第5回　複素積分 (線積分、コーシーの積分定理)

実数の積分に基づいて、**複素積分**を定義する。

また、応用上も重要な**コーシーの積分定理** $\oint_C f(z)dz = 0$ ($f(z)$: 経路 C 内で解析的) を導入する。

5.1　複素積分の定義

実数の積分は、区分求積法に基づいて定義される。

$a \leq x \leq b$ の範囲で実関数 $f(x)$ を積分することを考える。このとき、積分区間を

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

と n 個の区間に分割し、これを用いて

$$\int_a^b f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)\Delta x_i \qquad (\Delta x_i \equiv x_i - x_{i-1}) \tag{64}$$

ただし、区間の幅 $|\Delta x_i|$ は分割数 n を大きくするにつれてゼロに近づくとする。また、$\hat{x}_n$ は $x_{n-1} \leq \hat{x}_n \leq x_n$ を満たす点で、そこでの $f(x)$ の値を和を取るのに用いている。n を大きくするにつれて分割が細かくなるため、右辺の和の値は実際の積分値に近づく。その極限値が存在するとき、関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で積分可能であるという。

複素数の積分も同様に定義する。ただし、複素平面は2次元的に広がっているため、積分を行う経路をまず指定することが必要となる。ある複素平面上の経路 C について、その上の点 $z(t)$ をパラメタ t を使って

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

と表す。実積分の場合と同様に、パラメタ t の区間 $[a, b]$ を n 個の区間に分割しておく：

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

これを用いて、複素関数 $f(z)$ の経路 C に沿った線積分を

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\hat{z}_i)\Delta z_i \qquad (z_i \equiv z(t_i), \quad \Delta z_i \equiv z_i - z_{i-1}) \tag{65}$$

と定義する。ただし、複素平面上での区間の幅 $|\Delta z_i|$ は分割数 n を大きくするにつれてゼロに近づくものとする。和をとるときに用いる関数値 $f(\hat{z}_i)$ は、積分路 C 上で i 番目の区間内のある点 $\hat{z}_i = z(\hat{t}_i), t_{i-1} \leq \hat{t}_i \leq t_i$ における値である。

5.2　基本的な性質

- 線形性: 複素関数の和の積分は、個別に取った積分の和に等しい。

$$\int_C \left[k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)\right] dz = k_1 \int_C f_1(z)dz + k_2 \int_C f_2(z)dz$$

- 方向転換: 積分の向きを逆にすると、積分値はマイナスになる。

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = -\int_{z_2}^{z_1} f(z)dz$$

- 積分路の分割: 積分路を C を2つの部分 C_1, C_2 に分割したとき、積分値は各部分の和。

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

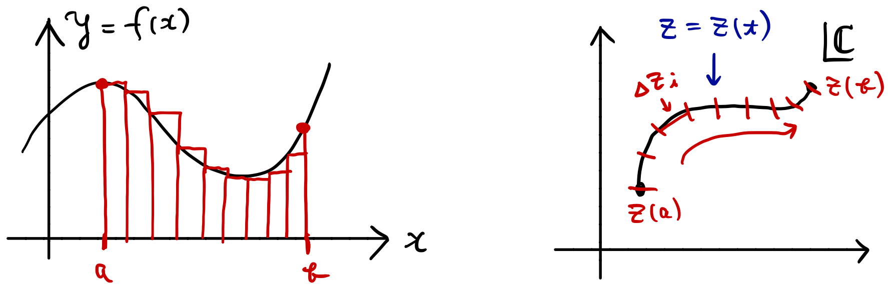

図 8: 実積分と複素積分の概念図。複素積分では、積分経路上の要素 Δz_i と、その区間における関数値 $f(\hat{z}_i)$ をかけたものの和をとり、分割を細かくする極限を取って得られる値が積分値となる。

5.3 複素積分の例

積分路 C 上の点がパラメタ t で $z = z(t)$ と表せるとき、積分要素を

$$dz = \frac{dz(t)}{dt}dt$$

と書きなおせる。こうすることで、複素積分を t に関する定積分に直して計算できる。

- z^2 を原点 $z = 0$ から $z = 1 + i$ に至る線分 C 上で積分する。

  この積分路上の点は、パラメタ t を用いて

  $$z(t) = t + it \quad (0 \le t \le 1)$$

  と表せる。これを用いて、積分要素 dz を dt に書き換えると

  $$dz = \frac{dz}{dt}dt = \frac{d(t+it)}{dt}dt = (1+i)dt. \tag{66}$$

  したがって、今回求める積分は

  $$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (t+it)^2 \cdot (1+i)dt == \int_0^1 (1+i)^3 t^2 dt = (-2+2i)\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i. \tag{67}$$

z^2 を原点 $z = 0$ から z_1 に至る線分 C_1、引き続き z_1 から $z = 1 + i$ に至る線分 C_2 からなる経路 C 上で積分すると、上記の積分と同じ結果が得られる。**始点・終点が同じなら、積分結果が積分経路によらない場合がある。**

各積分路は

$$C_1: \ z(t) = t \quad (0 \le t \le 1), \qquad C_2: \ z(t) = 1 + it \quad (0 \le t \le 1)$$

と表せる。また、各積分路上における積分要素は

$$C_1: \ dz = \frac{dz(t)}{dz}dt = 1 \times dt, \qquad C_2: \ dz = \frac{dz(t)}{dz}dt = i \times dt$$

となる。したがって、求める積分は

$$\begin{aligned}\int_C z^2 dz &= \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1+it)^2 i dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^2\right]_0^1 + i\left[t + 2i \cdot \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} + i\left(1 + i - \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.\end{aligned} \tag{68}$$

積分路が異なるにもかかわらず、積分値は式 (67) と同じ結果になる。

- $1/z$ を単位円 C 上で一周積分：
  単位円上の点は、パラメタ θ を使って
$$z(\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \tag{69}$$
  と表せる。この系路上で、積分要素 dz は
$$dz = \frac{dz(\theta)}{d\theta}d\theta = \frac{de^{i\theta}}{d\theta}d\theta = ie^{i\theta}d\theta \tag{70}$$
  となる。したがって、今回求める一周積分は
$$\oint_C \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} id\theta = i\,[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi i. \tag{71}$$

- $(z-z_0)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ を円 $|z-z_0| = \rho$ 上で一周積分：
  上と同様に、パラメタ θ を使って
$$z(\theta) = z_0 + \rho e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \tag{72}$$
$$dz = \frac{dz(\theta)}{d\theta}d\theta = \frac{d\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)}{d\theta}d\theta = i\rho e^{i\theta}d\theta \tag{73}$$
  と表せるため、求める積分は
$$\oint_C (z-z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} \left(\rho e^{i\theta}\right)^n \cdot i\rho e^{i\theta}d\theta = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}d\theta. \tag{74}$$
  $n \neq -1$ のとき、この積分は
$$\begin{aligned} i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}d\theta &= i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi}\Big[\cos\big((n+1)\theta\big) + i\sin\big((n+1)\theta\big)\Big]\,d\theta \\ &= \frac{i\rho^{n+1}}{n+1}\Big[\sin\big((n+1)\theta\big) - i\cos\big((n+1)\theta\big)\Big]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned} \tag{75}$$
  一方で $n = -1$ のとき、$n + 1 = 0$ になることに注意すると
$$i\int_0^{2\pi} 1d\theta = i\,[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi i \tag{76}$$
  と評価できる。以上の結果をまとめると
$$\oint_C (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases}. \tag{77}$$

5.4 コーシーの積分定理

様々な複素積分を評価するうえで重要となる**コーシーの積分定理**を導入する。

コーシーの積分定理

有界な単連結領域 D で $f(z)$ が解析的なら、D 内のすべての単純閉曲線 C に対して
$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{78}$$
となる。

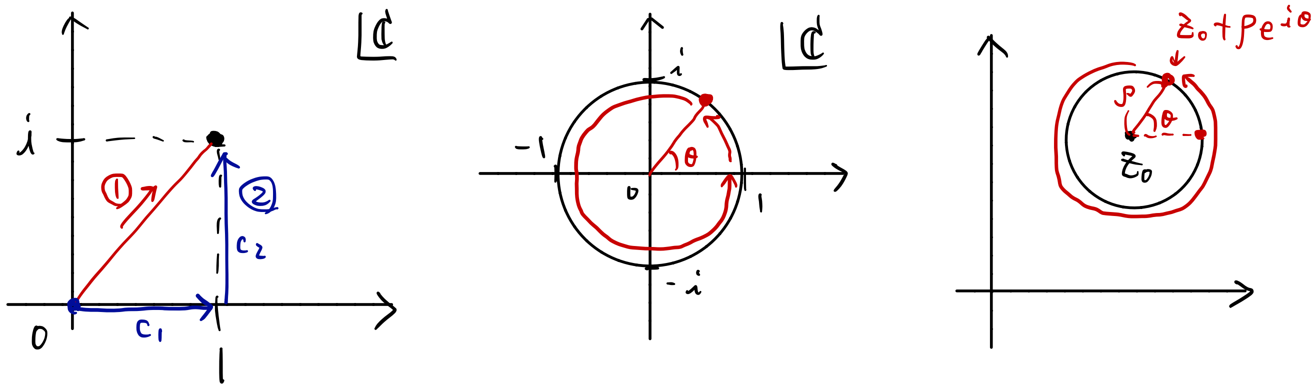

図 9: 積分 (67), (68), (71), (77) の積分路。

単純閉曲線：自分自身と交わらないループ状の曲線
単連結領域 D：D 内のすべての閉曲線が D 内の点だけを囲むような領域。穴が開いていない領域のこと。

定理の証明：
$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $dz=dx+idy$ と表すと

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C (u+iv)(dx+idy)=\oint_C (udx-vdy)+i\oint_C (udy+vdx). \tag{79}$$

ここで、ストークスの定理 (もしくはグリーンの定理)

$$\int_C \left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C (V_x dx+V_y dy) \tag{80}$$

を用いて右辺第 1 項を書き直すと

$$\oint_C (udx-vdy)=j\int_C\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy. \tag{81}$$

領域 D 内で $f(z)$ は解析的であり、コーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{82}$$

を満たすため、右辺の被積分関数はゼロになる。同様にして、式 (80) の右辺第 2 項もゼロになることが示せる。

5.4.1 積分路の変形

コーシーの積分定理では一周積分に注目した。この積分路 C を、始点・終点が同じ二つの経路 C_1, C_2 に分割すると

$$0=\oint_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz-\int_{C_2} f(z)dz \qquad \int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz. \tag{83}$$

ここで、2 つの経路 C_1, C_2 によって囲まれる領域では被積分関数 $f(z)$ が解析的であると仮定していることに注意する。上記の書き換えによって、**関数 $f(z)$ が単連結領域 D 上で解析的なら、D 上で積分路を変形しても積分値は変わらない**ことが分かった。

$f(z) = 1/z$ のような解析的ではない点を持つ関数については、その解析的ではない点 ($1/z$ については $z = 0$) を乗り越えるような積分路の変形はできないので注意すること。

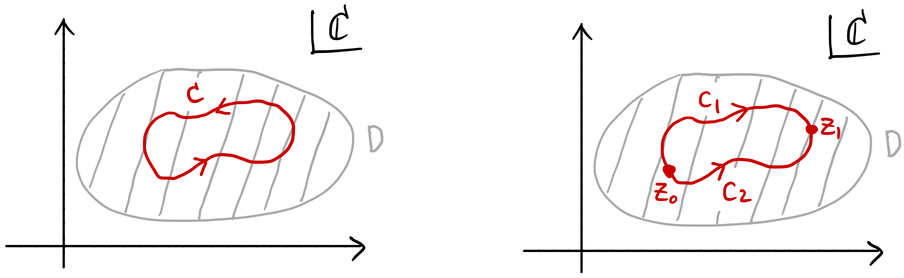

図 10: コーシーの積分定理で考える一周積分と、この定理に基づく積分路の変形。

5.4.2 多重連結領域への応用

多重連結領域 (穴のある領域) は、切断を入れることで単連結領域にできる。また、切断面上の線積分は、往復分でちょうど打ち消しあい、最終的な積分には寄与しない。このことから、切断された多重連結領域についてコーシーの積分定理を適用することで

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots = 0 \tag{84}$$

となることを示せる。ただし、C_1 は領域の外周、$C_{2,\ldots}$ は領域に空いた穴の外周。また、積分の向きは、切断面を使って一周積分に直したときに反時計回りになるように取っているので注意すること。

$f(z) = 1/z$ など、解析的でない点を含む関数についての積分路を変形する際にこの性質を使う。

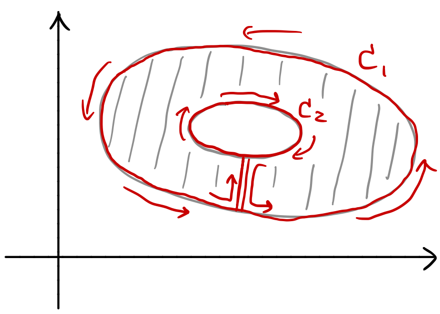

図 11: 二重連結領域 D についてのコーシーの定理。外周 C_1, 内周 C_2 上で積分の向きが逆になっていることに注意。C_1 と C_2 とをつなぐ積分路上では、積分値が往復分で合計ゼロになっている。

5.4.3　不定積分による計算

ここまでで、複素関数が解析的なら積分値は積分路によらないことが示された。これを活用して、複素積分の計算を単純化できる。
例）

- $f(z) = z^2$ を原点 $z = 0$ から $z = 1 + i$ まで積分

  関数 z^2 は複素平面上のいたるところで解析的なので、その積分値は積分経路に依存しない。また、$f(z) = z^2$ の不定積分（微分すると z^2 になる関数）は $(1/3)z^3$ なので

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i. \tag{85}$$

- $f(z) = \cos z$ を $z = 0$ から $z = i$ まで積分

  関数 $\cos z$ は複素平面上のいたるところで解析的なので、積分値は積分路によらず

$$\int_0^i \cos z dz = [\sin z]_0^i = \sin(i) - \sin 0 = i \sinh 1 \tag{86}$$

  となる。ここで、$\sin 0 = 0$ および

$$\sin(i) = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e}{2i} = -\frac{1}{i}\frac{e - e^{-1}}{2} = i \sinh 1 \tag{87}$$

  となることを用いた。