平方向の速度 $v_x(t, x, z)$] 引き続き、水平方向の速度 $v_x(t, x, z)$ がどう与えられるかを見ておく。式 (11.28) の第二式に $h(t, x)$ の解 (11.34) を代入すると

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}(t, x, 0) = -g \frac{\partial h}{\partial x}(t, x) = -gkA \cos(\omega t + kx) . \quad (11.35)$$

これを t について積分し、 x 方向の平均速度に相当する積分定数をゼロとおくと

$$v_x(t, x, 0) = -gkA \int dt \cos[k(ct + x)] = -\frac{g}{c} A \sin[k(ct + x)] . \quad (11.36)$$

なお、今回は水深 h_0 が浅いため v_x がどの深さ z でも一定という近似を使っているために、この式は任意の z でも成立する。すなわち

$$v_x(t, x, z) \simeq -\frac{g}{c} A \sin[k(ct + x)] . \quad (11.37)$$

[垂直方向の速度 $v_z(t, x, z)$] 引き続き垂直方向の速度 $v_z(t, x, z)$ について調べるが、結論としては浅水波の場合には v_z は水平方向の速度 v_x に比べて非常に小さくなる。

今回取り扱っている流体は非圧縮的なので、以前 6.3 節でも解説した通り、連続の式から $\text{div } \mathbf{v} = 0$ となることが示される。今回の場合は $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$ となっていることから

$$0 = \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} . \quad (11.38)$$

したがって、定常波 (11.37) がある場合には

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{g}{c} A \sin [k(ct+x)] \right) = \frac{gk}{c} A \cos [k(ct+x)] . \quad (11.39)$$

水底 $z = -h_0$ では $v_z = 0$ であることを踏まえて、この式を z について積分すると

$$v_z(t, x, z) = \int_{-h_0}^z dz' \frac{gk}{c} A \cos [k(ct+x)] = \frac{gk}{c} (z+h_0) A \cos [k(ct+x)] . \quad (11.40)$$

特に、 $|v_z|$ が最大となる水面付近 $z = 0$ で v_x, v_z の振幅を比較すると

$$v_z(t, x, 0) = \frac{gkh_0}{c} A \cos [k(ct+x)] , \quad v_x(t, x, 0) = -\frac{g}{c} A \sin [k(ct+x)] . \quad (11.41)$$

$$\Rightarrow |v_z(t, x, 0)| \sim kh_0 \times |v_x(t, x, 0)| . \quad (11.42)$$

この式の特徴は下記の通り。

- $|v_z|$ の大きさは $|v_x|$ の大きさに係数 kh_0 をかけた程度である。水深 h_0 よりも波長 $\lambda = 1/k$ が長いという今回の設定では $\frac{1}{k} \gg h_0$ となり、そのためこの係数は $kh_0 \ll 1$ となる。そのため $|v_z| \ll |v_x|$ となり、流体はほぼ水平方向 (x 方向) だけに運動する。
- 流体の水面 $z = h(t, x)$ は流体の流れとともに動くので、 $v_z(t, x, h(t, x)) \simeq v_z(t, x, 0)$ は水面の位置 $z = h(t, x)$ の時間微分と一致するべきである。実際、式 (11.42) で求めた $v_z(t, x, 0)$ は、単に定常波解の $h(t, x)$ の式 (11.34) を時間微分したものと一致する：

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} A \sin [k(ct+x)] = kcA \cos [k(ct+x)] = \frac{gkh_0}{c} A \cos [k(ct+x)] = v_z(t, x, 0) . \quad (11.43)$$

なお、計算の途中で $kc = \frac{kc^2}{c} = \frac{gkh_0}{c}$ となることを使った。

[圧力変化 $\Delta P(t, x, z)$ の z 依存性] オイラーの方程式の z 成分のうち、摂動について1次の式 (11.20) に改めて注目する。この式は $v_z(t, x, z)$ によって圧力変化 $\Delta P(t, x, z)$ の z 依存性を $v_z(t, x, z)$ の値に基づいて定める式である。水面 $z = 0$ における $\Delta P(t, x, 0)$ の値は式 (11.26) で求めていたが、そのほかの深さ z でどのような値を取るかを念のため調べておく。結論としては、 ΔP は深さ z に依らずほぼ一定となる。

v_z の表式 (11.40) をオイラーの方程式 z 成分の1次の式 (11.20) に代入すると

$$\frac{\partial \Delta P}{\partial z} = -\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = +\rho \frac{gk}{c} (z+h_0) kcA \sin [k(ct+x)] \quad \therefore \quad \frac{\partial \Delta P}{\partial z} = \rho gk^2 (z+h_0) A \sin [k(ct+x)] . \quad (11.44)$$

この式を水底 $z = -h_0$ から水面 $z = 0$ まで積分すると、 $\Delta P(t, x, z)$ の水面と水底の各位置における値の差を求めることができる：

$$\Delta P(t, x, 0) - \Delta P(t, x, -h_0) = \int_{-h_0}^0 \frac{\partial \Delta P}{\partial z} dz = \rho gk^2 \left[\frac{1}{2} (z+h_0)^2 \right]_{z=-h_0}^{z=0} A \sin [k(ct+x)] \quad (11.45)$$

$$= \frac{1}{2} \rho g (k^2 h_0^2) A \sin [k(ct+x)] \quad (11.46)$$

この表式には、浅水波については非常に小さくなる係数 $(kh_0)^2 \ll 1$ がかかっていることに注意する。

これに対して、水面 $z = 0$ における ΔP の式 (11.26) は $\Delta P(t, x, 0) = \rho gh = \rho g A \sin [k(ct+x)]$ となるのであった。これと比べると、 ΔP の値の水面・水底間の差は $(kh_0)^2$ 倍小さい。したがって、 $\Delta P(t, x, z)$ は深さ z 全体にわたってほぼ一定で、式 (11.26) で与えられるとみなしてよい。

第12回 水面の波：深水波

前回の講義から水面の波に注目しており、その手始めとして波の波長と比べて水底までの深さが短い場合（浅水波）について前回の講義で解説した。今回は、その逆の極限である波の波長と比べて水深が深い場合（深水波）について解析する。そのために、以前解説した非圧縮流体の渦なし流の解析法（速度ポテンシャルとそれが従うラプラス方程式、ベルヌーイの定理など）を活用する。

12.1 設定

前回の講義で使ったものと同様の仮定をおく。波の波長と流体の深さとの関係が逆転している点と、（実は前回もそうになっていたが）流体の流れに渦度がないという仮定を明示的におく点だけが違いである。図(20)参照。

- 密度 $\rho = \rho_0$ の非圧縮完全流体を考える。（簡単のため、場合によっては ρ_0 を単に ρ と略記する。）
- 無限に深い流体を考える。波がない状態ではその水面が $z = 0$ にある。
- 水面を x 方向に伝搬する波を考える。流体は x, z 方向に運動し、 y 方向には流体は一様である。
- 波によって水面の位置は $z = 0$ から $z = h(t, x)$ にずれる。
- 微小な波を考える。すなわち、 $\mathbf{v}(t, x, z)$, $h(t, x)$ はどれも微小である。
- 十分に深い位置では流体の速度はゼロになる ($\lim_{z \rightarrow -\infty} \mathbf{v} = 0$) という境界条件をおく。
- 水面における圧力は大気圧 P_0 に等しく、いたるところで $P(t, x, z = h(t, x)) = P_0$ (定数)。
- 流体全体に下向きの重力 ($\mathbf{g} = (0, 0, -g)$) がかかっている。
- 流体に渦度はないとする。波が保存力だけで励起されるのであれば、流体の渦度は保存する（第5回の内容から示せる）。そのため、初期状態で流体が静止 (\Rightarrow 渦度はゼロ) しており、波が保存力だけで励起されるなど渦度が外部から追加されない状況であれば、流体の渦度はどの時点でも常にゼロとなる。今回はそのような状況を考える。

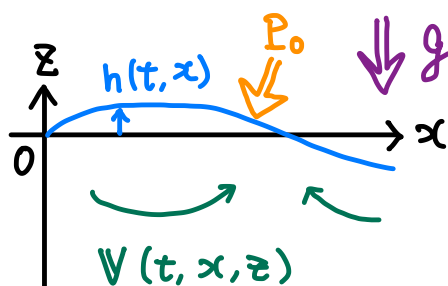


図 20: 深さが無限大の流体の x 方向に伝搬する波（深水波）。下向きに重力 g がかかっており、また水面 $z = h(t, x)$ の位置での圧力はいたるところ大気圧 P_0 に等しい。

12.2 運動方程式

第6回の講義で解説した通り、非圧縮完全流体の渦なし流については、速度場 $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ を速度ポテンシャル $\phi(t, \mathbf{r})$ で表すことができる：

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \nabla\phi(t, \mathbf{r}) \quad (12.1)$$

今回の場合、運動方程式を解いて決めるべき動変数は速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ と水面の位置 $z = h(t, x)$ である。この2つの変数を定める運動方程式を以下で導出する。

以下で行う導出は、流体の運動方程式である**連続の式**と**オイラーの方程式**のそれぞれにまず注目し、それに加えて**水面の位置での境界条件**を速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ とオイラーの方程式に現れる圧力 $P(t, x, z)$ に課す、という順番で進める。

[**連続の式**] 非圧縮流体の場合、連続の式は $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ という式になり、この式はさらに $\Delta\phi = 0$ というラプラス方程式に帰着する。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho = \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \underbrace{\nabla \cdot \nabla \phi}_{=\Delta\phi} = 0. \quad (12.2)$$

このラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ は、水面の位置 $z = h(t, x)$ と水底 $z \rightarrow -\infty$ で $\phi(t, x, z)$ が満たすべき境界条件が与えられた時に、水中の速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ を定める方程式である。

[**水面の高さ**] 水面の高さ $z = h(t, x)$ は流体とともに運動するが、その時間変化は水面の位置における v_z で与えられる：

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} = v_z(t, x, z = h(t, x)). \quad (12.3)$$

ここで、波は微小であると仮定しているので、波の位置 $z = h(t, x)$ は波のない場合の水面の位置 $z = 0$ に非常に近い。そのため

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = v_z(t, x, z = h(t, x)) = v_z(t, x, 0) + \cancel{\frac{\partial v_z(t, x, 0)}{\partial z} h(t, x)} + \dots \quad (12.4)$$

$$\therefore \frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = v_z(t, x, 0) = \frac{\partial \phi(t, x, 0)}{\partial z}. \quad (12.5)$$

ただし、 $\frac{\partial \phi(t, x, 0)}{\partial z}$ は微分 $\frac{\partial \phi(t, x, z)}{\partial z}$ の $z = 0$ における値である。この式は、速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ が $z = 0$ で満たすべき境界条件の式となる。

[**オイラーの方程式**] 非圧縮完全流体の渦なし流について、オイラーの方程式から**ベルヌーイの定理**：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + w + U = C \quad (C: \text{定数}) \quad (12.6)$$

が導かれたのであった。今回の場合、この式の各項は以下のようなになる。

- $|\mathbf{v}|^2$ は微小量 \mathbf{v} の2次の項となり、ほかの項に比べて十分小さいので無視する。
- 非圧縮 ($\rho = \rho_0$) の場合、エンタルピーは $w = P(t, x, z)/\rho_0$ となる。
- ポテンシャル U としては重力ポテンシャル $U = gz$ を使う。

これらを踏まえると、ベルヌーイの定理の式 (12.6) は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, z) + \frac{P(t, x, z)}{\rho} + gz = C. \quad (12.7)$$

この式は、速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ がほかの式で求められた時に、それをもとに圧力 $P(t, x, z)$ を定める式である。

[**水面における圧力**] ところで、水面直上 $z = h(t, x)$ では圧力が大気圧 P_0 と等しくなるのであった。この情報を現在行っている解析に取り込むには、圧力 $P(t, x, z)$ が登場するベルヌーイの定理の式 (12.7) でこの条件式を使うほかない。そのために式 (12.7) を水面の位置 $z = h(t, x)$ で評価すると、 $P(t, x, z) \rightarrow P_0, z \rightarrow h(t, x)$ と置き換わるので

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, h(t, x)) + \frac{P_0}{\rho} + gh(t, x) = C. \quad (12.8)$$

この式について、さらに以下の簡単化・近似を行う。

- 流体全体で一定値となる定数 C は (流体全体で一定でさえあれば) 任意の値にセットしてよい。また、第二項 P_0/ρ は定数となる。これらを踏まえ、 $C = P_0/\rho$ と取ることによってこれらの項を式 (12.8) から取り除いても一般性を失わない。
- 水面の変位 $h(t, x)$ は微小なので、速度ポテンシャル $\phi(t, x, h(t, x))$ は少しずれた $z = 0$ の位置における値 $\phi(t, x, 0)$ とほぼ等しくなるという近似が使える。式 (12.4) で行ったのと同じ近似。

これらを適用すると、式 (12.8) は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, 0) + gh(t, x) = 0. \quad (12.9)$$

この式は $\phi(t, x, 0)$ の時間微分を与える式で、先ほど導出した $h(t, x)$ の時間微分を与える式 (12.5) と対をなすものである。

[方程式系のまとめ] ここまでで得られた方程式 (12.5), (12.9), (12.2), (12.7) を改めて整理すると

$$(I) \quad \Delta \phi(t, x, z) = 0, \quad (12.10)$$

$$(II) \quad \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(t, x, 0), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, 0) + gh(t, x) = 0, \quad (12.11)$$

$$(III) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x, z) + \frac{P(t, x, z)}{\rho} + gz = \frac{P_0}{\rho} \quad (12.12)$$

という 4 本の式が得られた。

- (I) は $\phi(t, x, z)$ についてのラプラス方程式であり、これを解くことで**水中の速度分布**を決定できる。これを解くときに、無限に深い水底 ($z \rightarrow -\infty$) および水面での境界条件を境界条件を課す必要がある。
- (II) の 2 本の式は水面の位置 $h(t, x)$, 速度ポテンシャルの水面での値 $\phi(t, x, 0)$ についての方程式である。速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ が水面の位置 $z = 0$ で満たすべき**境界条件**とみなすこともできる。

前回の講義で行ったのと同様に、(I) の 2 つの式は一本の二階偏微分方程式に書き換えることができる。(I) の第二式の時間微分 ∂_t をとり、第一式を使って書き換えると

$$\frac{\partial^2 \phi(t, x, 0)}{\partial t^2} = -g \frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = -g \frac{\partial \phi(t, x, 0)}{\partial z} \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 \phi(t, x, 0)}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi(t, x, 0)}{\partial z} = 0. \quad (12.13)$$

この式は、後ほど ϕ の一般解から真の解を選別する際に用いられる。

- (III) は、速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ が求められた暁に、水中の圧力分布 $P(t, x, z)$ を定める式となっている。今回の講義では $P(t, x, z)$ についての解析は割愛する。

12.3 正弦波解

前節でまとめた方程式を解き、波を表す解を具体的に求めてみる。手順は下記の通り。

1. まず、(I) のラプラス方程式について、水面での境界条件を課さずに一般解 (の一部) を求める。
2. 得られた一般解について、水面での境界条件 (II) (特に式 (12.13)) を課して解を決定する。これで速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ と速度場 $\mathbf{v} = \nabla \phi$ が求まる。
3. (II) の式に $\phi(t, x, 0)$ を代入することで、水面の位置 $z = h(t, x)$ を決定する。

[$\Delta\phi = 0$ の正弦波解] 今回は、 $\phi(t, x, z)$ の一般解のうち、波の形状が三角関数で与えられる**正弦波解**を求めてみることにする。今回解くべきラプラス方程式は

$$\Delta\phi(t, x, z) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0. \quad (12.14)$$

この式の形を踏まえて、 $\phi(t, x, z)$ の関数形を

$$\phi(t, x, z) = f(z)e^{i(\omega t + kx)} \quad [k > 0, \omega : \text{実定数}, f(z) : \text{実関数}] \quad (12.15)$$

とおく。 ω, k はそれぞれ波の振動数と波数である。この $\phi(t, x, z)$ の形のまま方程式を解き、そののちに実部だけを取れば

$$\phi(t, x, z) = f(z) \cos(\omega t + kx) \quad (12.16)$$

という実数の正弦波解が得られる。この三角関数で書かれた関数形を使ってももちろん解けるのだが、**複素表示**された ϕ の式 (12.15) を使った方が計算が少しだけ簡単化する。

$\phi(t, x, z)$ が式 (12.15) の形で与えられると仮定すると、以下の通りラプラス方程式 (12.14) を常微分方程式に帰着できる。ラプラス方程式 (12.14) に ϕ の表式 (12.15) を代入すると

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(z)e^{i(\omega t + kx)} = \left((ik)^2 f(z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z) \right) e^{i(\omega t + kx)} = \left(-k^2 f(z) + \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \right) e^{i(\omega t + kx)} \quad (12.17)$$

$$\therefore \frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 f(z) = 0. \quad (12.18)$$

式 (12.18) は $f(z)$ についての常微分方程式で、その一般解も容易に見つけることができ

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}. \quad (A, B : \text{定数}) \quad (12.19)$$

ここで、無限に深い**水底での境界条件** $\lim_{z \rightarrow -\infty} \mathbf{v} = 0$ を使う。 $z \rightarrow -\infty$ で速度場 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ がゼロになるとき、速度ポテンシャル ϕ は定数に漸近する必要がある。 $k > 0$ と仮定していたので、式 (12.19) の2つの項のうちこの条件を満たすのは第一項の Ae^{kz} だけである (第二項は $\lim_{z \rightarrow -\infty} e^{-kz} = \infty$ と発散する)。したがって、水底での境界条件を満たす解は

$$\phi(t, x, z) = Ae^{kz} e^{i(\omega t + kx)} \quad (12.20)$$

という形で与えられる。これがラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ の**正弦波解**で**水底での境界条件**を満たすものとなる。

[**水面での境界条件**] ラプラス方程式の一般解 (12.20) の段階では、定数 ω, k は任意の定数であった。この解が**水面での境界条件**の式 (12.13) を満たすことを要請すると、 ω と k を関係づける式 (**分散関係式**と呼ばれる) が得られる。

一般解の式 (12.20) を水面 $z = 0$ における境界条件の式 (12.13) に代入すると

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi(t, x, 0) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right) Ae^{kz} e^{i(\omega t + kx)} \Big|_{z=0} \quad (12.21)$$

$$= (-\omega^2 + gk) Ae^{kz} e^{i(\omega t + kx)} \Big|_{z=0} = (-\omega^2 + gk) Ae^{i(\omega t + kx)} \quad (12.22)$$

$$\therefore -\omega^2 + gk = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \omega(k) = \pm\sqrt{gk}. \quad (12.23)$$

この通り、水面の境界条件を課すことで ω と k との関係式が得られた。

音波や前回の講義で解説した**浅水波**では、これに対応する関係式は $\omega(k) = \pm ck$ (c : 波動の伝搬速度) で、 ω と k 。深水波については $\omega(k)$ は \sqrt{k} に比例しており、だいぶ趣が異なる。次回の講義で解説するが、式 (12.23) のような ω と k の関係式は**分散関係式**と呼ばれており、この式の形で波の性質が大きく変わるといふ特徴がある。

[速度場、水面の形状] まず、上記で得られた速度ポテンシャル $\phi(t, x, z)$ (一般解の式 (12.20) に分散関係 (12.23) を代入したもの) について、その実部を取ることで実際に実現される値を書き下すと

$$\phi(t, x, z) = Ae^{kz} \cos(\omega(k)t + kx), \quad \omega(k) = \pm\sqrt{gk}. \quad (12.24)$$

$\omega(k) = +\sqrt{gk}$ が x 軸の負の方向に、 $\omega(k) = -\sqrt{gk}$ が正の方向に伝搬する波を表している。また、この式から流体の速度場 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ を求めると

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \phi(t, x, z) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} Ae^{kz} \cos(\omega(k)t + kx) = Ae^{kz} \begin{pmatrix} -k \sin(\omega(k)t + kx) \\ 0 \\ k \cos(\omega(k)t + kx) \end{pmatrix}. \quad (12.25)$$

また、水面の位置 $z = h(t, x)$ を定めるために、式 (12.24) を (II) の第二式に代入すると

$$0 = \frac{\partial\phi}{\partial t}(t, x, 0) + gh(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} [Ae^{kz} \cos(\omega(k)t + kx)] + gh(t, x) = -A\omega(k)e^{kz} \sin(\omega(k)t + kx) + gh(t, x) \quad (12.26)$$

$$\therefore h(t, x) = \frac{A\omega(k)}{g} e^{kz} \sin(\omega(k)t + kx), \quad \omega(k) = \pm\sqrt{gk}. \quad (12.27)$$

12.4 深水波の特徴

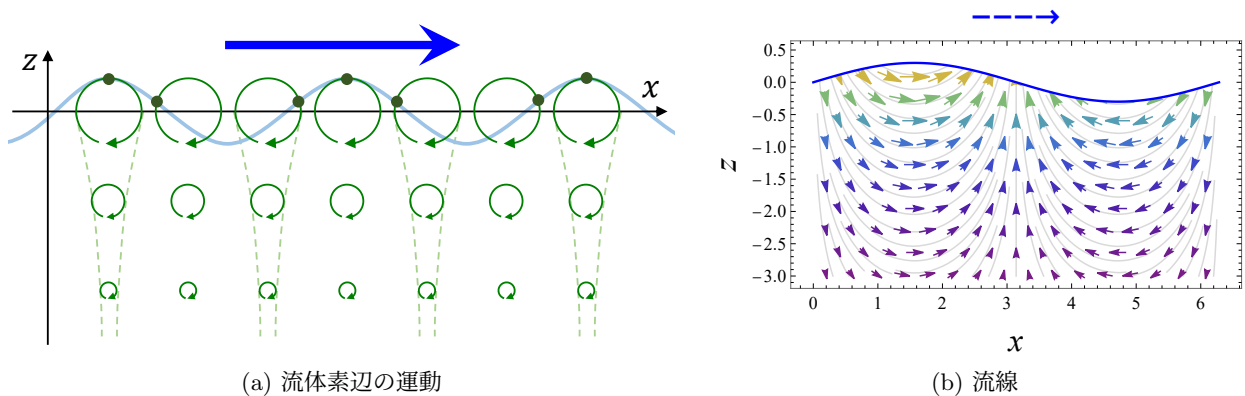


図 21: (a) 微小振幅の深水波における流体素辺の運動。波は右向きに進行するが、各流体素辺は各地点で円運動をしているだけである。(b) 深水波についての速度場 \mathbf{v} と流線。 \mathbf{v} が時間依存するため、流線と流体素辺の運動の軌跡が互いに異なっている。

[流体素辺の運動] 式 (12.25) の速度場 $\mathbf{v}(t, x, z)$ を時間積分すれば、各流体素辺の変位 $\Delta\mathbf{r}(t)$ を

$$\Delta\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(t)) dt \quad (12.28)$$

と求めることができる。ただし、速度場 $\mathbf{v}(t, x, z)$ は時間依存性 (t) だけでなく位置依存性 ($\mathbf{r}(t)$) も持っている。このため、流体素辺が動くとともに速度場の値も変化するため、上記の積分を実行するのが若干難しくなる。ここで、微小振幅の波については流体素辺の運動も微小なので、速度場の値を流体素辺の初期位置での値で近似することができる。すなわち、初期位置が $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ (定数) の流体素辺について

$$\Delta\mathbf{r}(t) \simeq \int \mathbf{v}(t, \mathbf{r}_0) dt. \quad (12.29)$$

これを、式 (12.25) の \mathbf{v} について実際にやってみると

$$\Delta \mathbf{r}(t) \simeq \int \mathbf{v}(t, \mathbf{r}_0) dt = \int A e^{kz_0} \begin{pmatrix} -\sin(\omega(k)t + kx_0) \\ 0 \\ \cos(\omega(k)t + kx_0) \end{pmatrix} dt = \frac{A k e^{kz_0}}{\omega(k)} \begin{pmatrix} \cos(\omega(k)t + kx_0) \\ 0 \\ \sin(\omega(k)t + kx_0) \end{pmatrix} \begin{matrix} (x) \\ (y) \\ (z) \end{matrix} \quad (12.30)$$

この式は、時間 t が経過するにつれて流体素辺の位置は円形を描くことを示している。円の大きさは $\exp(kz_0)$ に比例しており、位置が深くなると円軌道は指数的に小さくなる。これを図示したのが図 21a である。各流体素辺は初期位置付近で円運動しているだけなのだが、その結果として波の形状が一方方向に伝搬するのが特徴である。

[速度場、流線] ある時刻 $t = t_0$ の速度場 $\mathbf{v}(t_0, \mathbf{r})$ と、それをつなげてできる流線は図 21b のようになる。今回の速度場は一方方向に伝搬する波を表すもので、そのため時間依存性を持っている。第 1 回の講義で解説した通り、速度場が時間依存性を持つ場合には、流線とある流体素辺の運動の軌跡は一致しない。流体素辺の運動 (図 21a) と流線 (図 21b) が全く異なった構造を持っているのはこのためである。

第13回 群速度

これまでに流体の波動の例として音波や水面の波を紹介してきた。この波の性質で重要なものはもちろん波動の伝搬速度である。特に、音波については音速 c で任意の波形が飛んでいくことを示した：

$$\delta\rho(t, x) = f(ct - x) + g(ct + x). \quad (13.1)$$

一方、第12回の講義で解説した深水波については、振動数 ω 、波数 k (波長 $2\pi/k$) との間に

$$h(t, x) \propto \sin(-\omega(k)t + kx), \quad \omega(k) = \pm\sqrt{gk} \quad (13.2)$$

という関係が成立するのであった³⁸。ただし、 $h(t, x)$ は水面の高さ、 g は重力定数である。このような ω と k の関係式 (分散関係と呼ばれる) と、「波の伝搬速度」がどのように関係づけられるかについて今回は解説する。

13.1 位相速度・群速度

13.1.1 位相速度

式 (13.2) のように、波の振動数 ω が波数 k の関数 $\omega = \omega(k)$ として与えられている場合に何が起こるのかを順次調べていく。まず、一つの正弦波で表される波動 $\phi(t, x)$ について考える：

$$\phi(t, x) = \sin(-\omega(k)t + kx). \quad (13.3)$$

この波動について、位相 (\sin の引数 $-\omega(k)t + kx$) の値が一定となるような曲線 $(t, x(t))$ が存在する：

$$-\omega(k)t + kx(t) = C \quad (C: \text{定数}) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{\omega(k)}{k}t + \frac{C}{k}. \quad (13.4)$$

すなわち、速度 $\omega(k)/k$ で移動する位置 $x(t) = \frac{\omega(k)}{k}t + x_0$ (x_0 は x の初期位置) に沿って位相は一定の値を取り続ける。位相が一定の値を取るなら式 (13.3) の値も一定となるため、この波動については初期時刻の波形 (正弦波の山や節の位置) が速度 $\omega(k)/k$ で移動していくことになる。この、波動の位相から定められる波の伝搬速度 $\frac{\omega(k)}{k}$ を位相速度と呼ぶ：

13.1.2 群速度

式 (13.3) では単一の正弦波で表される波動を考えたが、一般的な波形を持つ波動は異なる $\omega(k), k$ を持つ正弦波を重ね合わせたもので与えられる。比較的単純な場合として、波数 k で振幅が1の正弦波 (振動数 $\omega(k)$) に、波数が $k \pm \Delta k$ で振幅が $1/2$ の正弦波 (振動数 $\omega(k \pm \Delta k)$) を重ね合わせた場合を考える：

$$\phi(t, x) = \sin(-\omega(k)t + kx) + \frac{1}{2} \sin(-\omega(k + \Delta k)t + (k + \Delta k)x) + \frac{1}{2} \sin(-\omega(k - \Delta k)t + (k - \Delta k)x). \quad (13.5)$$

Δk が微小な場合、 $\omega(k)$ の変化分も微小となるので

$$\omega(k \pm \Delta k) = \omega(k) \pm \frac{d\omega(k)}{dk} \Delta k + \mathcal{O}(\Delta k^2) \quad (13.6)$$

³⁸第12回の講義では、式を単純化するため波動の位相を $+\omega t + kx$ と ωt の符号を正にセットした。今回は、より標準的な選び方である $-\omega t + kx$ を使って解説を進める。

と $\omega(k \pm \Delta k)$ をテイラー展開でき、 Δk 項までで展開を打ち切ってもよい近似となる。この近似を用いると、三角関数の加法定理より

$$\sin(\underbrace{-\omega(k \pm \Delta k)t + (k \pm \Delta k)x}_{\simeq \omega(k) \pm \frac{d\omega(k)}{dk} \Delta k}) \simeq \sin\left[-\omega(k)t + kx \pm \left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right] \quad (13.7)$$

$$= \sin(-\omega(k)t + kx) \cos\left[\left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right] \pm \cos(-\omega(k)t + kx) \sin\left[\left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right]. \quad (13.8)$$

\pm 符号の現れ方に注意すると、式 (13.5) の第 2, 第 3 項の合計は上式の第 1 項の寄与だけで与えられることがわかる：

$$\frac{1}{2} \sin(-\omega(k+\Delta k)t + (k+\Delta k)x) + \frac{1}{2} \sin(-\omega(k-\Delta k)t + (k-\Delta k)x) = \sin(-\omega(k)t + kx) \cos\left[\left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right]. \quad (13.9)$$

この式を使って正弦波の重ね合わせ (13.5) を改めて評価すると

$$\phi(t, x) \simeq \sin(-\omega(k)t + kx) + \sin(-\omega(k)t + kx) \cos\left[\left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right] \quad (13.10)$$

$$= \left\{1 + \cos\left[\left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right]\right\} \sin(-\omega(k)t + kx). \quad (13.11)$$

\sin 関数で書かれている青字部分は重ね合わせる前の正弦波と同じもので、その位相速度が $\omega(k)/k$ である進行波を表す。一方、緑字部分は正弦波の振幅に相当する部分で、振幅が一定 (式 (13.5) では振幅が 1) の正弦波を重ね合わせたことでうなりが生じていることを表す。

式 (13.11) で重要なのは、**振幅も一定の速度で移動している**点である。この式の \cos に含まれる $-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x$ が一定値をとる曲線 $(t, x(t))$ の上では、振幅 $1 + \cos\left[\left(-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x\right) \Delta k\right]$ は一定の値を取る。この曲線は

$$-\frac{d\omega(k)}{dk}t + x(t) = C \quad (C: \text{定数}) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{d\omega(k)}{dk}t + C. \quad (13.12)$$

これは、速度 $\frac{d\omega(k)}{dk}$ で移動する位置 $x = x(t)$ では振幅 (式 (13.5) の緑字部分) が一定の値を取り続けることを意味する。すなわち、(少なくとも式 (13.5) については) **波動の振幅の形状は速度 $\frac{d\omega(k)}{dk}$ で移動する**。こちらの速度は、異なる波数 k を持った波形を重ね合わせて得られる**波群**の速度であることから**群速度**と呼ばれる。

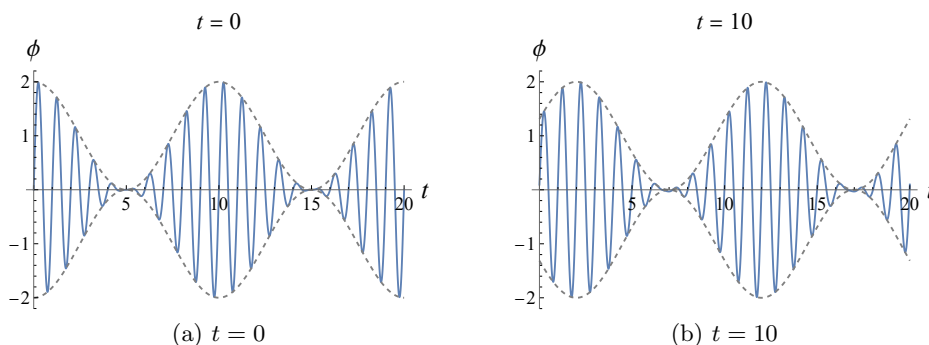


図 22: 式 (13.5) の波動 $\phi(t, x)$ を $k = 2\pi$ (波長 = 1), $\Delta k = k \times \frac{1}{10}$, $\omega(k) = \sqrt{k}$ の場合にプロットしたもの。深水波で重力加速度を $g = 1$ とセットした場合に相当する。この場合の群速度は $\frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \simeq 0.2$ で、そのために $t = 0 \sim 10$ の間に $\Delta x \simeq 2$ ほど振幅の形状が移動している。

13.2 波束の群速度

式 (13.5) では3つの正弦波を重ね合わせたが、より多数の波を重ね合わせることである点の近傍だけに存在し、それ以外ではほとんどゼロとなる波束を作れることもできる。複素表示された波動を考えることにして、以下のような波数 k についての積分で与えられる波動を考える：

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk f(k) e^{i(-\omega(k)t+kx)}. \quad (13.13)$$

前節と同様、振動数は $\omega = \omega(k)$ のように k の関数として与えられているとする。また、被積分関数に含まれる係数 $f(k)$ は、 $k = k_0$ でピークを持ち、 $|k - k_0| > \Delta k (> 0)$ ではほとんどゼロになるとする。こうすることで、空間的に $\Delta x \simeq \frac{2\pi}{k_0}$ 程度の広がりを持った波束を作れることが知られている。

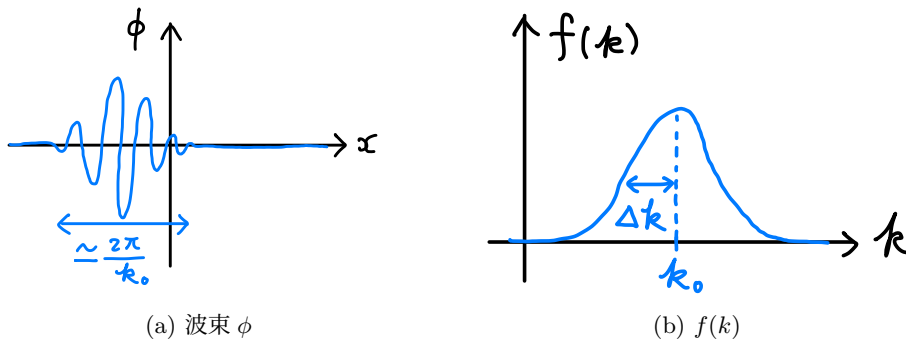


図 23: (a) 式 (13.13) で表される波束 $\phi(t, x)$. $\Delta x \simeq 2\pi/k_0$ 程度の空間的な広がりを持つ。(b) 波束 (13.13) の被積分関数の係数 $f(k)$. $k = k_0$ を中心に幅 Δk 程度の広がりを持ち、その外側でほぼゼロとなる。

$f(k)$ が $k_0 - \Delta k < k < k_0 + \Delta k$ の外側ではほとんどゼロになることから、式 (13.13) の積分は

$$\phi(t, x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk f(k) e^{i(-\omega(k)t+kx)} \quad (13.14)$$

と近似できる。この積分の中で k は $|k - k_0| < \Delta k$ の範囲しか動かないため、 $\omega(k)$ をテイラー展開の一次までで近似しても差し支えない³⁹：

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{d\omega(k)}{dk} (k - k_0) + \mathcal{O}\left(\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} (k - k_0)^2\right). \quad (13.15)$$

これを式 (13.14) に代入すると

$$\phi(t, x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk f(k) e^{i[-(\omega(k_0) + \frac{d\omega(k)}{dk} (k - k_0))t + kx]} \quad (13.16)$$

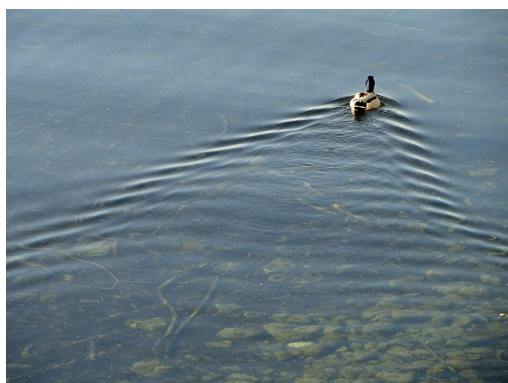
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i[-(\omega(k_0) - \frac{d\omega(k)}{dk} k_0)t]} \underbrace{\int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} dk f(k) e^{i(-\frac{d\omega(k)}{dk} t + x)k}}_{\equiv F(-\frac{d\omega(k)}{dk} t + x)}. \quad (13.17)$$

この式の後半部分に現れる k 積分は $-\frac{d\omega(k)}{dk} t + x$ だけで値が決まるため、この部分を関数 $F\left(-\frac{d\omega(k)}{dk} t + x\right)$ と定義した。この式は、式 (13.13) で表される波動の振幅 $F\left(-\frac{d\omega(k)}{dk} t + x\right)$ の形状が速度 $\frac{d\omega(k)}{dk}$ ($k = k_0$ における値) で移動することを表している。こうして、一般の波束 (13.13) についてもその群速度が $\frac{d\omega(k)}{dk}$ となることが分かった。

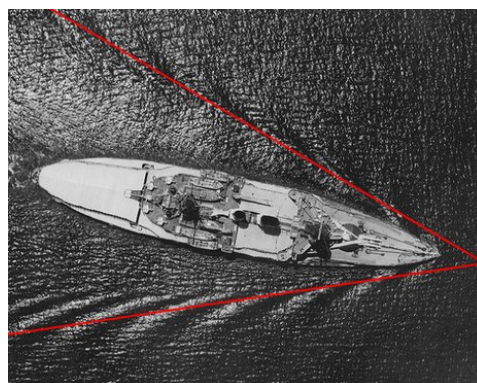
³⁹ただし、誤差項が無視できるためには $\left|\frac{d\omega(k)}{dk} \Delta k\right| \gg \left|\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \Delta k^2\right| \Leftrightarrow |\Delta k| \ll \left|\frac{d\omega/dk}{d^2\omega/dk^2}\right|$ という条件が必要になる。

13.3 ケルビン波

水面を鳥や船などが移動する際に作る波は、波源を起点とする V 字型を描き、なおかつ波の山は V 字の向きよりも若干開いている (図 24 参照)。なおかつ、実は波の角度は波源の速度に依らずおおよそ一定となる。この波のパターンはケルビン波 (航跡波) と呼ばれており、深水波のように群速度と位相速度が一定の比を取る場合に生じる。このパターンがどのように生じるかについて調べてみることにする⁴⁰。



(a) 鴨の作る波



(b) 船の船首から生じる波

図 24: 水面を移動する鴨や船の作る波のパターン (ケルビン波)。波源を起点とする V 字型の領域に波が存在し、波の山は V 字型よりも少し開いた角度に並ぶ。波の角度は波源の速度に依らずおおよそ一定となる。(出典: <https://ja.wikipedia.org/wiki/航跡波>)

13.3.1 深水波の群速度・位相速度

第 12 回の講義で示した通り、深水波については

$$\omega(k) = \sqrt{gk} \quad (g: \text{重力定数}) \quad (13.18)$$

という関係が成立する。この式に基づいて位相速度 (phase velocity) c_p , 群速度 (group velocity) c_g を導出してみると

$$c_p = \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad c_g = \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2}c_p. \quad (13.19)$$

すなわち、位相速度 c_p , 群速度 c_g はどちらも波数 k に依存して変化し、なおかつどの波数 k についても常に群速度は位相速度の半分となる。

音波や浅水波については、任意の波形が一定の速度 (音速) c で伝搬するのであった。この場合は位相速度と群速度の両方が音速 c と一致し、 $\omega(k) = ck$ のように $\omega(k)$ は波数 k に比例する。一方、深水波の場合には群速度と位相速度が異なるが、これに対応して波が伝搬するにつれて波形が変化する。この波形の変形を司っているのが分散関係の式 $\omega = \omega(k)$ である。

13.3.2 移動する波源の作る波

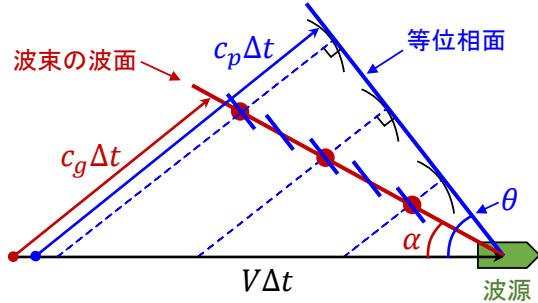
前節で示した性質 $c_g = \frac{1}{2}c_p$ に基づいて、移動する波源が作る深水波の波形について調べる。

⁴⁰ケルビン波についての詳細については <https://ja.wikipedia.org/wiki/航跡波>, <https://users.aalto.fi/~thunebel/shipwave.pdf>, G. B. Whitham “Linear and Nonlinear Waves” (John Wiley & Sons) などの資料を参照のこと。Kelvin wakes, boat wakes などのキーワードで検索すると多く出てくる。

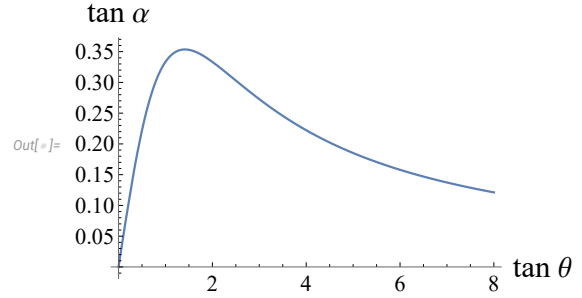
[運動する波源と等位相面] 波源の速度を V とし、これが波の位相速度 c_p よりも速いとする。このとき、移動する波源から出る波が等位相となる面（波の山や節に平行な波面）の角度 θ は

$$\sin \theta = \frac{c_p}{V} \quad (13.20)$$

で与えられる（図 25a の青線）。超音速で運動する物体から出る衝撃波が作るマッハ錐の開き角と同じ式である。等位相面に沿って波の位相が一定であるために、**波の山・節は等位相面と平行になる**。



(a) ケルビン波の模式図



(b) $\tan \alpha$ の θ 依存性

図 25: (a) 速度 V で移動する波源が作るケルビン波の模式図。(b) 波束の波面の角度 α の等位相面の角度 θ に対する依存性を $c_g/c_p = 1/2$ の場合にプロットしたもの。 $\tan \alpha$ は $\tan \theta = \sqrt{2}$ の時に最大値 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ をとる。

[波束の波面] 群速度 c_g が位相速度 c_p と異なる場合、波の振幅が大きくなる位置は速度 c_g で移動する。特に、深水波のように $c_g < c_p$ となる場合は、等位相面よりも波源に近い位置に振幅の大きい領域が表れる。これを書いたものが図 25a の赤線であり、その角度を α とする。この線に沿って、先ほど説明した等位相面（波の山・節）が周期的に現れる（図 25a の赤線に沿って配置されている青線の列）。

図 25a 中の頂角 $\theta, \theta - \alpha$ の直角三角形それぞれに注目すると

$$\tan \theta = \frac{c_p}{\sqrt{V^2 - c_p^2}}, \quad \tan(\theta - \alpha) = \frac{c_p - c_g}{\sqrt{V^2 - c_p^2}} \quad (13.21)$$

が成立することがわかる。 V を消去し、 $\tan(\theta - \alpha)$ についての加法定理を使って式を整理すると⁴¹

$$\tan \alpha = \frac{\frac{c_g}{c_p} \tan \theta}{1 + \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta} \quad (13.24)$$

が成立する。

[実際に見える波] 式 (13.24) は波束の波面の角度 α を等位相面の角度 θ で与える式である。式 (13.20) で示されている通り、 θ は位相速度と波源の速度の比 c_p/V で決まる。今回は、波源の速度の方が位相速度よりも速い場合 ($c_p/V < 1$) について考える。この場合には $0 < \sin \theta < \pi/2$, $0 < \tan \theta < \infty$ となる。

⁴¹計算の詳細は下記の通り。式 (13.21) について辺々の比を取ると

$$\frac{\tan(\theta - \alpha)}{\tan \theta} = 1 - \frac{c_g}{c_p}. \quad (13.22)$$

$\tan(\theta - \alpha)$ の加法定理を使ってこの式の左辺を展開すると

$$\frac{\tan(\theta - \alpha)}{\tan \theta} = \frac{1}{\tan \theta} \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha}. \quad (13.23)$$

これを式 (13.22) に代入して $\tan \alpha$ について解いたものが式 (13.24) である。

実は、式 (13.24) で決まる α には最大値が存在する。式 (13.24) を θ について微分を取ると⁴²

$$\frac{d \tan \alpha}{d \theta} = \frac{d \tan \theta}{d \theta} \frac{d \tan \alpha}{d \tan \theta} \propto \frac{d}{d \tan \theta} \frac{\frac{c_g}{c_p} \tan \theta}{1 + \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta} \propto 1 + \left(\frac{c_g}{c_p} - 1\right) \tan^2 \theta \quad (13.28)$$

となることが示せる。これがゼロになる θ で $\tan \alpha$ は最大値を取りますが、深水波の場合 ($c_g/c_p = 1/2$) にその値は

$$1 + \frac{1}{2} \tan^2 \theta = 0 \quad \therefore \tan \theta = \sqrt{2}, \quad \tan \alpha \Big|_{\tan \theta = \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2} \tan \theta}{1 + \frac{1}{2} \tan^2 \theta} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (13.29)$$

これらの値に対応する角度は $\theta = \tan^{-1} \sqrt{2} \simeq 54.7^\circ$, $\alpha = \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}}{4} \simeq 19.5^\circ$ である。

深水波の位相速度は $c_p = \sqrt{g/k}$ と波数 k に依存して変化する (小さい k / 長波長の場合に速くなる)。波源からは様々な波数 k の波が生じるが、これらのうち目立って見えるのは最も外側に広がる波で、それよりも内側の波は干渉によって振幅が小さめになる。この一番外側の波の角度は先ほど求めた $\alpha \simeq 19.5^\circ$ で、それに沿って角度 $\theta \simeq 54.7^\circ$ の波の山が並ぶことになる。

α の式 (13.29) に波源の速度 V が現れないことからわかる通り、このケルビン波の角度 θ, α は群速度・位相速度の比 c_g/c_p だけで決まり、波源の速度 V に依存しない。水面を動く鳥と船の場合で波面の角度がおおよそ同じになるのはこれが原因である。

⁴²計算の詳細を書くと

$$\frac{d \tan \alpha}{d \theta} = \frac{d \tan \theta}{d \theta} \frac{d \tan \alpha}{d \tan \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d}{d \tan \theta} \left(\frac{\frac{c_g}{c_p} \tan \theta}{1 + \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta} \right) \quad (13.25)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\frac{c_g}{c_p} \left[1 + \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta\right] - \frac{c_g}{c_p} \tan \theta \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) 2 \tan \theta}{\left[1 + \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta\right]^2} \quad (13.26)$$

$$= \frac{\frac{c_g}{c_p}}{\cos^2 \theta} \frac{1 - \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta}{\left[1 + \left(1 - \frac{c_g}{c_p}\right) \tan^2 \theta\right]^2} \propto 1 + \left(\frac{c_g}{c_p} - 1\right) \tan^2 \theta. \quad (13.27)$$

第14回 非線形波動

これまでの講義で扱ってきた波動については、振幅などが十分に小さく、高次の微小量が無視できるという近似（線形近似）を使って解析してきた。その結果、波動は線形微分方程式に従い、それを解析的に解くことも比較的容易にできた。今回の講義では、この近似が使えない場合、すなわち**有限振幅の波動**（微小ではない振幅の波動）について解説する⁴³。

波動の非線形性が原因で起こる現象としては**波形の変形**や**衝撃波形成**などがあり、現実的な流体でも実際に起こるような重要なものとなっている。一方、有限振幅の波動が従う微分方程式は密度・流速などの動変数について**非線形**の微分方程式となり、それを解くことも一般には難しくなる。

比較的単純な場合についてはある程度解析的に調べることができるので、以下では最も単純な場合である**一変数の移流方程式**についてまず解説し、同様の解析が流体の運動方程式（連続の式・オイラーの方程式）についても使えることを順次説明する。

14.1 移流方程式

非線形波動を調べるための例として、1方向に伝搬する波動 $\rho(t, x)$ についての**移流方程式**：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (14.1)$$

を考える。この式に含まれる c が定数であれば、この式は線形の移流方程式であり、その一般解は

$$\rho(t, x) = f(ct - x) \quad (f: \text{任意関数}) \quad (14.2)$$

と簡単に求まる。この解は、初期時刻 $t = 0$ における波動が、形を変えないまま x の正の方向に一定の速度 c で移動する様子を表している。

より一般的な場合として、 c が**変数 ρ に依存する関数**になっている場合が考えられる：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (14.3)$$

$c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x}$ 項は変数 ρ について非線形（ ρ の1次関数でない）なので、この方程式は**非線形の移流方程式**に分類される。

先ほど見たように、 c は波動の伝搬速度と対応している。 c が ρ に依存する場合には、**波動の振幅に応じて伝搬速度が変化すると期待**できる。しかし、式(14.2)で $c \rightarrow c(\rho)$ と単純に置き換えたものは解になっておらず、少し工夫しないとこの方程式を解くことはできない。

[**移流方程式の線形化**] 非線形の移流方程式(14.3)についても、振幅が微小な場合には伝搬速度が一定の式(14.1)を得ることができる。 $\rho(t, x) = \rho_0 + \delta\rho(t, x)$ (ρ_0 : 定数)を式(14.3)に代入し、 $c(\rho)$ を

$$c(\rho) = c(\rho_0) + \frac{dc}{d\rho}(\rho_0)\delta\rho + \dots \quad (14.4)$$

とテイラー展開した上で、式(14.3)中で $\delta\rho$ の二次以上となる高次項を無視すると

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + c(\rho_0) \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} = 0 \quad (14.5)$$

となる。 $c(\rho_0)$ は定数なので、線形の移流方程式(14.1)と同じ形の方程式となっている。

⁴³非線形波動については非常に多くの話題があり、今回の講義ではそのごく一部分しか開設できない。より詳細については G. B. Whitham “Linear and Nonlinear Waves” (John Wiley & Sons), 巽友正「流体力学」(裳華房)などの資料を参照のこと。

[移流方程式の例] 移流方程式は一方向に何かが流れる現象を記述する方程式で、現実の様々な現象を再現しうるものである。流体・波動のうちある一方向に伝搬する成分だけに注目した場合のほか、交通流（ ρ が車の密度。 ρ が大きく渋滞している場合には速度 $c(\rho)$ が下がる）、氷河の運動（ ρ が氷河の厚みで、厚い箇所ほど流れる速度 $c(\rho)$ が上がる）など、様々な現象がこのタイプの方程式でモデル化できる。また、流体の運動方程式からもこの型の方程式が出てくることを後ほど示す。

14.2 特性曲線法

非線形の移流方程式 (14.3) を解くための手法が、**各流体素辺が描く軌道**に注目することで方程式を単純化する**特性曲線法**である。 $c(\rho)$ は波動の伝搬速度に対応する、という前節で説明した期待を踏まえ、

$$\frac{dx(t)}{dt} = c(\rho(t, x(t))) \quad (14.6)$$

を満たす曲線 $x = x(t)$ を導入し、これを**特性曲線**と呼ぶ。 $\rho(t, x)$ は時間・空間に依存するため、伝搬速度 $c(\rho)$ も場所によって異なる値をとる。特性曲線は、各地点を速度 $c(\rho(t, x))$ で移動する点が描く軌道である。

特性曲線の定義式 (14.6) を移流方程式 (14.3) に代入して変形すると

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{dx(t)}{dt} \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} = \frac{d\rho(t, x(t))}{dt} \quad (14.7)$$

$$\therefore \frac{d\rho(t, x(t))}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(t, x(t)) = (\text{定数}) . \quad (14.8)$$

この式は、**特性曲線 $x = x(t)$ に沿って $\rho(t, x)$ の値は変化しない**ことを意味する。さらに、特性曲線の傾き $c(\rho)$ は ρ の値だけで決まるのだから、 ρ が一定ということは**特性曲線は傾き $c(\rho)$ が一定の直線**となる。ただし、ある一本の特性曲線上では傾き $c(\rho)$ が一定となるが、この傾きは各地点から延びる特性曲線ごとに異なっていてよい。

この**特性曲線法**で波動 $\rho(t, x)$ の時間発展を決める手順は下記の通り。

1. 初期時刻 $t = 0$ の波形を $\rho(t = 0, x) = \rho_0(x)$ と与える。
2. $t = 0$ 面の各地点 $x = \xi$ から傾きが $c(\rho(t = 0, \xi)) = c(\rho_0(\xi))$ の直線（特性曲線）

$$x = \xi + c(\rho_0(\xi))t \quad (14.9)$$

を (t, x) 空間に伸ばす。起点の位置 $x = \xi$ ごとに異なる特性曲線が得られ、 ξ を動かしていくことで (t, x) 平面が特性曲線の族で埋まることになる。

3. 各特性曲線に沿って、 ρ の値は初期時刻 $t = 0$ での値 $\rho(t = 0, x = \xi) = \rho_0(\xi)$ のままで一定となる。したがって、時刻 t における波動 $\rho(t, x)$ の分布は、各特性曲線の位置 $x = \xi + c(\rho_0(\xi))t$ と、その特性曲線についての ρ の値 $\rho = \rho_0(\xi)$ から再現できる。すなわち、

$$\rho(t, x = \xi + c(\rho_0(\xi))t) = \rho_0(\xi) . \quad (14.10)$$

各時刻 t について $-\infty < \xi < \infty$ を動かしていけば、各位置 $x = \xi + c(\rho_0(\xi))t$ における $\rho(t, x)$ の値がこの式より得られる。

[具体例： $c = (\text{定数})$ の場合] 式 (14.1) のように伝搬速度 c が ρ に依らない定数の場合、特性曲線は

$$x = \xi + ct \quad (14.11)$$

で与えられる平行な直線群となる。図 26 参照。初期時刻における波形 $\rho(t = 0, x) = \rho_0(x)$ が特性曲線に沿って移動するので、時刻 t における波形は初期波形 $\rho(x)$ を平行移動したもので与えられる：

$$\rho(t, x = \xi + ct) = \rho_0(\xi) . \quad (14.12)$$

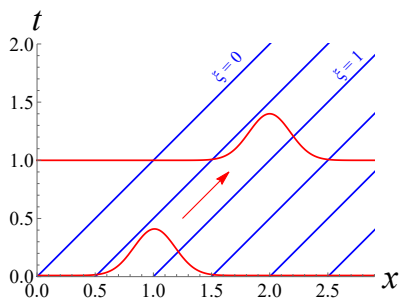


図 26: $c = 1$ (定数) の場合の特性曲線 (青線) と波動 $\rho(t, x)$ の伝搬 (赤線)。特性曲線は傾き 1 の直線群で、 $\rho(t, x)$ は初期波形が速度 1 で平行移動したもので与えられる。各特性曲線上で ξ の値は一定で、その特性曲線の $t = 0$ における x の位置がその値となる。

[具体例: $c(\rho) = \rho$ の場合] 式 (14.3) のように伝搬速度 c が波動の値 ρ に依存して変化する場合の簡単な例として、伝搬速度が ρ に等しい場合 $c(\rho) = \rho$ を考える。この場合の特性曲線と $\rho(t, x)$ の値は (図 27 参照)

$$x = \xi + \rho_0(\xi)t, \quad \rho(t, x = \xi + \rho_0(\xi)t) = \rho_0(\xi). \quad (14.13)$$

ρ の値が大きい点ほど移動速度 ($c(\rho) = \rho$) が大きいので、波動の山の頂点付近が最も速く進む。この効果のため、時間とともに波形は変形し、最終的には多価関数状の形状となる。特性曲線の傾き ($c(\rho) = \rho_0(\xi)$) は起点の位置 $x = \xi$ ごとに異なり、そのために特性曲線同士の間隔が場所によって変化することがこの波形の変形と対応している。

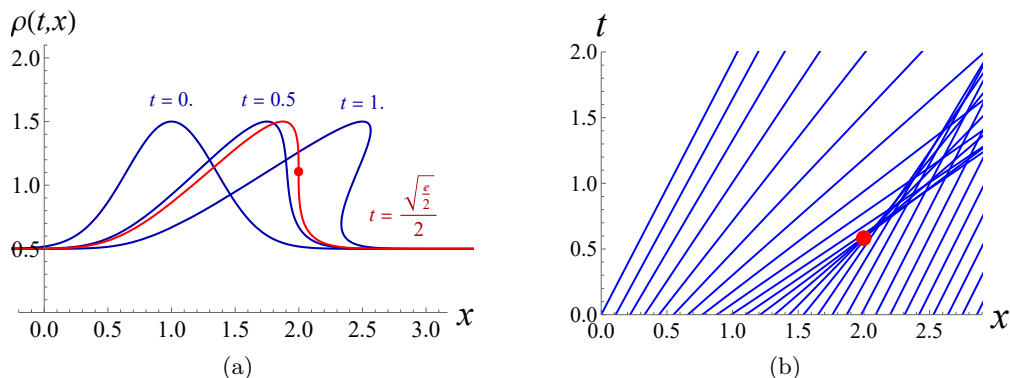


図 27: (a) $c(\rho) = \rho$, $\rho_0(x) = \frac{1}{2} + e^{-\left(\frac{x-1}{1/2}\right)^2}$ の場合の波動伝搬。時刻 $t = 0$ における初期波形から時間経過とともに波形が変形する。時刻 $t = \sqrt{e}/8$ で波形の傾き $\partial\rho/\partial x$ が無限大になる点が表れ (赤線)、その後の時刻では $\rho(t, x)$ は x の多価関数となる。(b) この場合の特性曲線。各特性曲線の傾きは初期時刻 $t = 0$ における波形 $\rho = \rho_0(x)$ の大きさに等しい。波形のピーク付近で傾き (伝搬速度) が大きくなるため、その右側の領域で特性曲線の間隔が狭くなる。時刻 $t = \sqrt{e}/8 \simeq 0.58$ 以降には特性曲線同士が交わる領域 (赤点とその右上の領域) が生じる。これが図 (a) で見られる $\rho(t, x)$ が x の多価関数に変形する現象と対応している。

14.3 衝撃波形成

移流方程式 (14.3) に従う $\rho(t, x)$ を前節で求めたが、その性質をもう少し詳しく調べてみる。特に、伝搬速度 c が振幅 ρ に依存する場合は、図 27 で見た通り波形が切り立った形状に変形するという現

象が見られた。この現象について解析を行う。

前節で説明した通り、各特性曲線上で ξ の値は一定（その特性曲線の $t = 0$ における位置 x の値が ξ ）となる。逆に、 (t, x) 空間のある点に対して、その点を通る特性曲線とそれに付随する ξ を対応付けることができる。この対応関係に基づくと、 ξ を (t, x) の関数とみなせる。その定義式は式 (14.9):

$$x = \xi + c(\rho_0(\xi))t \equiv \xi + c(\xi)t \quad (14.14)$$

で、ある (t, x) の値に対する ξ の値はこの式を満たすように定められる。ただし、以下の解析を簡単化するため $c(\xi) \equiv c(\rho_0(\xi))$ と再定義した。

後ほど必要になるので、式 (14.14) から $\xi(t, x)$ の t, x 微分を求めておく。 ξ が (t, x) の関数であると思って式 (14.14) の t, x 微分を計算すると

$$\frac{\partial}{\partial t} (14.14) : 0 = \frac{\partial \xi}{\partial t} + c'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial t} t + c(\xi) \quad \therefore \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{c(\xi)}{1 + c'(\xi)t}, \quad (14.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (14.14) : 1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} + c'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} t \quad \therefore \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{1 + c'(\xi)t}. \quad (14.16)$$

ただし $c'(\xi) = dc(\xi)/d\xi$.

さらに、各特性曲線上で ρ の値は一定となり、その値は $t = 0$ における初期値 $\rho_0(x)$ で与えられるのだった。ある特性曲線の $t = 0$ における位置が $x = \xi$, という定義を思い出すと

$$\rho(t, x) = \rho_0(\xi(t, x)) \quad (14.17)$$

という関係式が成立することがわかる。式 (14.10) で ξ を (t, x) の関数と思ったものに相当する。この $\rho(t, x)$ の t, x 微分をそれぞれ計算すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho'_0(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\rho'_0(\xi)c(\xi)}{1 + c'(\xi)t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho'_0(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\rho'_0(\xi)}{1 + c'(\xi)t}, \quad (14.18)$$

式 (14.18) で求めた $\rho(t, x)$ の微分の分母には $1 + c'(\xi)t$ という因子が入っている。 $c'(\xi) = c'(\rho)\rho'_0(\xi)$ は $c(\rho), \rho_0(\xi)$ の関数形だけで決まる定数である。ここで、 $c'(\xi) < 0$ となっている場合には、分母 $1 + c'(\xi)t$ は有限の時刻

$$1 + c'(\xi)t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{c'(\xi)} \equiv t_s(\xi) \quad (14.19)$$

でゼロになり、そのためこの瞬間に式 (14.18) に示した $\partial\rho/\partial t, \partial\rho/\partial x$ は無限大に発散する。

式 (14.19) に示した時刻 $t_s(\xi) = 1/(-c'(\xi))$ は ξ の関数であるが、ある ξ で $t_x(\xi)$ は最小値を取る。その最小値を $t_s^{(\min)}$ としよう。 $0 < t < t_s^{(\min)}$ の時間帯には、式 (14.18) の分母がゼロとならず ρ の微分が有限となるので、波形はいたるところ滑らかである。時刻 $t = t_s^{(\min)}$ の瞬間の波形 $\rho(t, x)$ は、傾き $\partial\rho/\partial x$ が発散していることに対応して垂直に切り立った形状をとる。なお、この瞬間に対応する点 $(t_*, x = \xi + c(\xi)t_*)$ を書いたのが図 27b の赤点で、それに対応する波形と ρ の微分が発散する点が図 27a の赤線・赤点である。この時刻以降にはさらに波形の変形が進み、多価関数のような折り返しがある波形に変化する。

$\rho(t, x)$ の定義（物理的起源）にもよるが、多くの場合波形 $\rho(x)$ が x の多価関数になることは物理的に許されず、その場合には $\rho(t, x)$ の不連続面（衝撃波）が形成されて伝搬する。上記の $t = t_x^{(\min)}$ は流体・気体における衝撃波形成の瞬間に相当する。衝撃波面が形成後どのように運動するかは式 (14.3) だけからは決まらず、別の解析を行う必要がある。今回の講義では時間の都合上割愛する。

14.4 理想気体の非線形波動

以上では単純な移流方程式 (14.3) について調べてきたが、本講義で主に取り扱ってきた流体の運動方程式（連続の式・オイラーの方程式）も同様の形に変更でき、今回の講義で説明した非線形波動や衝撃波形成などの議論をそれに基づいて行うことができる。

完全流体の連続の式・オイラーの方程式（外力なし）を1次元流の場合に書き下すと

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \rho = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \quad (14.20)$$

$$= \frac{dP}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

今回は、理想気体の状態方程式 $P = K\rho^\gamma$ を使うことにする。この場合、音速 $c = \sqrt{dP/d\rho}$ は

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} = \gamma K \rho^{\gamma-1} \quad (14.21)$$

のように ρ の関数となる。また、式 (14.21) の微分をとると

$$2cdc = \gamma(\gamma - 1)K\rho^{\gamma-2}d\rho = (\gamma - 1) \frac{c^2}{\rho} d\rho \quad \therefore \frac{2}{\gamma - 1} \frac{dc}{c} = \frac{d\rho}{\rho}. \quad (14.22)$$

この式から、

$$\frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (14.23)$$

が導かれる。これを使って式 (14.20) の ρ を c で書き換えると

$$\frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + c^2 \left(\frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right) = 0. \quad (14.24)$$

この式の線形結合を (第一式) $\times c \pm$ (第二式) のようにとり、式を整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t} J_{\pm} + (v \pm c) \frac{\partial}{\partial x} J_{\pm} = 0, \quad J_{\pm} \equiv \frac{2}{\gamma - 1} c \pm v \quad (14.25)$$

という (\pm の符号の分、計 2 本の) 式が得られる。

式 (14.25) はちょうど式 (14.3) で $\rho \rightarrow J_{\pm}$, $c(\rho) \rightarrow v \pm c$ と置き換えた式になっており、14.2 節で解説した特性曲線法を適用できる。なお、速度 $v \pm c$ は x の正・負の方向に伝搬する音速であり、流速 v の分だけ変化している。これに対応して、特性曲線も x の正・負の方向に伸びる 2 種類が出てくる (図 28 の赤線・青線)。

$J_{\pm} \equiv \frac{2}{\gamma - 1} c \pm v$ は速度 $\frac{dx}{dt} = v \pm c$ の特性曲線上で一定となる量で、リーマン不変量と呼ばれる。初期時刻における $c(\rho)$, v の値から J_{\pm} の値が定まり、特性曲線に沿ってその値が一定になることを使えば (t, x) 空間全域で $J_{\pm}(t, x)$ の分布を定められる (図 28 参照)。その $J_{\pm}(t, x)$ の値から (t, x) 空間の各地点における $c(\rho)$, v の値も定めることができる。

式 (14.25) では伝搬速度 $v \pm c$ が場の値 (ρ, v) に依存するため、一般には衝撃波形成がこの流体についても起こり、14.3 節で説明した方法でその性質をある程度解析できる。衝撃波面における物理量の不連続性などを調べるためにはより詳細な解析が必要となるが、今回の講義では割愛する。

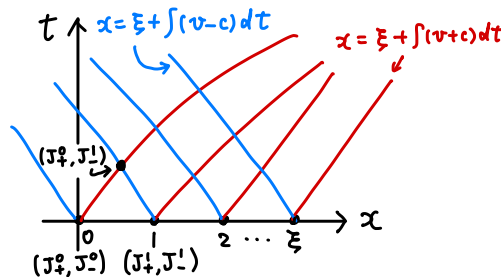


図 28: 理想気体の方程式 (14.25) に対する特性曲線の模式図。 J_{\pm} は速度 $\frac{dx}{dt} = v \pm c$ の特性曲線上で一定値をとる。そのため、初期時刻 $t = 0$ における J_{\pm} の値がわかっているならば、その後の時刻における J_{\pm} がすべて決定される。