| 学籍番号 | 氏名 |
|---|---|
| | |

# 複素関数論 小テスト [2018年度前期 水曜2限]　第12回 (7/18)

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+16}$ の値を、次の複素積分

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C \frac{dz}{z^4+16} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^4+16} + \lim_{R\to\infty}\int_{C_2}\frac{dz}{z^4+16} \tag{1}$$

を用いて求めよ。ただし、$C_2$ は半円 $\{z|z=Re^{i\theta}, 0<\theta<2\pi\}$ を反時計回りに回る経路、$C$ は $C_2$ と実軸上の経路 $\{z|z=x, -R<x<R\}$ を連結した左回りの経路である。

(i) 式 (1) の被積分関数がどの位置に何位の極を持つかを調べる。
(分母が $z^4+16=0$ を満たす位置が極。それぞれ何位の極か？)

(ii) 経路 $C$ 内に含まれる極について留数を求め、式 (1) 左辺の積分値を求める。

(iii) 式 (1) の右辺第二項を $z=Re^{i\theta}$ とおいて $\theta$ 積分に書き換える。

(iv) $\theta$ 積分に直した右辺第二項が極限 $R\to\infty$ でゼロになることを示す。

(v) 以上の結果をまとめて $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+16}$ の値を求める。

2. フーリエ積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2+x+1}dx$ を、次の複素積分

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C \frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_2} \frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}dz \tag{2}$$

を活用し、先程と同様の方法で求めよ。注意点は下記の通り。

- 分母が $z^2+z+1=0$ を満たす位置が極となる。この式を 2 次方程式として解けば極の位置がわかる。その解を $z_{1,2}$ とすると、被積分関数は $\frac{e^{2iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}$ と表される。$z=z_{1,2}$ はそれぞれ何位の極か？
- 式 (2) の右辺第一項の虚部が求める積分値である。

  $\left[\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)+i\sin(2x)}{x^2+x+1}dx \quad \therefore\ \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x^2+x+1}dx\right]$

  したがって、式 (2) の右辺第二項がゼロになるなら、式 (2) 左辺の値の虚部が求めたかった積分値に一致する。