学籍番号	氏名

複素関数論 小テスト [2018年度前期 水曜２限]　第７回 (6/6)

次のべき級数の中心と収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(z+i\sqrt{2})^n$

中心は $z=-i\sqrt{2}$.

係数は $a_n=1$. よって、収束半径 R は

$\therefore R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1.$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(z+i\sqrt{2})^n$

(中心) $=-i\sqrt{2}$.

$a_n=n \Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+4)^n$ $\left(=e^{z+4}-1\right)$

中心 $z=-4$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

(∴ 複素平面全体で上記のべき級数は収束する)

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5i}{(2n)!}(z-i)^n$

中心は $z=+i$.

$a_n=\dfrac{n+5i}{(2n)!}$

$$\therefore R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+5i}{(2n)!}}{\frac{n+1+5i}{[2(n+1)]!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n+5i}{n+1+5i}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}\cdot\underbrace{\frac{[2(n+1)]!}{(2n)!}}_{=(2n+1)(2n+2)}=\lim_{n\to\infty}(2n+1)(2n+2)=\infty$$

$\therefore R=\infty.$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{z}{4}\right)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}n(n+1)}z^{n+1}$

$\displaystyle\equiv\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}z^{n+1}$

と a_n を定義する.

中心は $z=0$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4^n(n-1)n}}{\frac{1}{4^{n+1}n(n+1)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}}{4^n}\frac{n(n+1)}{(n-1)n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}4\,\frac{n+1}{n-1}=\underline{\underline{4}}.$$