学籍番号	氏名

複素関数論 小テスト [2018年度前期 水曜２限]　第５回 (5/16)

1. $f(z) = \frac{2}{z-i}$ の $z = i$ を中心とする半径 2 の円に沿った一周積分を、次の手順で評価せよ。

   (a) $z = i$ を中心とする半径 2 の円上の点は $z = i + 2e^{i\theta}$ $(0 \leq z \leq 2\pi)$ と表せる。このときに dz を $d\theta$ で表せ。($dz = \frac{dz}{d\theta}d\theta$ を使う。)

   (b) 求めた dz を使って、積分 $\oint \frac{2}{z-i}dz$ を θ についての積分 $\int_0^{2\pi} \cdots d\theta$ に書き直せ。

   (c) θ 積分を行ってその値を求めよ。

(a) $z = i + 2e^{i\theta} \Rightarrow dz = \frac{dz}{d\theta}d\theta = \frac{d(i+2e^{i\theta})}{d\theta}d\theta = 2ie^{i\theta}d\theta.$

(b),(c) $\oint \frac{2}{z-i}dz$ の 円 $|z-i| = 2$ 上の積分は、$z = i + 2e^{i\theta}$ として $0 \leq \theta \leq 2\pi$ にわたり θ 積分することで得られる。

$$\oint \frac{2}{z-i}dz = \int_0^{2\pi} \frac{2}{i+2e^{i\theta}-i} \times 2ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{2}}{\cancel{2e^{i\theta}}} \times 2i\cancel{e^{i\theta}}d\theta$$

$$= 2i\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2i \times 2\pi = 4\pi i.$$

2. 次の積分を求めよ。

   (a) $\int_{2i}^{3i}(z+4)^2dz$ $= \left[\frac{1}{3}(z+4)^3\right]_{2i}^{3i} = \frac{1}{3}\left[(3i+4)^3 - (2i+4)^3\right]$

$$= \frac{1}{3}\Big[-27i - 3\cdot 9\cdot 4 + 3\cdot 3\cdot 16i + 64$$
$$- (-8i - 3\cdot 4\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 16i + 64)\Big]$$
$$= \frac{1}{3}\left[-19i - 3\cdot 5\cdot 4 + 3\cdot 16i\right] = \frac{1}{3}(-60 + 29i).$$

   (b) $\int_0^{\pi i} e^z dz$ $= \left[e^z\right]_0^{\pi i} = \underbrace{e^{\pi i}}_{\parallel} - \underbrace{e^0}_{=1} = -2.$

$$\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{=0} = -1$$