第 2 回　複素関数の微分

　複素関数の微分と、そのために必要となるコーシー・リーマンの関係式を理解して使いこなすことを目標とする。

2.1　複素関数

実関数　$y = f(x)\ \ (x, y \in \mathbb{R})$：　各実数 x に対して、ある実数　$y = f(x)$ を対応させる規則
複素関数 $w = f(z)\ \ (w, z \in \mathbb{C})$：各複素数 z に対して、ある複素数 $w = f(z)$ を対応させる規則

複素関数 $f(z)$ を実部 $u(z)$ と虚部 $v(z)$ に分けて書くこともある。

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy,\ \ u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R})$$

複素関数 $f(z)$ は、2 つの実関数 $u(z), v(z)$ を組み合わせたもの。

2.2　複素関数の微分

　実関数 $f(x)$ の連続性と微分は以下のように定義される。

- 実関数 $f(x)$ について

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

  が満たされるとき、$f(x)$ は $x = x_0$ で連続であるという。

- 実関数 $f(x)$ について、次の極限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \equiv \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) \tag{11}$$

  が存在するとき、$f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能という。

- Δx をゼロに近づけるとき、正の側から近づける場合と、負の側から近づける場合の 2 通りがある。$f(x)$ の微分が存在するためには、その 2 つの極限値が一致する必要がある。

  例）$f(x) = x^2$ の微分は

$$\left.\frac{dx^2}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{x_0}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - {x_0}^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0.$$

- 微分可能な関数 $f(x)$ は、$x = x_0$ で近傍で次のように近似できる。

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \cdots$$

  $f'(x_0)$ は、グラフ $y = f(x)$ の $x = x_0$ における傾き。

実関数の場合を参考に、複素関数 $f(z)$ についても連続性と微分を以下のように定義する。

- 複素関数 $f(z)$ について
$$\lim_{\Delta z\to 0} f(z_0+\Delta z) = f(z_0)$$
が満たされるとき、$f(z)$ は $z=z_0$ で**連続**であるという。

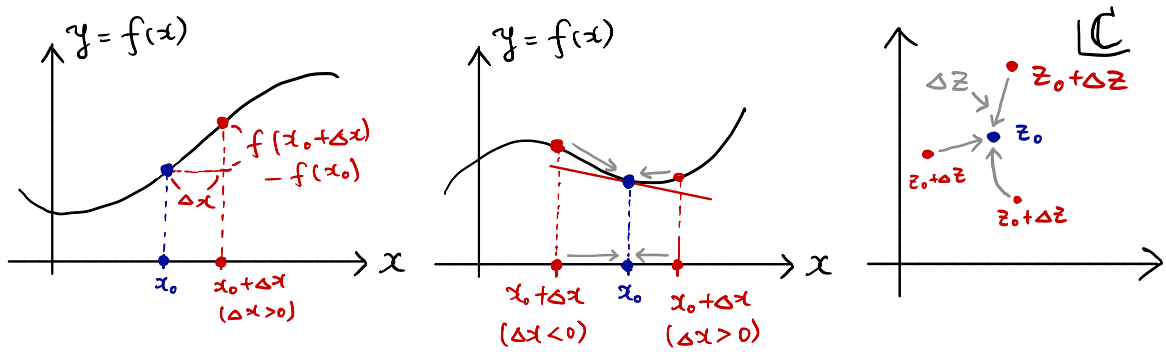
- 複素関数 $f(z)$ について、次の極限
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \equiv \frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0) \tag{12}$$
が存在するとき、$f(z)$ は $z=z_0$ で**微分可能**という。

◆ 実数関数の微分と一見同じ形をしているが、今回は**複素平面上で Δz をどの方向からゼロに近づけても同じ値に収束することが必要になる。**

- 上記の点だけ注意すれば、計算自体は実関数と同様に計算できる。

  例) $f(z)=z^2$ の (複素) 微分は
$$\left.\frac{dz^2}{dz}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)^2-{z_0}^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{{z_0}^2+2z_0\Delta z+\Delta z^2-{z_0}^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} 2z_0+\Delta z = 2z_0.$$

- 微分可能な関数 $f(z)$ は、$z=z_0$ で近傍で次のように近似できる。
$$f(z_0+\Delta z) = f(z_0) + f'(z_0)\Delta z + \cdots \tag{13}$$



(a) 実関数の微分　　(b) 複素平面上の極限

図 3: (a): $x=x_0$ における実関数の微分は、式 (11) の極限 ($\Delta x\to 0$) を取ることで得られる。x の正の側 ($\Delta x>0$) と負の側 ($\Delta x<0$) から近づく 2 通りの極限の取り方がある。(b): 複素微分の定義 (12) の極限 $\Delta z\to 0$ は、複素平面上の様々な方向から取ることができる。その全てについて式 (12) の左辺が同じ値に収束するとき、関数 $f(z)$ は $z=z_0$ で微分可能となる。

2.3　複素関数の微分可能性とコーシー・リーマンの関係式

実関数の微分に出てくる極限 $x \to x_0$ を取る方法は、x の正と負のどちらかの方向から x_0 に近づくという 2 通りしか存在しなかった。これに対して、複素数の場合には Δz の偏角 (複素平面上での Δz の向き) を任意の値にとったうえで $\Delta z \to 0$ とできる。この偏角に式 (12) が依存しない場合に限り $f(z)$ は微分可能となるが、そうなるためには $f(z)$ が**コーシー・リーマンの関係式**と呼ばれる条件を満たす必要がある。これを以下で導出する。

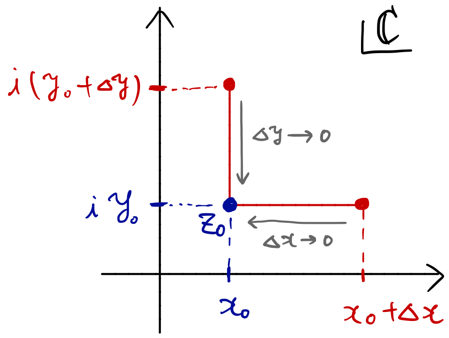


図 4: コーシー・リーマンの関係式の導出の際に使う Δz の経路。$z = z_0$ に実軸および虚軸方向から近づく 2 通りの極限について微分の定義式 (12) を評価する。

以下では、複素関数を実部と虚部に分けて

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy,\ x, y, u, v \in \mathbb{R})$$

とする。コーシー・リーマンの関係式を導出するため、次の 2 通りの極限の取り方について微分の定義式 (12) を評価してみる。

1. 実軸沿いに近づく場合 $[\Delta z = \Delta x,\ \Delta x \to 0\ (\Delta x \in \mathbb{R})]$:

   この Δz を式 (12) に代入すると、$z_0 = x_0 + iy_0$ として

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{14}$$

   最後の等号では実関数の偏微分の定義式を用いている。

2. 虚軸沿いに近づく場合 $[\Delta z = i\Delta y,\ \Delta y \to 0\ (\Delta y \in \mathbb{R})]$:

   この Δz について同様の計算を行うと

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right] \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{15}$$

複素微分 $df/dz(z_0)$ が存在するためには、極限値 (14) と (15) が同じ値となる必要がある。これらの式の実部・虚部をそれぞれ比較することで

コーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \tag{16}$$

が得られる。逆に、コーシー・リーマンの関係式 (16) が満たされるとき、複素微分 (12) が確かに存在することを示せる。

$\because$ $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ とする。$\Delta x,\Delta y$ が十分に小さい時、$f(z)$ は以下のように振舞う。

$$\begin{aligned}
&f(z_0+\Delta z)=u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) &(17)\\
&\simeq u(x_0,y_0)+\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+i\left[v(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y\right]\\
&=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y. &(18)
\end{aligned}$$

ここで、コーシー・リーマンの関係式を用いて $\partial u/\partial y$ を $-\partial v/\partial x$ で、$\partial v/\partial x$ を $\partial u/\partial x$ で置き換え、式を整理すると

$$\begin{aligned}
f(z_0+\Delta z)&=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y\\
&=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)\\
&=f(z_0)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z. &(19)
\end{aligned}$$

この式を用いて式 (12) を評価すると

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \tag{20}$$

となり、$\Delta z\to 0$ の極限をとるときの向き $(\Delta y/\Delta x)$ に依存しない値に収束することが示された。

コメント：

- 以上より、以下の 2 つが互いに等価であることが示された。
  1. 複素関数 $f(z)$ **が** $z=z_0$ **で微分可能**である。
  2. $z=z_0$ で $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ **の実部・虚部がコーシー・リーマンの関係式 (16)** を**満たす**。
- 複素平面上のある領域で複素関数 $f(z)$ が微分可能なとき、$f(z)$ は**解析的**であるという。また、このとき関数 $f(z)$ を**解析関数**と呼ぶ。
- 解析関数 $f=u+iy$ の実部・虚部は、以下の**ラプラス方程式**を満たす。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{21}$$

∵ 解析関数 f の実部 $u(x,y)$ はコーシー・リーマンの関係式 (16) を満たすので、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

が成立する。ここで、2 つ目と 4 つ目の等号で式 (16) を使い、3 つ目の等号では偏微分が可換であることを用いた。虚部 $v(x,y)$ についても同様にして証明できる。

- $f(z)$ が微分可能なとき、$f(z)$ は $\bar{z}$ に依存しない z だけの関数として表せる。

∵ まず、z の実部 $x = (z+\bar{z})/2$ と虚部 $y = (z-\bar{z})/2i$ が

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$$

を満たすことに注意する。これを用いて複素関数 $f = u + iv$ の $\bar{z}$ による微分を計算すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial \bar{z}} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial x} + i \times \frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.
\end{aligned}$$

最後の等号は、f が解析関数でありコーシー・リーマンの関係式を満たすならば成立する。この式より、$\partial f/\partial \bar{z} = 0$ であり f が $\bar{z}$ に依存しないことが示された。