第8回　べき級数（テイラー級数）

[教科書 3.3 章, 3.4 章]

べき級数 $\sum_{n=0} a_n c^n$ が解析関数の一つであること、逆に解析関数 $f(z)$ は点 $z = z_0$ の周りでべき級数の形に展開できて

$$f(z) = \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0) + \cdots$$

と表せることを学ぶ。実関数について導入した**テイラー級数**（テイラー展開）を複素関数に拡張したものとなる。関数 $f(z)$ の値を点 $z = z_0$ における関数の値 $f(z_0)$ やその微分 $f^{(n)}(z_0)$ を用いて近似的に表すのに使えるほか、後ほど複素積分の簡単な公式を導出する際にもこの表式を活用して行うことになる。

8.1　べき級数の性質

べき級数は以下の性質を持つ。以下では簡単のため展開の中心を原点にセットする $(z_0 = 0)$ が、$z \mapsto z - z_0$ と置き換えれば元の表式に戻る。

- **一意性**: 2 つのべき級数全体が一致するとき、級数の各項同士も完全に一致する。

  2 つのべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ が、$|z| < R$ で収束し、かつ

  $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

  を満たすとする。このとき、係数 a_n と b_n は $a_n = b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を満たす。

  証明は $z = 0$ で級数を評価することにより、帰納的に行える。

- べき級数同士の和・積

  2 つのべき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ が $|z| < R$ で収束するとき、それらの和・差は項別の和・差で与えられる。

  $$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_z) z^n$$

  また、べき級数の積はコーシー積と呼ばれる次の表式で与えられる。

  $$\begin{aligned} f(z)g(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m\right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_0) z^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\right) z^n. \end{aligned} \tag{109}$$

- べき級数の微分・積分

べき級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の微分は、級数の各項を別個に微分することで与えられる。[9]

$$f'(z)=\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\left(a_n z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} n\,a_n z^{n-1} \tag{110}$$

また、微分の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} n\,a_n z^{n-1}$ の収束半径は、微分する前の級数の収束半径と一致する。

$\because$ コーシー・アダマールの公式 (108) より、元の級数の収束半径 R は

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

で与えられる一方、式 (110) で表される級数の収束半径 $\tilde{R}$ は

$$\tilde{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\,a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R$$

となり、元の収束半径 R と一致する。

微分と同様に、級数の不定積分は、級数の各項を積分したものに一致し、その収束半径は元の級数のそれと一致する。

$$\int f(z)dz=\int\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int a_n z^n dz\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_n z^{n+1}$$

以上の結果は、**べき級数 $f(z)$ はその収束半径の内部で解析関数となっている**ことを意味している。

8.2 テイラー級数

まず最初に、解析関数 $f(z)$ のテイラー展開の式を導入する。

テイラー級数

複素関数 $f(z)$ が領域 $|z-z_0|<R$ で解析的であるとする。このとき、$f(z)$ を

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\,(z-z_0)^n \tag{111}$$

で与えられる**テイラー級数**で表せる。級数に現れる係数は、$f^{(n)}(z_0)$ を解析関数の微分の公式 (94) によって

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}dz^* \tag{112}$$

と、テイラー展開される関数 $f(z)$ を積分することで求められる。ただし、C は z_0 を含む D 上の反時計回りの積分経路。

[9] 証明は、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を微分の定義に従って書き表したものと、式 (110) との差がゼロになること

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}a_n\left[\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}-n\,a_n z^{n-1}\right]=0$$

を示すことにより行われる。計算の詳細は省略する（教科書 3.3 節を参照のこと）。

[テイラー級数の表式 (111) の導出]
コーシーの積分公式 (92):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* \tag{113}$$

について、被積分関数に含まれる $\frac{1}{z-z^*}$ をテイラー展開の中心 $z = z_0$ の周りで展開することを考える。等比級数の和の公式より

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots \tag{114}$$

と表されることを使うと、$\frac{1}{z-z^*}$ を以下のように書き換えることができる：

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^* - z} &= \frac{1}{z^* - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{z^* - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z^* - z_0}} \\ &= \frac{1}{z^* - z_0}\left[1 + \frac{z - z_0}{z^* - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{z^* - z_0}\right)^2 + \cdots\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z^* - z_0)^{n+1}}\cdot(z - z_0)^n.\end{aligned}$$

これを式 (113) に代入すると

$$\begin{aligned}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C dz^* \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}}\cdot(z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^*\right)(z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\,(z - z_0)^n.\end{aligned}$$

ただし、最後の等式では解析関数の微分の公式 (94) と用いた。この表式はテイラー級数の式 (111), (112) そのものである。

コメント：

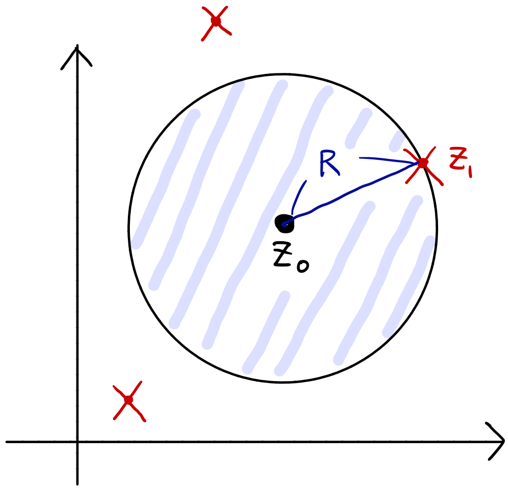
- **テイラー級数の収束半径**

  上記のテイラー級数の導出は、$f(z)$ が解析的である範囲で有効である。逆に、$f(z)$ が点 $z = z_1$ で解析的でなくなるとすると、この点でテイラー級数も収束しなくなる。べき級数が収束する範囲は円形領域となることを思い出すと、テイラー級数は点 $z = z_0$ を中心とする半径 $|z_1 - z_0|$ の円形領域で収束することがわかる。

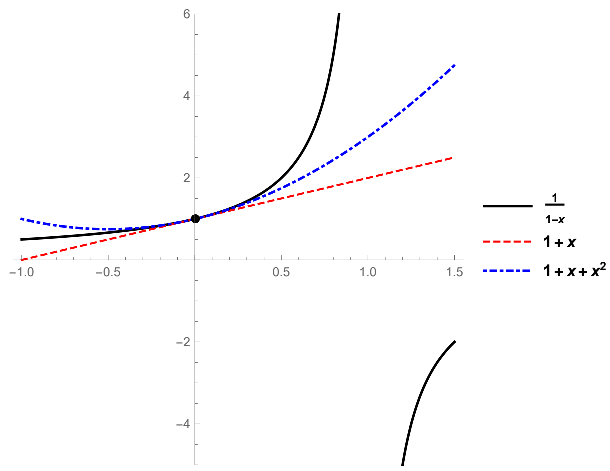
  $f(z)$ が解析的でなくなる点は関数 $f(z)$ の**特異点**と呼ばれる。これを使って、**テイラー級数の収束半径は、展開の中心点から見て最も近い特異点までの距離となる**と言い換えることができる。級数の収束半径を求めるうえで重要な性質である。

- 原点を中心とするテイラー展開 ($z_0 = 0$) にはマクローリン展開という名前がついているが、その場合でも単にテイラー展開と呼ばれることの方が多い。

- テイラー展開をある次数で打ち切ると、元の関数 $f(z)$ を展開の基準点 $z = z_0$ の周りで多項式近似する表式が得られる。有限次で打ち切った時に生じる誤差は、打ち切りの次数を無限大にすることでゼロに収束することが示せる (教科書 3.4 章参照)。



(a) 特異点と収束半径



(b) テイラー展開による近似

図 15: (a) 点 $z = z_0$ を中心とする関数 $f(z)$ のテイラー級数の収束半径は、$z = z_0$ から最も近い $f(z)$ の特異点までの距離 R で与えられる。(b) 関数 $\frac{1}{1-z}$ の $z = 0$ 周りのテイラー展開を、実軸 $z = x+i\times 0$ 上で表示したもの。展開次数が上がるごとに近似精度が上がっている。

8.3 テイラー展開の例

複素関数 $f(z)$ のテイラー級数の表式は、式 (111), (112) に従って計算することで得られる。いくつかの代表例については、別の方法で多項式展開したり、表式を覚えておくと便利なので紹介しておく。どれについても、実数関数のテイラー展開と同等の式である。

なお、8.1 節で説明したべき級数の一意性 (級数が一致するなら級数の各項がそれぞれ一致する) から、どのような計算方法を取ったとしても結果として得られるテイラー級数の表式は同じものになる。したがって、テイラー級数の計算は自分の好きな方法で行えばよい。

- **分数関数の $z = 0$ 周りでの展開**

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \tag{115}$$

等比級数の公式そのものが、そのままテイラー級数になっている。関数 $\frac{1}{1-z}$ の特異点は $z = 1$ であり、これに対応して上記のテイラー級数の収束半径は原点から $z = 1$ までの距離である 1 となる。

これを少し応用することで、様々な展開が可能になる。

$$\frac{1}{c-z} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{c}} = \frac{1}{c}\left[1 + \frac{z}{c} + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots$$

2 番目の例では $z \to z^2$ と置き換えている。

- **指数関数の $z = 0$ 周りでの展開**

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots$$

テイラー展開の定義式より導出可能。e^z が (無限遠点を除く) 複素平面上全体で解析的であることに対応して、このテイラー級数の収束半径は無限大となる。

- **三角関数**の $z=0$ 周りでの展開

  指数関数の展開式 (8.3) で $z \to iz$ と置き換え、オイラーの公式 (24)
  $$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{116}$$
  と比較することで、以下の三角関数の展開公式を得る。
  $$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots \tag{117}$$
  $$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \cdots \tag{118}$$
  指数関数と同様、これらの級数の収束半径は無限大となる。

  なお、双曲線関数 $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ の展開形も、指数関数の表式 (8.3) を適当に足し合わせることで構成できる。

- **対数関数**の展開

  対数関数 $\mathrm{Ln}\,(1+z)$ を $z=0$ 周りでテイラー展開すると
  $$\mathrm{Ln}\,(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots . \tag{119}$$
  $\mathrm{Ln}(1+z) = \mathrm{Ln}(1+z) + i \arg z$ であることから、$\mathrm{Ln}(1+z)$ の特異点は $z=-1$ に存在する。したがって、上記の級数の収束半径は 1 となる。

- **関数の微分・積分**の展開

  8.1 節では、べき級数には以下の性質があることを見た。

  1. **べき級数の微分・積分は、級数の各項を微分・積分したものに等しい。**
  2. **べき級数の収束半径は、級数について微分・積分をとっても変わらない。**

  これらの性質を利用して、テイラー級数と収束半径の計算を簡略化できる場合がある。

  例)

  – $\frac{1}{(1-z)^2}$ の $z=0$ 周りでの展開:

    $\frac{1}{(1-z)^2}$ が $\frac{1}{1-z}$ の微分で
    $$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z}$$
    と与えられるため、$\frac{1}{(1-z)^2}$ の展開式は $\frac{1}{1-z}$ の展開式を微分したものに等しい。そこで、式 (115) の結果を使うと以下のように展開されることがわかる。
    $$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{d}{dz}\frac{1}{1+z} = \frac{d}{dz}\left(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right) \\ &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots .\end{aligned}$$

もしくは、$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)^2$ であることに基づいて、級数 (115) の 2 乗をコーシー積の表式 (109) に従って計算しても同じものが得られる。[10]

$\frac{1}{(1-z)^2}$ の特異点は $z=1$ に存在することから、上記の級数の収束半径は 1 となる。$\frac{1}{1-z}$ の $z=0$ 周りでのテイラー級数の収束半径と同じ。

– $\mathrm{Ln}(1+z)$ の $z=0$ 周りでの展開

$\mathrm{Ln}(1+z)$ が $\frac{1}{1+z}$ の積分で

$$\mathrm{Ln}(1+z)=\int_0^z \frac{1}{1+z^*}dz^*$$

と表せることに気をつけると、式 (115) で $z\mapsto -z$ と置き換えたものを使って

$$\mathrm{Ln}(1+z)=\int_0^z \frac{1}{1+z^*}dz^*=\int_0^z dz^*\left(1-z^*+z^{*2}-z^{*3}+\cdots\right)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\cdots$$

と、$\mathrm{Ln}(1+z)$ のテイラー級数 (119) と一致する結果が得られる。

関数 $\frac{1}{1+z}$ の特異点は $z=-1$ に存在するため、この関数の $z=0$ 周りでのテイラー展開の収束半径は 1 となる。したがって、$\mathrm{Ln}(1+z)$ の $z=0$ 周りでのテイラー展開の収束半径も 1 となる。

[10] $\frac{1}{(1-z)^n}$ $(n\in\mathbb{Z})$ の $z=0$ 周りでの展開も同様に計算できる。$\frac{1}{(1-z)^n}$ が $\frac{1}{1-z}$ の微分で

$$\frac{1}{(1-z)^n}=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{1-z}$$

と与えられるため、式 (115) の微分をとることで展開式を以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^n}&=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\sum_{m=0}^{\infty}z^m=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}z^m\\&=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{m=n-1}^{\infty}m(m-1)\cdots[m-(n-1)+1]z^{m-(n-1)}\\&=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{m=n-1}^{\infty}\frac{m!}{[m-(n-1)]!}z^{m-n+1}=\sum_{\tilde{m}=0}^{\infty}\frac{(\tilde{m}+n-1)!}{(n-1)!\tilde{m}!}z^{\tilde{m}}=\sum_{\tilde{m}=0}^{\infty}{}_{n-1}C_{\tilde{m}}z^{\tilde{m}}.\end{aligned}$$