学籍番号	氏名

複素関数論 小テスト [2018年度前期 水曜２限]　第11回 (7/11)

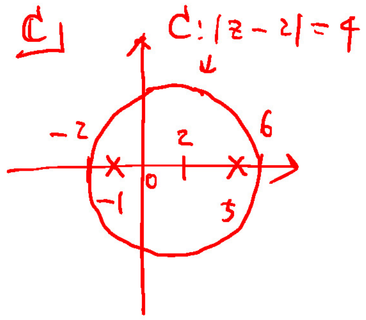
1. 積分 $\oint_C \frac{z-23}{z^2-4z-5}dz$ $(C : |z-2| = 4)$ を次の手順で評価せよ。

   (a) 被積分関数 $\frac{z-23}{z^2-4z-5}$ の特異点の位置と、円 $|z-2| = 4$ を複素平面上に図示せよ。

   (b) 積分路 $C : |z-2| = 4$ の内部に含まれる特異点について留数を求めよ。

   (c) 留数定理を使って積分値を評価せよ。

(a) $\frac{z-23}{z^2-4z-5} = \frac{z-23}{(z-5)(z+1)}$ これは $z=-1, 5$ に1位の極を持つ.



(b) $z=-1, 5$ の両方が C 内に含まれる.

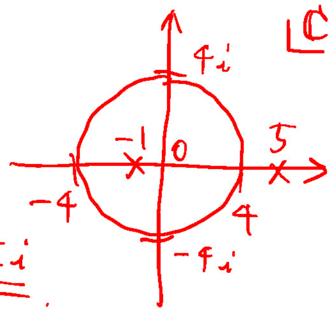
$$\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z-23}{(z-5)(z+1)} = \lim_{z\to-1} (z+1)\frac{z-23}{(z-5)(z+1)}$$

$$= \left.\frac{z-23}{z-5}\right|_{z=-1} = \frac{-24}{-6} = 4.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=5} \frac{z-23}{(z-5)(z+1)} = \lim_{z\to5} (z-5)\frac{z-23}{(z-5)(z+1)} = \left.\frac{z-23}{z+1}\right|_{z=5} = \frac{-18}{6} = -3$$

(c) $$\oint \frac{z-23}{z^2-4z-5}dz = 2\pi i \sum_{z=-1,5} \operatorname{Res} \frac{z-23}{(z-5)(z+1)} = 2\pi i(4-3) = \underline{\underline{2\pi i}}.$$

2. 問題1で積分路を変更して $\oint_C \frac{z-23}{z^2-4z-5}dz$ $(C : |z| = 4)$ とした場合、積分値はいくらか？



この場合、極 $z=-1$ だけが C 内に含まれる.

したがって、積分値は

$$\oint \frac{z-23}{z^2-4z-5}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z-23}{(z-5)(z+1)} = 2\pi i \times 4 = \underline{\underline{8\pi i}}.$$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k+\cos\theta}$ $(k>1)$ を次の手順で評価せよ。

(a) $z = e^{i\theta}$ とおいたとき、$d\theta = \frac{dz}{iz}$ と表せることを示せ。

(b) 与えられた積分を、単位円上の一周積分

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{k+\frac{1}{2}(z+z^{-1})}\frac{dz}{iz} = -2i\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+2kz+1}dz$$

に書き換えられることを示せ。

(c) 分母が $z^2+2kz+1=0$ となり、被積分関数 $\frac{1}{z^2+2kz+1}$ が極を持つ点を求めよ。

(d) 積分路 $|z|=1$ 内に含まれる極について留数を求めよ。

(e) 留数定理を使って積分値を求めよ。

(a) $z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = \dfrac{dz(\theta)}{d\theta}d\theta = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta \quad \therefore\ d\theta = \dfrac{dz}{iz}$

(b) $$\int_0^{2\pi}\frac{\overbrace{d\theta}^{=dz/iz}}{k+\underbrace{\cos\theta}_{=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\frac{1}{2}(z+z^{-1})}} = \oint_{|z|=1}\frac{1}{k+\frac{1}{2}(z+z^{-1})}\cdot\frac{dz}{iz} = \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{2}i}}_{=-2i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2kz+1}$$

(c) $z^2+2kz+1=0 \Rightarrow z = \frac{1}{2}\left(-2k\pm\sqrt{(2k)^2-4}\right) = -k\pm\frac{1}{2}\sqrt{4k^2-4}$

$= \underline{\underline{-k\pm\sqrt{k^2-1}}}$ $\left(\Rightarrow \dfrac{1}{z^2-2kz+1} = \dfrac{1}{[z-(-k+\sqrt{k^2-1})][z-(-k-\sqrt{k^2-1})]}\right)$

(d) $k>1$ で、かつ $-k-\sqrt{k^2-1}$ は k について単調減少である。

よって $-k-\sqrt{k^2-1} < \left(-k-\sqrt{k^2-1}\right)\Big|_{k=1} = -1$.

一方で、$-1<-k+\sqrt{k^2-1}<0$ であることが示せる

$\Big(\because\ -1<-k+\sqrt{k^2-1} \Leftrightarrow k-1<\sqrt{k^2-1} \Leftrightarrow \underbrace{(k-1)^2}_{=k^2-2k+1}<k^2-1 \Leftrightarrow -2k+1<-1 \Leftrightarrow \underline{0<2(k-1)}$ ← $k>1$ なので成立する。

$-k+\sqrt{k^2-1}<0 \Leftrightarrow \sqrt{k^2-1}<k \Leftrightarrow k^2-1<k^2 \Leftrightarrow -1<0$ 成立している。$\Big)$

従って、単位円に入るのは $z=-k+\sqrt{k^2-1}$ である。

被積分関数の留数は $\displaystyle\operatorname{Res}_{z=-k+\sqrt{k^2-1}}\frac{1}{[z-(-k+\sqrt{k^2-1})][z-(-k-\sqrt{k^2-1})]} = \frac{1}{z-(-k-\sqrt{k^2-1})}\Bigg|_{z=-k+\sqrt{k^2-1}}$

$\displaystyle= \frac{1}{-k+\sqrt{k^2-1}-(-k-\sqrt{k^2-1})} = \frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}$

(e) $\displaystyle -2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2kz+1} = -2i\times2\pi i\operatorname{Res}_{z=-k+\sqrt{k^2-1}}\frac{1}{[z-(-k+\sqrt{k^2-1})][z-(-k-\sqrt{k^2-1})]}$

$\displaystyle= -2i\times2\pi i\times\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}}}}.$