第 11 回　留数積分とその応用

[教科書 4.3 章、4.4 章]

前回は、関数の極における留数の求め方を解説し、極が一つだけある場合について留数積分の方法を解説した。今回は、複数の極が存在する場合の留数積分を導入した上で、実数積分への応用法を解説する。

11.1　復習：留数と留数積分

11.1.1　留数積分

関数 $f(z)$ が $z = z_0$ で特異点を持つとする。このとき、$f(z)$ の $z = z_0$ の周りでのローラン展開は

$$f(z) = \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

と与えられる。この $\frac{1}{z-z_0}$ 項の係数 b_1 を関数 $f(z)$ の特異点 $z = z_0$ における留数 $\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1$ と呼ぶ。このとき、$z = z_0$ を取り囲む右回りの経路 C 上で $f(z)$ を一周積分すると

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C dz \left[\cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots\right] = 2\pi i b_1 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).$$

ただし、この式を示すために分数関数の一周積分の性質

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & (n=1) \\ 0 & (n\text{ が }1\text{ 以外の整数}) \end{cases}$$

を使った。この性質は、コーシーの積分定理

$$\oint_{C:\text{経路内部で } f(z) \text{ は解析的}} f(z)dz = 0$$

を用いて図 18 の左側のような経路を考えることで

$$0 = \oint_{C,\circlearrowleft} f(z)dz + \oint_{C',\circlearrowleft} f(z)dz = \oint_{C,\circlearrowleft} f(z)dz - \oint_{C',\circlearrowleft} f(z)dz \qquad \therefore \quad \oint_{C,\circlearrowleft} f(z)dz = \oint_{C',\circlearrowleft} f(z)dz$$

と、積分経路を $z = z_0$ 周りの半径 ϵ の円 C' に変形し、$z = \epsilon e^{i\theta} + z_0$ とおいて θ 積分に直すことで示せる。

積分経路内に複数の特異点 $z = z_1, z_2, \ldots$ が存在する場合、図 18 右側のような経路を考えて

$$0 = \oint_{C,\circlearrowleft} f(z)dz + \oint_{C_1,\circlearrowleft} f(z)dz + \oint_{C_2,\circlearrowleft} f(z)dz + \cdots = \oint_{C,\circlearrowleft} f(z)dz - \oint_{C_1,\circlearrowleft} f(z)dz - \oint_{C_2,\circlearrowleft} f(z)dz - \cdots$$

$$\therefore \quad \oint_{C,\circlearrowleft} f(z)dz = \oint_{C_1,\circlearrowleft} f(z)dz + \oint_{C_2,\circlearrowleft} f(z)dz + \cdots$$

とすることで、経路 C を各特異点を囲む半径 ϵ の円 $C_1, C_2, \ldots$ に変形する。各経路 C_n に沿った積分からは積分値 $2\pi i \,\mathrm{Res}_{z=z_n} f(z)$ が得られるので、合計の積分値は

$$\oint_{C,\circlearrowleft} f(z)dz = \oint_{C_1,\circlearrowleft} f(z)dz + \oint_{C_2,\circlearrowleft} f(z)dz + \cdots = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) + \cdots\right) = 2\pi i \sum_n \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z)$$

となる。したがって、特異点が複数存在する場合の留数積分は

留数積分

$$\oint_C f(z) = 2\pi i \sum_n \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z)$$

ただし、$\boldsymbol{z = z_n}$ **は経路** $\boldsymbol{C}$ で囲まれる領域に存在する $\boldsymbol{f(z)}$ **の特異点**である。

右辺の和には**経路** $\boldsymbol{C}$ **で囲まれる領域の外部の特異点は含めない**ため、経路がどの特異点を囲むかによって積分値が変化することに注意。

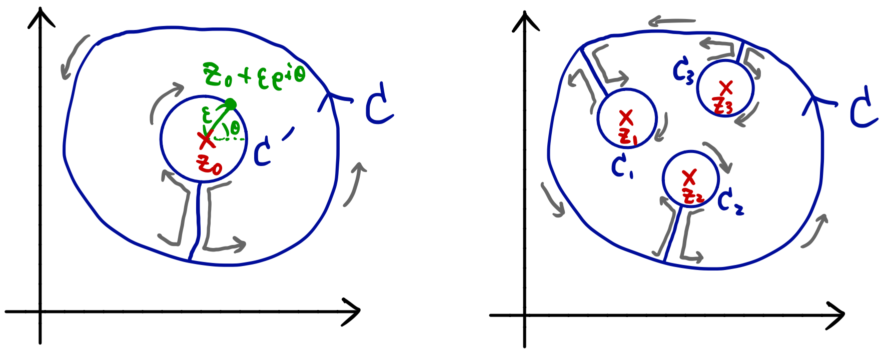

図 18: 左図 : 経路 C 上の一周積分を特異点 z_0 周りの経路 C' 上の一周積分に変形する際に用いる経路。右図 : 経路 C 内に複数の特異点 $z_{1,2,3}$ が存在する場合に、積分経路を各特異点を囲む経路 $C_{1,2,3}$ に変更する際に用いる経路。

11.1.2 留数の求め方

留数の求め方は下記の 3 通り。

- 特異点が一位の極（単純極）の場合：

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

このとき、$z = z_0$ における留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

単純極の留数の求め方はもう一つある。関数が

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \qquad (p(z), q(z) : \text{解析関数}, q(z_0) = 0, p(z_0) \neq 0)$$

この場合、$z = z_0$ は関数 $f(z)$ の単純極になる。分子 $q(z)$ を $z = z_0$ の周りでテイラー展開すると

$$q(z) = q(z_0) + q'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}q''(z_0)(z - z_0)^2 + \cdots = q'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}q''(z_0)(z - z_0)^2 + \cdots$$

となるため、$f(z)$ の留数は

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{p(z)}{q'(z_0)(z-z_0)+\frac{1}{2}q''(z_0)(z-z_0)^2+\cdots} \\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{p(z)}{q'(z_0)+\frac{1}{2}q''(z_0)(z-z_0)+\cdots} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \tag{138}$$

分母だけ微分した式になっているのが特徴。

- 特異点が m 位の極の場合：

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots \quad (b_m \neq 0)$$

この場合の留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

右辺の計算が、高次の負べき部分 $\frac{1}{(z-z_0)^{2,\ldots,m}}$ を消し、ちょうど $\frac{b_1}{z-z_0}$ 項だけを取り出す計算になっている。

- 特異点が真性特異点の場合

$$f(z) = \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

この場合でも、関数 $f(z)$ のローラン展開の表式がわかっていれば、その $\frac{1}{z-z_0}$ 項の係数 b_1 が留数になっている。

例：$f(z) = e^{1/z}$ は $z = z_0$ に真性特異点を持つが、そこでの留数は

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \cdots \qquad \therefore \quad \operatorname*{Res}_{z=0} e^{1/z} = 1.$$

11.1.3 留数積分の例

1. $\displaystyle\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}dz$ の被積分関数は、$z=0$ と $z=1$ に特異点を持つ。この積分値を次の場合に求める。

   その準備として、被積分関数の留数を求めておくと

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{4-3z}{z^2-z} &= \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{4-3z}{z^2-z} = \left.\frac{4-3z}{z-1}\right|_{z=0} = -4, \\ \operatorname*{Res}_{z=1}\frac{4-3z}{z^2-z} &= \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{4-3z}{z^2-z} = \left.\frac{4-3z}{z}\right|_{z=1} = 1.\end{aligned}$$

(a) 経路 C が $z=0,1$ を両方取り囲む場合

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{4-3z}{z^2-z} + \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{4-3z}{z^2-z} \right) = 2\pi i\,(-4+1) = -6\pi i.$$

(b) 経路 C が $z=0$ を囲み、$z=1$ は囲まない場合

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{4-3z}{z^2-z} = 2\pi i\,(-4) = -8\pi i.$$

その他の場合 (経路 C が $z=0,1$ のどちらも囲まない場合など) も同様である。

2. $\displaystyle\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ の被積分関数は

$$\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \frac{ze^{\pi z}}{(z-2)(z+2)(z+2i)(z-2i)}$$

と変形できることから、$z=\pm 2, \pm 2i$ に単純極を持つことがわかる。$z=\pm 2i$ での留数は、公式 (138) を使って

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \lim_{z\to 2i} \frac{ze^{\pi z}}{(z^4-16)'} = \lim_{z\to 2i} \frac{ze^{\pi z}}{4z^3} = \frac{2ie^{2\pi i}}{4(2i)^3} = -\frac{1}{16}, \tag{139}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \lim_{z\to -2i} \frac{ze^{\pi z}}{(z^4-16)'} = \lim_{z\to -2i} \frac{ze^{\pi z}}{4z^3} = \frac{-2ie^{-2\pi i}}{4(-2i)^3} = -\frac{1}{16} \tag{140}$$

と求められる。したがって、この 2 つの特異点だけを含む積分経路 C についての一周積分は

$$\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = 2\pi i \sum_{z=\pm 2i} \operatorname{Res} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = 2\pi i \left(-\frac{1}{16} - \frac{1}{16} \right) = -\frac{\pi i}{4}.$$

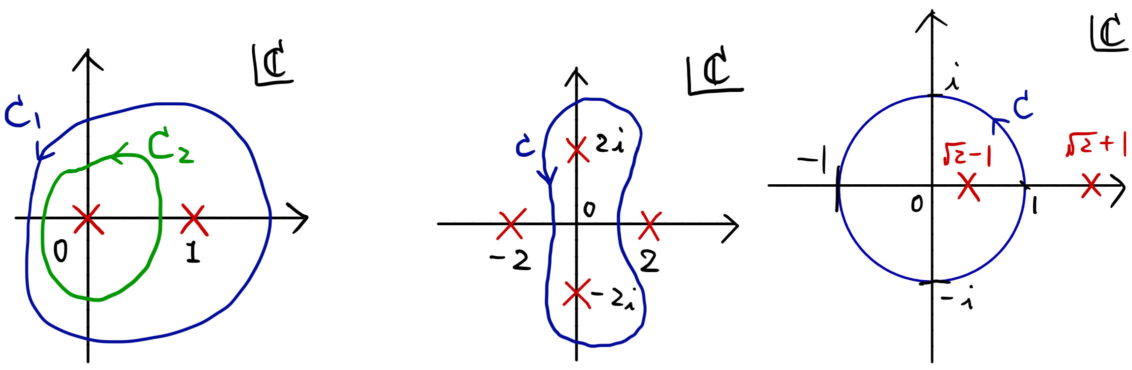

図 19: 左：11.1.3 節の例 1 の留数積分における特異点の位置と積分路。中央：11.1.3 節の例 2 の留数積分における特異点の位置と積分路。右：11.2.1 節の例における積分路と極の位置。

11.2 実数積分への応用

複素積分を応用することで、実数の積分を求めることができる。今回と次回の授業でその代表例を紹介する。

11.2.1 三角関数を含む積分

三角関数 $\cos\theta, \sin\theta$ の任意関数 $F(\cos\theta, \sin\theta)$ の $0 \le \theta \le 2\pi$ にわたる積分

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta) d\theta \tag{141}$$

を、複素積分を利用して評価してみよう。

$z = e^{i\theta}$ とおくと、$0 \le \theta \le 2\pi$ 積分は単位円上の複素一周積分になる。また、各三角関数は

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i},$$

積分要素 $d\theta$ は

$$dz = \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta = \frac{de^{i\theta}}{d\theta} d\theta = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \qquad \therefore \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

と変形できる。以上より、積分 (141) は

$$I = \oint_{\text{単位円}} F\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} \tag{142}$$

と変形できる。これを複素積分として評価すればよい。

例）$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta}$ を求める。

上記の手順にしたがって複素積分に書き換えると

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta} &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{-\frac{1}{2}i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1} \\
&= 2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left\{z - (\sqrt{2}+1)\right\}\left\{z - (\sqrt{2}-1)\right\}}.
\end{aligned} \tag{143}$$

最後の等号における式変形では、方程式 (分母)=0 の解を求めることで

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4}}{2} \sqrt{2} \pm 1$$

$$\therefore \quad z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 = \left\{z - (\sqrt{2}+1)\right\}\left\{z - (\sqrt{2}-1)\right\}$$

と分母を因数分解している。

式 (143) の値を留数定理で求めよう。被積分関数は $z = \sqrt{2} \pm 1$ に単純極を持つが、このうち単位円 $|z| = 1$ の内部に入るのは $z = \sqrt{2} - 1$ だけである。したがって、留数定理より式 (143) の積分値は

$$\begin{aligned}
2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\left\{z - (\sqrt{2}+1)\right\}\left\{z - (\sqrt{2}-1)\right\}} &= 2\pi i \cdot 2i \operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}-1} \frac{1}{\left\{z - (\sqrt{2}+1)\right\}\left\{z - (\sqrt{2}-1)\right\}} \\
&= -4\pi \lim_{z \to \sqrt{2}-1} \frac{1}{z - (\sqrt{2}+1)} = -4\pi \frac{1}{\sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2}+1)} = 2\pi.
\end{aligned}$$