第7回　べき級数（収束半径）

[教科書 3.1 章の一部、3.2 章]

複素平面上の点 $z = z_0$ の近傍におけるべき級数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{101}$$

について、その基本的な性質 (**収束半径**の定義と求め方など) を学ぶ。

次回、解析関数をべき級数として表す**テイラー展開**:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0) + \cdots$$

を学ぶための準備に相当する。

7.1　べき級数

式 (101) の $f(z)$ のように、係数 a_n と変数 $z - z_0$ のべきの積の和で表される式を $z - z_0$ の**べき級数**と呼ぶ。無限和が収束するならば $f(z)$ は複素関数となるが、z の値によっては和が収束せず、$f(z)$ が関数として意味をなさない場合がある。雰囲気をつかむため、べき級数の例をいくつか見てみることにする。

- (原点 $z_0 = 0$ を中心とする) 等比級数（幾何級数）

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \tag{102}$$

この和 $f_N(z)$ が、$N \to \infty$ とする極限で有限値に収束するかを判別したい。そのためには、右辺に現れる z^{N+1} の $N \to \infty$ における振る舞いを調べればよい。$z = r = e^{i\theta}$ と表して、z^N の絶対値の大きさに注目すると

$$\left|z^N\right| = \left|(re^{i\theta})^N\right| = \left|r^N\right|\left|e^{iN\theta}\right| = r^N \xrightarrow{N\to\infty} \begin{cases} 0 & (|z| = r < 1) \\ 1 & (|z| = r = 1) \\ \infty & (|z| = r > 1) \end{cases}.$$

ただし、$|e^{iN\theta}| = 1$ となることを使っている。したがって、式 (102) の極限値は[3]

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \xrightarrow{N\to\infty} \begin{cases} \frac{1}{1-z} \text{ に収束} & (|z| < 1) \\ \text{発散 (振動的)} & (|z| = 1) \\ \infty & (|z| = r > 1) \end{cases} \tag{103}$$

となる。原点を中心とする半径 1 の円の内部 $|z| < 1$ で収束、その外側 $|z| \geq 1$ で発散していることに注意。

[3] $|z| = r = 1$ の場合、式 (102) の和は

$$f_N(z)|_{z=e^{i\theta}} = \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1 - [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]}{1 - e^{i\theta}}$$

となる。N を増やすごとに分子は振動的に変化し続け、一定値に収束することはない。このような場合も和 $f_N(z)$ は発散すると言い表す。

- 指数関数 e^z

  次回の授業でも示すが、指数関数は以下のようにべき級数で表せる。実関数としての指数関数と同様。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots \tag{104}$$

  このべき級数は、複素平面上の全ての z について収束することを示せる。

数列が収束するかどうか、する場合は複素平面上のどの範囲で収束するかを調べるためには、いくつかのテクニックを使う必要がある。それを次のセクションで整理する。

7.2 収束の判定法

数列とその和の収束性と、収束するか否かを判別するための方法について、この講義に必要になる分だけ簡単にまとめておく。より詳細については教科書 3.1 章を参照のこと。

定義：数列の収束

ある数列 $z_1, z_2, \ldots = \{z_n\}$ **が** $n \to \infty$ **の極限で定数** c **に収束する**とは、任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある整数 $N > 0$ が存在して

$$|z_n - c| < \epsilon \quad (\forall n > N) \tag{105}$$

が成立する場合のことを指す。このとき、$\lim_{n\to\infty} z_n = c$ と書き表す。

ある数列が上記の意味で収束しない場合、その数列は**発散する**という。$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ となる場合、n を増やすにつれて $|z_n|$ が一つの値に収束せず変化し続ける場合などが存在する。

上記の収束の定義は本来は実数 $z_n \in \mathbb{R}$ についてのものであるが、複素数 $z_n \in \mathbb{C}$ の場合でもその実部・虚部それぞれに注目することで同様の定義ができる。

定義：級数の収束

ある級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots$ が収束するとは、数列 $\{z_n\}$ の**部分和** $f_N(z)$:

$$f_N(z) = \sum_{n=1}^{N} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_N$$

が $N \to \infty$ とする極限で収束するときにいう。

定義：絶対収束

ある級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots$ について、その各項の絶対値の和

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots$$

が収束するとき、絶対値をとる前の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は**絶対収束**するという。

特に、**ある級数が絶対収束するならばその級数は収束する**ことが示せる。各項の絶対値をとってか

ら和をとることで、もとの級数 (の絶対値) よりも大きくなることが保証される。したがって、絶対収束は単なる収束よりも厳しい条件下でのみ起こることがわかる。

以下では、ある級数が収束するか否かを判別するための判定法を 3 つ紹介する。特に、後ほど**級数の収束半径**を求めるのに**比判定法**を主に使う。

比較判定法

ある級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ に対して、収束する級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ で

$$|z_n| \leq b_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{106}$$

を満たすものが存在するなら、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束する。

収束する級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ を用意して、それと比較することで収束性を示す方法である。[4]

比判定法

$z_n \neq 0$ を満たす級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ について、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$ となるとき、

(a) $L < 1 \Rightarrow$ 級数は絶対収束する。

(b) $L = 1 \Rightarrow$ この方法では判定できない。

(c) $L > 1 \Rightarrow$ 級数は発散する。

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$ となるとき、級数の n が大きい部分について各項の絶対値をとったものは等比級数 $|z_n| + |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots = |z_n|\,(1 + L + L^2 + \cdots)$ のように振る舞う。これは $L < 1$ のときに $\frac{|z_n|}{1-L}$ に収束し、$L > 1$ のときには発散する。このような方針に基づいて上記の判定法を導くことができる。なお、$L = 1$ となった場合には別の手法で収束・発散を調べる必要が生じるので注意すること。[5]

[4][比較判定法の証明] 元の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ で各項の絶対値を取って得られる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ を考える。上の条件が満たされるとき、$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ となる。元の級数の部分和 $\sum_{n=1}^{N} |z_n|$ は N について単調増加なので、上に有界な単調増加列は収束することを使うと、$N \to \infty$ の極限で元の級数が絶対収束することが示される。

[5](b) $L = 1$ の場合については、級数ごとに収束性が異なる。例えば、

$$(1) \quad z_n = \frac{1}{n}\,, \qquad\qquad (2) \quad z_n = \frac{1}{n^2} \tag{107}$$

を用いて与えられる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ を考えると、(1) $L = \lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, (2) $L = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$ となる一方で、それぞれの級数は

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots > \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^{\infty} = \infty,$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1 + 1 = 2$$

となり、(1) の級数は発散、(2) の級数は収束（正確な収束値は $\pi^2/6$) することがわかる。

根判定法

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ について、$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$ となるとき、

(a) $L < 1 \Rightarrow$ 級数は絶対収束する。

(b) $L = 1 \Rightarrow$ この方法では判定できない。

(c) $L > 1 \Rightarrow$ 級数は発散する。

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$ となるとき、級数の各項は $|z_n| \sim C\,L^n$ (C は定数) のように振る舞う。したがって、級数は $L < 1$ のときに収束し、$L > 1$ のときに発散する。[6,7]

7.3 べき級数の収束半径

7.2 節で導入した収束判定法を用いて、べき級数が収束する複素平面上の領域の半径 (**収束半径**) を求めることができる。まず、べき級数の収束に関する定理を述べ、その後に収束半径を求める具体的な方法を解説する。

定理（べき級数の収束）

(1) べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ($a_n \in \mathbb{C}$ は定数の係数) がある点 $z = z_1$ で収束するとする。このとき、複素平面上の領域 $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$ の全体でこの級数は絶対収束する。

(2) 同様に、上記のべき級数が点 $z = z_2$ で発散するとする。このとき、領域 $|z-z_0| > |z_2-z_0|$ の全体でこの級数は発散する。

級数が収束する点が一点（上記では $z = z_1$）存在すると、べき級数の基準点 $z = z_0$ を中心とし、z_0 から見て z_1 よりも近い点の全て、すなわち収束点までの距離を半径とする円の内部全体で級数は絶対収束する。

逆に、級数が発散する点が一点（上記では $z = z_2$）存在すると、z_0 から見て z_2 よりも遠い点の全て、すなわち発散点までの距離を半径とする円の外部全体で級数は発散する。

どちらの場合も、$z = z_0$ を**中心とする円の内部・外部全体で収束・発散する**のが特徴。

[証明の概要] ある点 z_1 でべき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ が絶対収束する場合には、7.2 節で導入した比較判定法で (1) を示せる。実際には z_1 で級数が収束することを使うだけで (1) を示せるが、そのためにはもう少し証明を工夫する必要がある。教科書 3.2 章の証明を参照。(2) は (1) から従う。

上の定理から、べき級数が収束する領域は複素平面上の円盤領域になること、またその領域外部の全体でベキ級数は発散することがわかる。この収束領域のことを**収束円**、その半径のことを**収束半径**と呼ぶ。収束円の直上では、べき級数が収束するか発散するかは一般的には定まらない。

[6] なお、式 (107) の例 (1), (2) のどちらについても $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = 1$ となる。よって、根判定法を用いてもこれらの級数の収束・発散を判定することはできない。

[7] 極限 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ が存在しない場合でも、数列 $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$, $\sqrt[n]{|z_n|}$ がある定数 $q < 1$ よりも常に小さくなるならば、その級数は絶対収束することが示せる。教科書 3.1 章を参照。

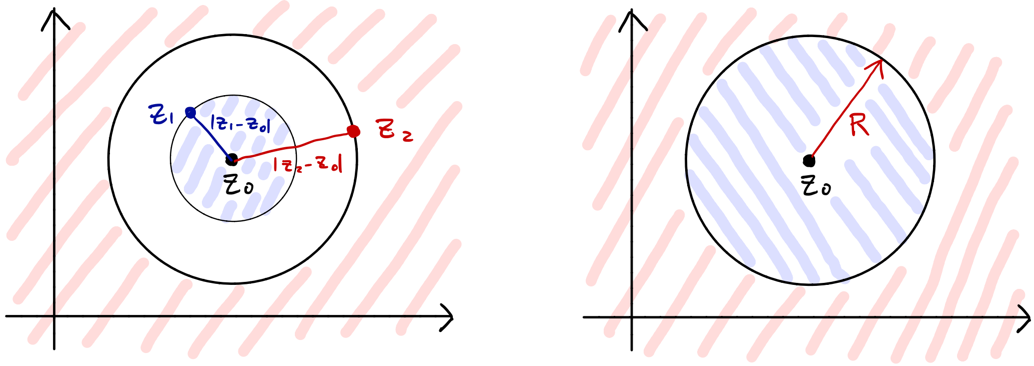

図 14: 左図：べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ が点 $z=z_1$ で収束し $z=z_2$ で発散するとき、z_0 を中心とする半径 $|z_1-z_0|$ の円内全体 (青斜線部) で級数は絶対収束、半径 $|z_2-z_0|$ の円外全体 (赤斜線部) で発散する。 右図：べき級数が収束する点全体 (青斜線部) を含む円で最小半径のものは収束円、その半径 R は収束半径と呼ばれる。収束円の外部 $|z-z_0|>R$ 全体でべき級数は発散する。

収束半径は、そのべき級数が収束して解析関数として振る舞う領域はどこかを示す。べき級数は解析関数を近似的に表す場合などに用いられるが、収束半径はその表式がどこまで有効かを示す役割を果たす。

べき級数の係数 a_n の絶対値が $n\to\infty$ で一定値に収束する場合には、この収束半径を求めるための公式があるので紹介する。

収束円の半径の公式 (コーシー・アダマールの公式)

べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ について、隣接する項の係数の絶対値の比が

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L^*$$

と一定値に収束するとする。このとき、そのべき級数の収束半径 R は

$$R = \frac{1}{L^*} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{108}$$

で与えられる。$L^*=0$ の場合は複素平面全体でべき級数は収束し、$R=\infty$ と書き表す。$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が発散する ($L^*=\infty$) 場合は収束半径は $R=0$ となり、べき級数は $z=z_0$ を除くすべての点で発散する。

[証明] 7.2 節の比判定法を $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ に適用すると

$$\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z-z_0| \xrightarrow{n\to\infty} L^*|z-z_0| \equiv L$$

となる。L^* が有限の場合には、比判定法から $L<1 \iff |z-z_0|<1/L^*$ なら級数は収束し、$L>1 \iff |z-z_0|>1/L^*$ なら級数は発散することがわかる。

コメント:

- 極限値 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L_*$ が存在する場合も、収束半径は $R = 1/L_*$ となる。証明は根判定法に基づいて行う。

- 数列 $|a_{n+1}/a_n|$ が収束しない場合には個別に議論する必要がある。例えば、数列が振動的でいくつかの収束値を持つ場合、それらの最大値の逆数が収束半径となる。[8]

例）べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}(z-3i)^n$ の収束半径 R は $1/4$ となることが以下の計算でわかる。

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}{\dfrac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{[(n+1)!]^2}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \cdot (n+1)^2 = \frac{1}{4}.$$

一方で、べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{20n}}{n!}(z-3)^n$ については

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{20n}}{n!}}{\dfrac{2^{20(n+1)}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{20n}}{20^{2(n+1)}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{20}} \cdot n = \infty.$$

したがって、収束半径は無限大であり、べき級数は複素平面全体で収束する。

[8] より正確には、数列 $|a_n/a_{n+1}|$ の集積点 (部分数列の収束値) で最大のものが収束半径となる。