学籍番号	氏名

複素関数論 小テスト [2018年度前期 水曜２限]　第4回 (5/9)

1. 次を示せ。

(a) $\mathrm{Ln}(-2i) = \ln 2 - \dfrac{\pi i}{2}$.

(b) $(1+i)^i$ の主値は $e^{-\frac{\pi}{4}+i\ln\sqrt{2}} = e^{-\frac{\pi}{4}}\left[\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2})\right]$.

(a) $\mathrm{Ln}(-2i) = \ln\underbrace{|-2i|}_{=2} + i\underbrace{\arg(-2i)}_{=-\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - \frac{\pi i}{2}$

(b) $(1+i)^i = e^{i\mathrm{Ln}(1+i)}$

$\mathrm{Ln}(1+i) = \ln\underbrace{|1+i|}_{=\sqrt{2}} + i\underbrace{\arg(1+i)}_{=\frac{\pi}{4}} = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4}$.

$\therefore\ e^{i\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i)} = e^{-\frac{\pi}{4}+i\ln\sqrt{2}}$

$= e^{-\frac{\pi}{4}}\left[\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2})\right]$.

2. 方程式 $\mathrm{Ln}\,z = \frac{1}{2}\pi i$ の解 z を求めよ。

$\mathrm{Ln}\,z = \frac{1}{2}\pi i \Leftrightarrow \ln|z| + i\arg z = \frac{\pi i}{2}$.

両辺の実部・虚部を比較して、さらに $z = re^{i\theta}$ とおくと

$$\begin{cases} \ln|z| = 0 & \Leftrightarrow\ \ln r = 0 \quad \therefore\ r = 1 \\ \arg z = \frac{\pi}{2} & \Leftrightarrow\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

を得る。従って、解は $z = re^{i\theta} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$.

3. 1次分数変換 $f(z) = \dfrac{2}{3iz+2}$ を、回転・拡大・平行移動 $f_1(z) = az+b\ (a, b \in \mathbb{C})$, 反転 $f_2(z) = 1/z$ の組み合わせとして表わせ。係数 a, b も適切に決めること。

[例) $f(z) = \dfrac{1}{z-2+3i}$ は、$f_1(z) = z-2+3i$ として $f(z) = f_2(f_1(z))$ と表せる。]

$f(z) = \dfrac{2}{3iz+2} = \dfrac{1}{\frac{3i}{2}z+1}$.

この関数は、$f_1 = \frac{3i}{2}z+1$ として $f(z) = f_2(f_1(z))$ と表せる。

$\left(f_2(f_1(z)) = f_2\left(\frac{3i}{2}z+1\right) = \dfrac{1}{\frac{3i}{2}z+1} = \dfrac{2}{3iz+2}. \right)$