学籍番号	氏名

複素関数論 小テスト [2018年度前期 水曜2限] 第10回 (6/27)

次の関数が点 $z=z_0$ で何位の極を持つか述べ、その点における留数 $\mathrm{Res}_{z=z_0}$ を求めよ。また、$z=z_0$ を囲む右回りの経路 C に沿った一周積分の値を示せ。

(a) $\dfrac{3z}{z-i},\ z_0=i$

$\dfrac{3z}{z-i}$ は $z=i$ に1位の極を持つ。

留数は

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=i}\frac{3z}{z-i} = \lim_{z\to i}(z-i)\cdot\frac{3z}{z-i} = 3z\Big|_{z=i} = 3i.$$

$$\oint_C \frac{3z}{z-i}dz = 2\pi i \mathop{\mathrm{Res}}_{z=i}\frac{3z}{z-i} = 2\pi i\times 3i = \underline{\underline{-6\pi}}.$$

(b) $\dfrac{e^z}{z^2},\ z_0=0$

$z=0$ 近傍で $\dfrac{1}{z^2}e^z = \dfrac{1}{z^2}\left(1+z+\dfrac{1}{2}z^2+\cdots\right)$ と振舞うため、$\dfrac{1}{z^2}e^z$ は $z=0$ に2位の極を持つ。

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=0}\frac{e^z}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\cdot\frac{e^z}{z^2}\right] = \lim_{z\to 0}e^z = 1$$

(もしくは、上述の展開より $\dfrac{1}{z^2}e^z = \dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2}+\cdots$ ∴ $\mathop{\mathrm{Res}}_{z=0}\dfrac{e^z}{z}=1$)

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2}dz = 2\pi i\times 1 = \underline{\underline{2\pi i}}$$

(c) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)},\ z_0=1$

$\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ は $z=1$ に1位の極を持つ。

留数は

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=1}\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z-2} = -1.$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)(z-2)}dz = 2\pi i\times(-1) = \underline{\underline{-2\pi i}}.$$

(d) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)},\ z_0=2$

$\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ は $z=2$ に1位の極を持つ。

留数は

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=2}\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \lim_{z\to 2}(z-2)\cdot\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \lim_{z\to 2}\frac{1}{z-1} = 1.$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)(z-2)}dz = 2\pi i\times 1 = \underline{\underline{2\pi i}}.$$

(e) $\dfrac{1}{z(z-1)^2},\ z_0=0$

$\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ は $z=0$ に1位の極を持つ。

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=0}\frac{1}{z(z-1)^2} = \lim_{z\to 0} z\times\frac{1}{z(z-1)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-1)^2} = 1.$$

$$\oint_C \frac{dz}{z(z-1)^2} = 2\pi i\times 1 = \underline{\underline{2\pi i}}$$

(f) $\dfrac{1}{z(z-1)^2},\ z_0=1$

$\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ は $z=1$ に2位の極を持つ。

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=1}\frac{1}{z(z-1)^2} = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\cdot\frac{1}{z(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 1}\left(-\frac{1}{z^2}\right) = -1$$

$$\therefore \oint_C \frac{1}{z(z-1)^2}dz = 2\pi i\times(-1) = \underline{\underline{-2\pi i}}.$$