複素関数論　講義ノート

棚橋典大

2018 年度前期 水曜 2 限

第 1 回　導入

1.1　複素関数論とは

- 複素関数： 複素数を変数に持つ関数。$y = f(x)$ $(x, y : \text{実数})$ $\Rightarrow$ $w = f(z)$ $(w, z : \text{複素数})$
- 複素解析： 複素関数と、その微分・積分に関する学問。
$$\frac{df(x)}{dx} \Rightarrow \frac{df(z)}{dz}, \qquad \int f(x)dx \Rightarrow \int f(z)dz$$
一見似ているが、複素数独特の性質や計算法がある。
- 複素解析の応用： 工学・物理学でよく使われる。
  - 振動・波動:
    $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ [オイラーの公式]
  - フーリエ解析:
    波形 $y = f(t)$ の周波数成分は $\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt.$
    音声・画像処理などによく使われる。
  - 境界値問題・ポテンシャル問題:　静電場、熱伝導、流体の流れなどは、ラプラス方程式
$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2} = 0$$
    の解で表される。
    (正則な) **複素関数の実部・虚部はラプラス方程式の解になる**ため、これらの問題に応用できる。

1.2　この講義の目標と進め方

複素積分をマスターすることが主な目標。そのために、下記項目を順に学ぶ。

1. 複素数の基礎

2. 複素関数の微分: 微分可能性とコーシー・リーマンの関係式
3. 複素関数いろいろ $(z^p, e^z, \sin z, \sinh z, \log z)$
4. 複素関数の図形的解釈: 等角写像
5. 複素関数のテイラー展開とその拡張（ローラン展開）
6. 複素積分: 留数定理、実積分への応用

1.3 複素数の基礎

1.3.1 複素数

$x, y, \ldots \in \mathbb{R}$: 実数、$z \in \mathbb{C}$: 複素数、$i$: 虚数単位 $(i^2 = -1)$ として

$$z = x + iy = \mathrm{Re}z + i\,\mathrm{Im}z \tag{1}$$

$\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z \in \mathbb{R}$: 複素数 z の実部、虚部。複素数 z の共役複素数 $\bar{z}$:

$$\bar{z} = x - iy = \mathrm{Re}z - i\,\mathrm{Im}z$$

を用いると、z の実部、虚部は

$$\mathrm{Re}z = x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}z = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

複素数 z の絶対値 $|z|$ は実数になる：

$$|z|^2 = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

複素数の演算の例：

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)\overline{(1-i)}}{(1-i)\overline{(1-i)}} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+3i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+3i}{2}$$

1.3.2 複素平面、複素数の極形式

- **複素平面**

  複素数 $z = x + iy$ の実部、虚部を直交座標系の点として表す。

  ＊複素共役 $\bar{z}$ は、z を実軸について鏡映した点に相当。

- **複素数の極形式**

  複素数 z は、2 次元面上の点 (x, y) として表すと便利。極座標 (r, θ) で表すと

  $$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \qquad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}\right).}$$

  $r = |z| > 0$ は z の絶対値、$\theta \equiv \arg z$ は複素数 z の偏角である。

＊偏角が 2π の整数倍異なっても、複素数値としては同じ値。

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\left[\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi)\right] \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \in \mathbb{Z})$

$\mathbb{Z}$: 整数全体

＊青字部分をオイラーの公式と呼ぶ。後で説明する。

- 極形式での積・商

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ の積は

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$
$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2. \tag{2}$$

積 $z_1 z_2$ の絶対値 $|z_1 z_2|$ は絶対値同士の積、偏角 $\arg(z_1 z_2)$ は偏角同士の和。

計算：

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\right)\right] \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]. \end{aligned}$$

同様に、**商の絶対値と偏角は絶対値同士の商と偏角同士の差**：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right] \quad \therefore \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2. \tag{3}$$

＊複素数の積が、複素平面上の回転・拡大に対応していることが要点。

絶対値倍だけ拡大、偏角分だけ回転される。

- ド・モアブルの定理

公式 (2) で $z_1 = z_2 = z$ とすると

$$z^2 = r^2\left[\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\right]$$

より一般に、次の**ド・モアブルの定理**が成り立つ (式 (2), (3) を使って示せる)：

$$z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right] \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{4}$$

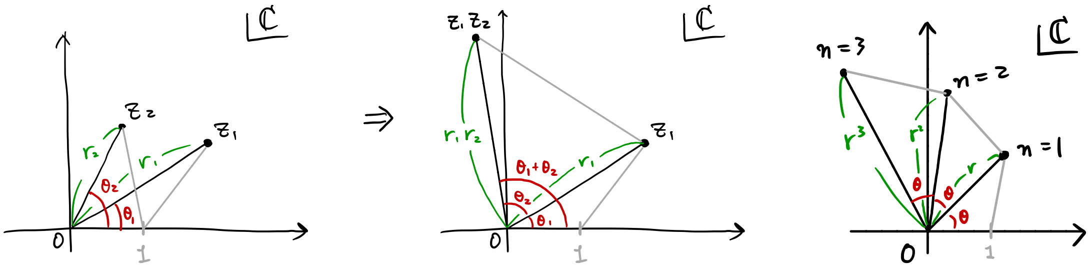
- n 乗根

n 乗根 $\sqrt[n]{z}$: n 乗すると z になる数 ($(\sqrt[n]{z})^n = z$)。$\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ とも書く。

ド・モアブルの公式 (4) を使うことで、複素数 z の n 乗根 $\sqrt[n]{z}$ を求められる。

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m}{n}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m}{n}\pi\right)\right] \quad (m \in \mathbb{Z}) \tag{5}$$

$m \in \mathbb{Z}$ の分、全部で n 個の互いに異なる n 乗根が存在するので注意。



(a) 複素数の積　　(b) ド・モアブルの定理

図 1: 複素平面上における複素数の積とド・モアブルの定理の表示。

導出：

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のときに $\sqrt[n]{z} = R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ を求める。式 (4) を使うと

$$z = (\sqrt[n]{z})^n \quad \Leftrightarrow \quad r(\cos\theta + i\sin\theta) = R^n\left[\cos(n\Theta) + i\sin(n\Theta)\right]$$

両辺を比較して

$$r = R^n, \quad \cos\theta = \cos(n\Theta), \quad \sin\theta = \sin(n\Theta).$$

この式を満たす R, Θ を求めると

$$R = r^{1/n}, \quad n\Theta = \theta + 2m\pi \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

この結果から、z の n 乗根 $\sqrt[n]{z} = R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ が式 (5) の通りに得られる。

$\frac{2m}{n}\pi$ の部分を除けば、元の複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と比べて、絶対値は $1/n$ 乗 ($|\sqrt[n]{z}| = r^{1/n}$)、偏角は $1/n$ 倍 ($\arg z = \frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}$) で、ド・モアブルの定理と同じ形になっている。

特に、**1 の n 乗根** は $(r = |1| = 1, \theta = \arg 1 = 0)$

$$\sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2m}{n}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2m}{n}\pi\right) \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

例：1 の 3 乗根、4 乗根は、複素平面上で単位円に内接する正三角形、正四角形の頂点の位置。

$$\sqrt[3]{1} = 1,\ \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right),\ \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$\sqrt[4]{1} = 1,\ \cos\left(\frac{2}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{4}\pi\right),\ \cos\left(\frac{4}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{4}\pi\right)\ \cos\left(\frac{4}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{4}\pi\right) = 1, i, -1, -i.$$

- **オイラーの公式**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{6}$$

極形式の複素数を、実部と虚部に分けずにコンパクトに書ける。

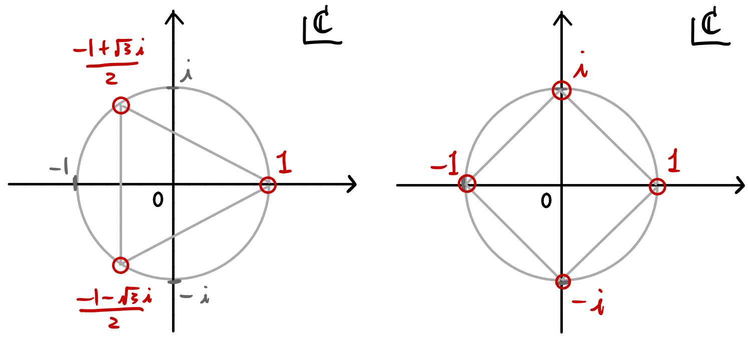


図 2: 複素平面上における 1 の 3 乗根、4 乗根の表示。

例：

$$1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\pi/3}$$

$$1 = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} \quad \Rightarrow \quad 1^{1/3} = 1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

∗この講義の後の方で、(複素) 指数関数 $e^z = e^{x+iy}$ の一部としてまた出てくる。

導出： 実数関数 e^x のテイラー展開は

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots.$$

これに $x = i\theta$ を代入すると、実部と虚部がそれぞれ $\cos\theta$, $\sin\theta$ のテイラー展開になっている：

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \cdots \tag{7}$$

$$= 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{5!}i\theta^5 + \cdots \tag{8}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!} + \cdots + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right) \tag{9}$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta. \tag{10}$$

例題：

1. $z = \left(\frac{6+8i}{4-3i}\right)^2$ を極形式で表し、複素平面上に図示せよ。

   以下のようにして、z は絶対値 4, 偏角 π の複素数であるとわかる。

$$\left(\frac{6+8i}{4-3i}\right)^2 = \left(\frac{(6+8i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}\right)^2 = \left(\frac{50i}{25}\right)^2 = (2i)^2 = -4 = 4\left(\cos\pi + i\sin\pi\right).$$

   複素平面上では $(x, y) = (-4, 0)$ の点。

2. 3 乗根 $\sqrt[3]{1+i}$ を全て複素平面上に図示せよ。

まず、絶対値と偏角を求める。

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+i} &= \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)} = 2^{1/6}\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}} \\
&= 2^{1/6}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2n\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2n\pi}{3}\right)\right] \quad (n\in\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

1 の 3 乗根が合計三つあることに注意する。複素平面上では、原点を中心とする半径 $2^{1/6}$ 上の偏角 $\theta=\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}=\frac{17\pi}{12}$ の点。正三角形をなす。