

相対性理論 講義ノート

棚橋典大

2022 年度前期 月曜 2 限

目次

第 1 回 導入	3
1.1 相対性理論とは	3
1.2 特殊相対論の特徴と応用	3
1.3 相対性理論以前の物理学	5
1.4 マクスウェル方程式と光速	6
第 2 回 特殊相対性理論の発見	9
2.1 ガリレイ変換	9
2.2 マイケルソン・モーリーの実験	10
第 3 回 特殊相対性理論の構築	15
3.1 特殊相対性原理 / 光速度不変の原理	15
3.2 光速度一定の原理の帰結	17
第 4 回 特殊相対性理論の構築 (続き)	22
4.1 時刻の同期	22
4.2 運動系における時刻の同期	23
4.3 ローレンツ変換の構築	26
第 5 回 ローレンツ変換の性質	30
5.1 復習: ローレンツ変換	30
5.2 ローレンツ変換にまつわる物理現象	31
5.3 非相対論的極限	34
5.4 ローレンツ変換の時空図	34
第 6 回 時空と因果性	36
6.1 速度の合成則	36
6.2 時空の因果性	37
6.3 固有時・固有長	39
6.4 ローレンツ変換の別の導出法	40
第 7 回 相対論における諸現象	42
7.1 固有時間	42
7.2 ローレンツ収縮	44
7.3 シミュレーションによる再現	47

第 8 回 共変性の理解に向けて	50
8.1 ニュートンの運動方程式の共変性	50
8.2 相対論的運動方程式を作るには	52
8.3 ローレンツ変換に対するスカラー・ベクトル・テンソル	54
第 9 回 相対論的力学の構築	57
9.1 復習と補遺：スカラー・ベクトル・テンソル	57
9.2 4 元速度、4 元運動量	59
9.3 相対論的運動方程式	60
第 10 回 相対論的力学の性質	63
10.1 復習：相対論的運動方程式	63
10.2 E, \mathbf{p} の性質	63
10.3 最小作用の原理による導出	67
第 11 回 相対論における諸現象（波動・光）	69
11.1 波動	69
11.2 ドップラー効果・光行差	71
11.3 シミュレーションによる再現	74
第 12 回 相対論的電磁気学	76
12.1 これまでの経緯と今回の目標	76
12.2 マクスウェル方程式の 4 次元表記	77
12.3 電磁場のローレンツ変換	79
12.4 4 元電流ベクトル j^μ のローレンツ変換	80
12.5 $F_{\mu\nu}$ で表したマクスウェル方程式	81
第 13 回 相対論的電磁気学（続き）	83
13.1 復習：マクスウェル方程式	83
13.2 荷電粒子の運動方程式	83
13.3 具体例：平行電流間の引力	85
第 14 回 一般相対性理論に向けて	90
14.1 一般相対論の基礎	90
14.2 重力と時空の歪み	91
14.3 重力場中の粒子の運動	93
14.4 一般相対論についてのコメント	95

第1回 導入

本講義では、主として特殊相対性理論について解説する。具体的な内容の説明に入る前の導入として、相対論の特徴や、相対論が提案される以前の物理学の状況などについて今回は解説する。なお、今回説明する各内容についてのより詳しい解説や導出は今後の講義でより詳細に行う。

1.1 相対性理論とは

アインシュタインが構築した相対性理論¹としては、以下の2種類がある。

- **特殊相対性理論**：光と時間・空間についての理論。
「任意の慣性系において物理法則は同じ」とする**特殊相対性原理**と、それから従う**光速度一定の原理**に基づいて構築される。
- **一般相対性理論**：重力の理論。
「任意の座標系において物理法則は同じ」とする**一般相対性原理**に基づいて構築される。

1.2 特殊相対論の特徴と応用

1.2.1 特殊相対論における諸現象

- **光速度一定**：光の速さはどの慣性系で測定しても伝搬方向に依らず常に一定となる。
 - － **1 m の定義**：光速が厳密に $c = 299,792,458 \text{ m/s}$ となるように1 m の長さは定義される。すなわち、光が1秒間に伝搬する距離を299,792,458で割ったものが1 mである。なお、1秒の長さはセシウム原子時計を用いて別途定義されている。
- **運動する物体の時間の遅れ**：運動する系における時間は、静止系から見ると遅く進んで見える。
 - － 「**ウラシマ効果**」：ある静止系から出発した宇宙船が高速で飛行したのち出発点に戻ってきたとき、宇宙船内に乗っていた人の方が出発地にいた人よりも歳を取らないで済む。同じ効果により**GPS**に搭載された時計も遅く進むようになるため、正確な位置測定のためには補正が必要となる²。
 - － **地表に飛来する宇宙線**：宇宙から飛来する宇宙線（陽子など）は、大気と衝突して二次宇宙線を生成し、最終的に上空約10 kmで**ミュオン粒子**に変化して地表に飛来する。だいたい手のひらの大きさに1秒あたり1個程度飛んできている。
静止しているミュオン粒子は $2 \times 10^{-6} \text{ s}$ 程度で崩壊してしまうため、相対論的效果を考慮に入れなければ光速で飛んでも約600 m/s程度しか飛ばず、地表には届かないことになってしまう。相対論的效果を考慮に入れると、速度 v で飛ぶミュオン粒子の寿命は $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ 倍に伸びて見えるため、ミュオン粒子が生成してから崩壊するまでに飛行する距離も同じ倍率で伸び、地表にも到達することが可能となっている³。
- **ローレンツ収縮**：運動する系における長さは、静止系から見ると短く見える。

¹短縮して**相対論**とも呼称される。

²ただし、地表よりもGPS衛星の地点で重力場が弱いことによる時間の進み（一般相対論的效果）についても考慮する必要がある。

³例えば、ミュオン粒子が速度 $v = 0.9999 \times c$ で飛んでいたとすると、寿命は $1/\sqrt{1-(v/c)^2} \sim 22$ 倍となり、崩壊するまでに飛行する距離もその倍率分長くなる。

- 先ほどのミュー粒子の飛翔距離の話をもミュー粒子の静止系から見ると、大気層が高速でミュー粒子に突っ込んでくることになる。その際、大気層の厚さはローレンツ収縮により $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 倍に縮み、そのためにミュー粒子の寿命以内に大気層を貫通することが可能となっている。

- **エネルギーと質量の等価性： $E = mc^2$**

- **核反応における質量欠損：**核分裂、核融合などの核反応において放出されるエネルギー E は、反応後の質量欠損 m が源となっている。

- **物性における影響 / 相対論的質量：**(不正確な面もあり、注意が必要だが) 速度 v で運動する粒子の質量は $1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 倍に重くなったかのように解釈できる(相対論的質量)。原子番号の大きい原子における電子は光速に近い速度で運動するため、その質量は静止質量よりも重くなったかのように振る舞う。その結果として電子軌道が収縮するなどといった変化が生じ⁴、物質としての性質にも影響が生じる。多くの金属が銀色(可視光をすべて反射する)である一方で金が黄色に発色すること、また水銀が常温で液体となることなどは相対論的效果が起源となっている。

- **特殊相対論の可視化：**特殊相対論は光と時間・空間の理論であり、その効果が顕著になるのは物体が光速に近い速度で運動していたり自身がそのような高速で運動している場合である。ここで、もし光速が日常的な運動の速さに近くなれば特殊相対性理論の効果を直接見ることができる。もちろん我々の世界ではなかなか実現しがたい状況だが、シミュレーションによって相対論的效果を再現することは可能であり、以下のような自分で実体験できるものもある。

- **Captain Einstein:** ゲント大学を中心とするグループによって製作された、特殊相対論の効果を再現した VR ムービー。光の速度が自転車の速度くらい(時速約 20 km) だったら世界はどう見えるかを再現したもの。

- * ウェブサイト：<http://captaineinstein.org/>

- * 動画：<https://www.youtube.com/watch?v=i6AouFHLb2g>

- * 論文：<https://arxiv.org/abs/1806.11085>

- **A Slower Speed of Light:** MIT Game Lab によって 2012 年に製作された、光速が遅くなると世界はどう見えるのかを体験できるゲーム。こちらは自分で自由に動き回れる。

- * ウェブサイト⁵：<http://gamelab.mit.edu/games/a-slower-speed-of-light/>

- * 動画：https://www.youtube.com/watch?v=uu7jA8EHi_0

注意点としては、これらのシミュレーションで見える現象すべてが相対論的效果によるものではない、という点が挙げられる。そのため、これらのシミュレーションから相対論についての正しい知見を得るためには若干の勉強が必要となる。

⁴例えば、水素のような原子の電子軌道の半径(ボーア半径)は $r = \frac{n^2 \hbar^2 \pi \epsilon_0}{m_e Z e^2}$ で与えられ、電子質量 m_e が増大すれば電子軌道 r は小さくなる。電子の速度は $\frac{v_e}{c} = \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar c n}$ となり、原子番号 Z が大きい元素ほど v_e は大きくなる。

参考：https://en.wikipedia.org/wiki/Relativistic_quantum_chemistry

⁵2022 年現在のウェブサイトで配布されている windows 版プログラムは、少なくとも筆者のパソコンでは正しく画面表示されない。正しく動作する過去のバージョンを Internet Archive からダウンロードすることは一応可能。[過去のウェブサイトへのリンクはこちら](#)。

1.2.2 他分野との関係

相対論的効果を取り入れることで、物理学の各分野には以下のような影響が生じる。

- **電磁気学**：マクスウェル理論からは光速が定数として自然に導出される。この光速が、どの慣性系で測っても一定値となるためには相対論の導入が不可欠である。実際、そうしないと任意の慣性系で光速度一定という実験事実と合わなくなってしまう。
- **力学**：特殊相対論に基づいて作られる**相対論的力学**は、特に光速に近い速度で運動する物体の振る舞いを記述するのに必須となる。また、相対論的力学について粒子の速度が光速よりも十分に遅い極限 (**非相対論極限**) を取ることで**ニュートン力学**が再現される。
- **量子力学、素粒子論**：(非相対論的) 量子力学の基礎方程式であるシュレーディンガー方程式 $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right) \psi$ では、時間 t と空間 x が同等に扱われておらず、特殊相対論と整合的でない。特殊相対論と整合的になる量子力学の基礎方程式として、スピン 0 のボソン粒子を記述するクライン・ゴールドン方程式 $\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$ や、電子をはじめとするスピン 1/2 のディラック粒子を記述するディラック方程式 $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$ が考案された。場の量子論をはじめとする素粒子理論も、多くの場合は特殊相対論と合致するように作られている。
- **天文学、宇宙論**：高エネルギーを持ち光速に近い速度で運動する粒子や流体は、宇宙空間における種々の天体現象においてしばしば見られる。それらの物理的振る舞いの理解には特殊相対論が不可欠となる。また、重力の理論である一般相対論を用いるとブラックホールや重力波、また宇宙の加速膨張現象などといった宇宙そのものの時間発展についても調べられるようになる。

1.3 相対性理論以前の物理学

相対性理論の特徴を理解するためには、相対性理論が作られる以前の物理学がどのようなものだったかを理解する必要がある。以下ではそれらのうち相対性理論と関係するものについて簡単に解説する。

● ニュートン力学

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ の位置にあり、力 \mathbf{F} を受けて運動する質量 m の点粒子についてのニュートンの運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (1.1)$$

で与えられる。ただし、太字は 3 次元ベクトル ($\mathbf{x} = (x, y, z)$ など)。

この方程式は、元の系 O から一定速度 \mathbf{V} で移動する系 O' への**ガリレイ変換** $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (t', \mathbf{x}')$:

$$t' = t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t \quad (1.2)$$

に対して不変である。どの慣性系から見てもニュートン力学の法則は同じ、ということに対応している。なお、粒子 (や波動) の速度 \mathbf{v} は、 O' 系で見ると \mathbf{V} だけずれて見える:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}. \quad (1.3)$$

ガリレイ変換 (1.2) において、時刻 t は変換前後で変化しないと仮定されている。**絶対時間** t と呼ばれる基準となる時刻が存在して、どの速度の慣性系に移ったとしても時刻は共通の t で与えられて変化しない、という仮定である。私たちの日常の感覚に合った「自然」な仮定ではあるが、相対性理論ではこの仮定が修正される。

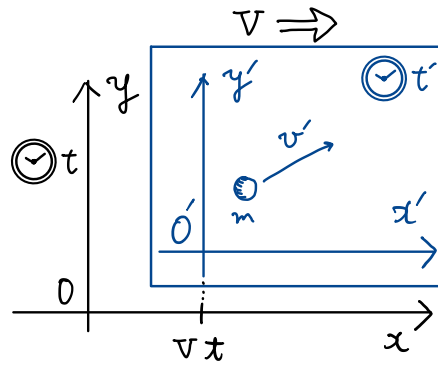


図 1: ある慣性系 O に対して速度 V で運動する慣性系 O' .

● 電磁気学

マクスウェルにより、光は電磁波であることが示された。また、電場 $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$, 磁場 $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ が従うマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

も相対論以前に導出されていた。ただし、 $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, $\rho(t, \mathbf{x}), \mathbf{j}(t, \mathbf{x})$ は電荷・電流密度、 ϵ_0, μ_0 は真空の誘電率・透磁率である。

光が電磁波そのものであること、またマクスウェル方程式から光速 c が導出されることも知られていた（後述）。また、音波が媒質である空気の振動であるように、電磁波はエーテルと呼ばれる媒質の振動であると考えられていた。

ガリレイ変換 (1.2) に従うと、ある系 O における光速が c （どの方向にも一定速度 c ）だった時、速度 V で運動する系 O' から見た光速は

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \mathbf{V} \quad (1.5)$$

と変化する。光速がどの方向にも一定速度 c となるような特別な慣性系 (= 光の媒質であるエーテルの静止系) が存在し、それ以外の慣性系では光速は c からずれる、と考えられた。

その光速のずれを検出するための実験⁶も行われた。しかし、実際にずれが検出されることはなく、そのためのつじつま合わせの理論⁷が考案された。

1.4 マクスウェル方程式と光速

1.4.1 光速の導出

真空中 ($\rho = 0, \mathbf{j} = 0$) のマクスウェル方程式 (1.4) から光速（電磁波の伝搬速度）を導出してみよう。式 (1.4) の第 2 式について $\text{rot} = \nabla \times$ を作用させると

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E})}_{=0} - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.6)$$

$$\therefore \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \mathbf{E} = 0 \quad \left(c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right) \quad (1.7)$$

⁶マイケルソン・モーリーの実験等。

⁷エーテルに対して相対的に運動しているとローレンツ収縮が起こる、等。

磁場 \mathbf{B} についても (1.7) と同様の式を導出できるし、 \mathbf{E}, \mathbf{B} のどちらかが決まればもう一方はマクスウェル方程式に従って定められる。式 (1.7) 中に現れる c は、電磁場の性質を定めている真空の誘電率 ϵ_0 と透磁率 μ_0 が決まれば自動的に定まる定数である。

式 (1.7) は電場 $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ についての波動方程式である。簡単のため、 x 方向に伝搬する平面波を考えることにして、電場の独立な成分を $E = E(t, x)$ と表す。この場合、式 (1.7) の一般解は

$$0 = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) E(t, x) = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E(t, x) = - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) E(t, x) \quad (1.8)$$

$$\Rightarrow E(t, x) = E_1(ct + x) + E_2(ct - x) . \quad (1.9)$$

ただし、 $E_1(ct + x), E_2(ct - x)$ はそれぞれ $ct + x, ct - x$ の任意関数。

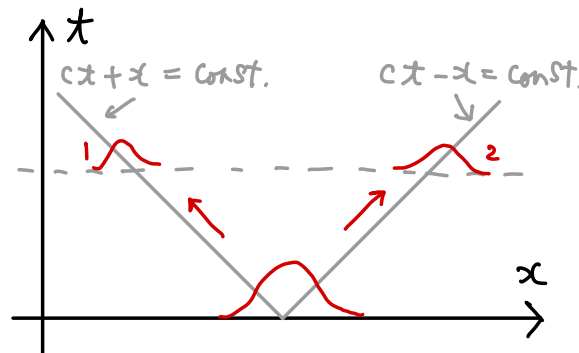


図 2: 波動方程式 (1.8) の一般解 (1.9)。初期位置から左右方向に速度 c で伝搬する波動（電磁波）を表す。式 (1.9) の $E_1(ct + x)$ が左方向、 $E_2(ct - x)$ が右方向に伝搬する波に対応する。

一般解 (1.9) のうち、 $E_1(ct + x), E_2(ct - x)$ はそれぞれ平面 $ct + x = (\text{一定}), ct - x = (\text{一定})$ で決まる平面上で一定値を取る。従って、 E_1, E_2 はそれぞれ左右 (x 軸の負/正の方向) に速度 c で伝搬する波動を表すことが分かる。光は電磁波そのものであるので、光速は $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ となることが示されたことになる。

1.4.2 導出された c の解釈

さてここで、前節で導出された光速 c はどの観測者にとっての光速かということが問題になる。

ある慣性系 O で光速 c を実験的に測定したとしよう。1.3 節で説明した通り、速度 \mathbf{V} で運動する別の慣性系 O' で同じ光について光速 c' を測定すれば、ガリレイ変換 (1.2) に基づいて計算した式 (1.5) の通り $c' = c - \mathbf{V}$ となる。元の系で測定した光速 c からずれるほか、慣性系の運動の方向に対してどの向きに光が伝搬するかに応じて伝搬速度が変化する事も予言される。逆に言うと、光速 c がどの伝搬方向についても一定となるような特別な慣性系が存在することになる。

1.3 節でも説明したが、相対性理論が提案されるまではおおよそ以下のような描像が考えられていた。空気中の音波と同様である。

- エーテルという媒質が宇宙を満たしている。
- 電磁波はエーテルの弾性波である。
- エーテルに対して静止している慣性系（エーテルの静止系）では、電磁波の伝搬速度（=光速）はどの向きについてもマクスウェル方程式から導出される $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ となる。すなわち、マクスウェル方程式 (1.4) はエーテルの静止系で成立する。

- エーテルに対して相対的に運動している慣性系では、光速は c からずれる。逆に、光速の変化を精密に測定することで、エーテルの流速を測定できる。

実際の実験結果は**観測者の運動状態に依らず光速は常に一定**というもので、上記の描像とは合わない。素のつじつまを合わせるために、エーテルに対して相対速度を持っている物体は収縮するという**ローレンツ収縮**の仮説が提案された。一方、アインシュタイン自身は全く別の仮定から特殊相対性理論を構築し、その帰結の一つとして同じ結果、すなわちローレンツ収縮が起こることを示した。次回以降の講義で、これらの点について解説を進めていく。

第2回 特殊相対性理論の発見

特殊相対性理論以前は、物理理論はガリレイ変換に対して不変であり、マクスウェル方程式やそれから導出される光速についてもガリレイ変換が適用されると考えられていた。今回の講義では、特殊相対性理論以前の物理学に基づいた光の性質についての理論と実験を紹介し、特殊相対性理論の導入へとつながってゆく流れについて解説する。

2.1 ガリレイ変換

2.1.1 ガリレイ変換と粒子の速度

前回は導入した、ある慣性系 $O : (t, \mathbf{x})$ から速度 \mathbf{V} の慣性系 $O' : (t', \mathbf{x}')$ へのガリレイ変換：

$$t' = t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t \quad (2.1)$$

を復習しておく。この座標変換を行うことが、慣性系 O から慣性系 O' に移って物理現象を解析することに対応するのであった。例えば、 O 系で粒子の軌道が $x = x(t)$ で与えられたとすると、 O' 系での軌道は式 (2.1) に従って先ほどの式を変換した $x' = x'(t')$ で与えられる。

特に、ガリレイ変換 (2.1) により、 O' 系における粒子や波動の速度 \mathbf{v}' は元の O 系における値から \mathbf{V} だけシフトする：

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{V}t) = \mathbf{v} - \mathbf{V}. \quad (2.2)$$

2.1.2 マクスウェル方程式のガリレイ変換性

前回紹介したマクスウェル方程式から導出される光速についても、上記の速度の変換則が適用される。このことをマクスウェル方程式（書き換えて得られた波動方程式）に基づいて見てみよう。

マクスウェル方程式を書き換えると、 x 方向に伝搬する電磁波の従う方程式は⁸

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{d^2}{dx^2} \right) E(t, x) = 0 \quad (2.3)$$

となることを前回示した。ただし、 $E(t, x)$ は電場の成分。この式の一般解は

$$E(t, x) = E_1(ct + x) + E_2(ct - x) \quad (2.4)$$

で与えられ、 $E_{1,2}$ がそれぞれ速さ c で x の正・負方向に伝搬する波を表すのであった。

この方程式にガリレイ変換 (2.1) を適用してみる。そのための準備として、微分 $\partial/\partial t, \partial/\partial x$ がどのように変換されるかを示しておく必要がある。変換 (2.1) について微分の連鎖律を適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial t'(t, x)}{\partial t} \frac{\partial E'(t', x')}{\partial t'} + \frac{\partial x'(t, x)}{\partial t} \frac{\partial E'(t', x')}{\partial x'} = \frac{\partial E'}{\partial t'} - V \frac{\partial E'}{\partial x'}, \\ \frac{\partial E(t, x)}{\partial x} &= \frac{\partial t'(t, x)}{\partial x} \frac{\partial E'(t', x')}{\partial t'} + \frac{\partial x'(t, x)}{\partial x} \frac{\partial E'(t', x')}{\partial x'} = \frac{\partial E'}{\partial x'}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ただし、 \mathbf{V} の x 成分を単に V と書いたほか、簡単のために $E(t, x)$ はガリレイ変換 (2.1) で不変であり $E(t, x) = E'(t', x')$ となると仮定した⁹。この微分の変換式 (2.5) を使ってマクスウェル方程式 (2.3)

⁸正確には式 (2.3) はマクスウェル方程式を組み合わせて得られた波動方程式であるが、今回分の講義ノートでは簡単のためこの式自体を「マクスウェル方程式」と呼ぶことにする。

⁹実際には (2.1) のような変換をかけると電場・磁場の成分も修正を受けるため、もう少し詳細な解析が必要になる。ただし、結論自体は本ノートに書いたものとおおむね変わらない。

を書き換えると

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E(t, x) = \left[-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right] E'(t', x') \\
 &= -\frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t'} - (c+V) \frac{\partial}{\partial x'} \right] \left[\frac{\partial}{\partial t'} + (c-V) \frac{\partial}{\partial x'} \right] E'(t', x'). \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

この微分方程式の一般解は

$$E'(t', x') = E'_1((c+V)t' + x') + E'_2((c-V)t' - x'). \tag{2.7}$$

$V = 0$ の場合の解である式 (2.4) とほぼ同様に、 E_1 が x の負方向に速度 $c + V$ で伝搬する波、 E_2 が x の正方向に速度 $c - V$ で伝搬する波にそれぞれ対応する。

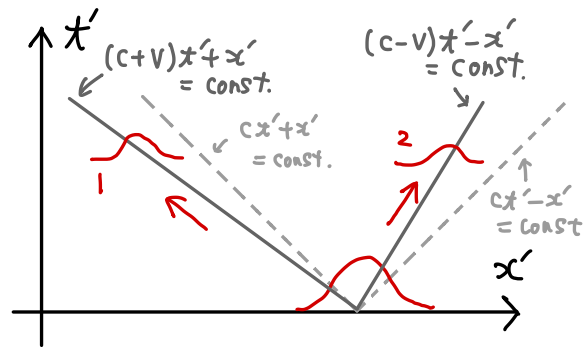


図 3: 波動方程式 (2.3) の一般解 (2.7)。式 (2.7) の E_1 が左方向、 E_2 が右方向に伝搬する波に対応する。 x 正の方向に速度 V で運動する慣性系に移ってから波動を見ている都合上、伝搬速度は x 負の方向に V だけずれて観測される。

ここまでの計算について、注目すべき点は以下の 2 点である。

- 2つの慣性系の時間・空間座標が式 (2.1) のガリレイ変換で与えられるとすると、光速はマクスウェル方程式から自然に得られる速度 c から慣性系の速度 V の分だけ変化する。光速が向きに依らずちょうど c になるような特別な慣性系が存在する ($V = 0$ の系に相当)、ということもできる。

相対論が導入される以前は、エーテルと呼ばれる媒質が宇宙を満たしており、光はエーテルの弾性波であると考えられた。この描像では、上述の $V = 0$ の慣性系はエーテルの静止系であると解釈される。空気の弾性波である音波について、速度 V の風がある場合を考える、という状況と対応している。

- マクスウェル方程式 (2.3) はガリレイ変換に対して不変でない。すなわち、変換後の式 (2.6) は、元の式 (2.3) について座標を $(t, x) \rightarrow (t', x')$ と単に置き換えた式とは一致しない。ガリレイ変換を適用することで光速が c から変化したのがこれが原因である。

後に詳しく説明するが、今後導入するローレンツ変換はマクスウェル方程式 (2.1) の形を不変に保つ座標変換で、そのために変換前後で光速が一定の値 c のまま保たれる、という特徴がある。

2.2 マイケルソン・モーリーの実験

2つの慣性系が互いにガリレイ変換で関係づけられるとした場合には、光速が慣性系の速度 V に応じて変化するということを前節で見た。このような観測者の速度 V に応じた光速の変化を検出する実験の一つが、以下で解説するマイケルソン・モーリーの実験である。

2.2.1 実験系の構成と期待される結果

マイケルソン・モーリーの実験のセットアップを図4に示す。レーザー光をハーフミラーで縦・横方向に分解し、 L だけ離れた鏡で反射させて再び重ね合わせ、2つの光線の干渉状態を観測する。

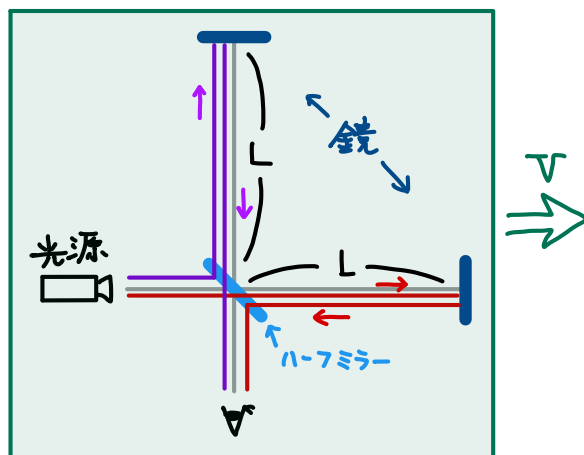


図4: マイケルソン・モーリーの実験のセットアップ。レーザー光をハーフミラーで縦・横方向に分解し、 L だけ離れた鏡で反射させて再び重ね合わせ、2つの光線の干渉状態を観測する。

この実験を光速が一定値 c となる慣性系（以下、この系のことを「静止系」と呼ぶことにする）で行ったとすると、縦方向・横方向の光路長は全く同じとなり、観測者は同位相で強め合った光を観測することになる。一方、実験系全体を速度 V で横方向に運動させた場合、もし運動系では光速が変化したように見えるのであれば、光の干渉状態も変化するはずである。この点について以下で解析してみよう。

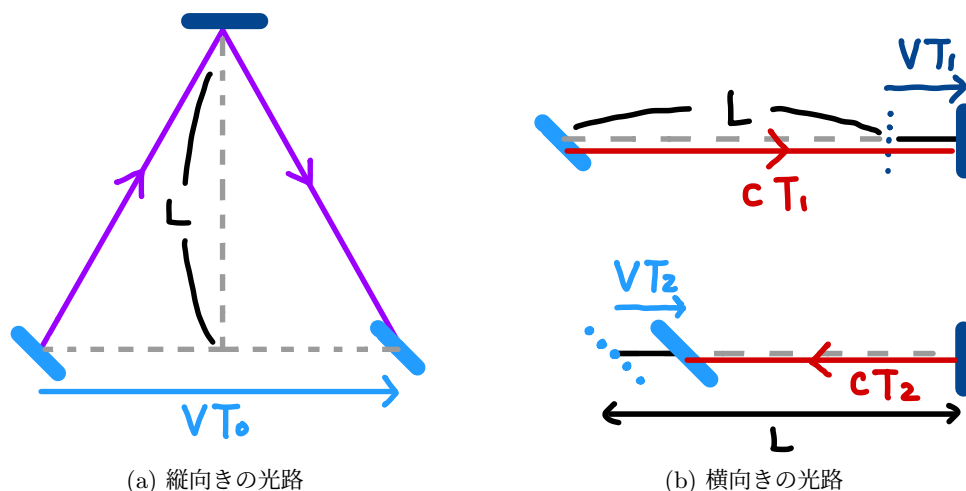


図5: マイケルソン・モーリーの実験で、実験系を速度 V で横方向に動かした場合の光路を、静止した観測者の視点から描いた図。縦・横方向で異なる光路となる。

図4の実験系を右方向に速度 V で運動させた場合を考える。この時、縦方向・横方向の光路（ハーフミラーと鏡との間で往復する部分）を静止系から眺めると¹⁰、それぞれ図5a、図5bのようになる。このそれぞれについて、光が往復するために必要となる時間は以下ようになる。

¹⁰運動系に乗った観測者から見た光の経路と向きごとに変化する光速を用いて解析を行うことも可能で同じ結果が得られる。静止系から見て解析を行った方が若干簡単化する。

● 縦方向

ハーフミラーと鏡との間で光が縦方向に往復するのに要する時間を T_0 とする。実験系全体が速度 V で右向きに動いているため、光が往復する間にハーフミラーは VT_0 だけ右に移動する。そのため、光路長 l は

$$l = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{1}{2}VT_0\right)^2} \quad (2.8)$$

となる。静止系では光速がどの向きでも c となるので、この光路長は cT_0 に等しいはずである。この条件を使って T_0 を求めると

$$cT_0 = l = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{1}{2}VT_0\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad (c^2 - V^2)T_0^2 - 4L^2 = 0 \quad (2.9)$$

$$\therefore T_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \cdot \frac{2L}{c} \quad (2.10)$$

● 横方向

光が横方向の往路（ハーフミラー→鏡）を渡りきるのに要する時間を T_1 、復路（鏡→ハーフミラー）に要する時間を T_2 とする。光が移動している間に実験系に固定されている鏡も右向きに速度 V で移動するので、光路長もその分変化する。図 5b より、往路と復路それぞれについて

$$cT_1 = L + VT_1, \quad cT_2 = L - VT_2 \quad (2.11)$$

が成立する。従って、往復全体の所要時間 $T_1 + T_2$ は

$$T_1 = \frac{L}{c - V}, \quad T_2 = \frac{L}{c + V} \quad \Rightarrow \quad T_1 + T_2 = \frac{L}{c - V} + \frac{L}{c + V} = \frac{1}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{2L}{c} \quad (2.12)$$

速度 V で運動する系の観測者から見ると光速は右方向に $c - V$ 、左方向に $c + V$ となったように見えるが、往路・復路の所要時間 T_1, T_2 はそれらの速度で往路・復路の長さ L を割った値そのものになっている。

以上の結果を踏まえて、縦・横方向の所要時間の差 ΔT を求めると

$$\Delta T = T_1 + T_2 - T_0 = \frac{1}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{2L}{c} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \cdot \frac{2L}{c} = \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{2L}{c} \quad (2.13)$$

この時間差 ΔT の間に光が飛ぶ距離が実験に用いた光の波長 λ 程度になれば、図 4 の装置で重ねあわされた光の干渉状態に変化が現れる。今回の場合、速度 $V = 0$ の場合には縦・横方向に伝搬した光は互いに強め合うが、 V を増加させて $c\Delta T \sim \frac{1}{2}\lambda$ となれば逆に打ち消しあうようになる¹¹。そのような干渉光の強度変化が観測できれば、観測者の速度に応じた光速の変化が検出できたことになる。

¹¹実験系の速度 V が光速 c と比べて十分に小さい場合には、 $\sqrt{1 - \epsilon} \simeq 1 - \frac{1}{2}\epsilon$ を用いて

$$c\Delta T \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{V}{c}\right)^2 \cdot 2L = L \left(\frac{V}{c}\right)^2 .$$

これが λ 程度の大きさになれば干渉光の強度変化を検出できる。通常の実験では $\frac{V}{c} \ll 1$ となるが、装置のサイズ L を大きくし光の波長 λ を十分小さく設定して $\left(\frac{V}{c}\right)^2 \sim \frac{\lambda}{L}$ とできれば検出が可能となる。

2.2.2 実際の実験結果

マイケルソン・モーリーの実験は、観測者の速度を変えれば観測される光速も変化することを期待して行われた。しかし、予想に反してどのような設定でこの実験を行っても光速の変化が検出されることはなかった。

例えば、速度 V を変化させても、実験系の向きを速度 V の向きに対してずらしてから実験しても、実験結果に影響はなかった。また、異なる季節に同じ実験を行うことで、地球の公転速度を V として用いたうえでその向きを変えることが可能となる¹²。そのような寄与を考慮に入れた実験を行っても、干渉光の状態に変化は現れず光速の変化は検出できなかった。

2.2.3 実験結果の解釈

運動する観測者から見える光速についての実験事実は**観測者の運動状態に依らず光速は常に一定**というものだった。一方、異なる慣性系がガリレイ変換 (2.1) で関係づけられており、マクスウェル方程式 (2.3) もこの変換に従うと仮定すると、光速は慣性系の速度に応じて変化するという予言が得られる。この理論的予言は実験事実と合わないため、実験事実を説明するためには理論のいずれかの構成要素を修正する必要に迫られる。そのような理論の修正案としては、大まかには以下のようなものが当時考えられた。

● エーテルの引きずり効果

光速がどの方向についても一定値となる慣性系（今回の講義で単に「静止系」と呼んでいた系）は、宇宙を満たしている媒質であるエーテルの静止系である、と考えられていた。実験を行う慣性系がエーテルの静止系に対して運動している場合には光速もその分変化することになる。そのエーテルが実験系とほぼ同じ速さで運動していたと考えれば、前節の実験を行っても光速の変化は観測されないことになり、実験事実と整合的な理論が一応得られる。

例えば、エーテルが地球によって引きずられることによって、地表付近ではエーテルがほぼ静止している、とする仮説などが提案された。しかし、このような仮説を検証するための実験などがさらに行われたもののエーテルの存在は検出されなかったり、**光行差**と呼ばれる別の実験事実と合わないなどといった問題があり、この仮説は否定されるに至った。

● ローレンツ収縮

2.2.1 節の解析で光速のずれが検出されたのは、実験系の速度に対して縦・横方向の光の伝搬時間にずれが生じたためであった。ここで、運動状態によって装置全体のサイズが変化することがもしあれば、光の伝搬時間も変化して別の結論が得られると考えられる。

例えば、実験系を構成する**物体の長さ**が、**運動の方向に速度に応じて収縮**すると仮定してみよう。実験系の速度が V の時にその方向の長さ L が $\gamma(V)$ 分の 1 に短くなる ($L \rightarrow L/\gamma(V)$) とすると、式 (2.12) で行った横方向の光路についての所要時間 $T_1 + T_2$ は以下のように変化する：

$$T_1 + T_2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{2L/\gamma(V)}{c} . \quad (2.14)$$

これに対応して、縦・横方向の所要時間の差 (2.13) は

$$\Delta T = \frac{1}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{2L/\gamma(V)}{c} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \cdot \frac{2L}{c} = \frac{\frac{1}{\gamma(V)} - \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \cdot \frac{2L}{c} . \quad (2.15)$$

¹²地球の公転速度は秒速約 28 km である。光速との比は $\frac{V}{c} \sim 10^{-4}$ と小さい値になるが、それでも地上の様々な装置を用いて実現できる V/c や地球の自転速度に対応するそれよりは大きい。

従って、進行方向の長さが

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \geq 1 \quad (2.16)$$

の割合で短くなるとすれば、ちょうど $\Delta T = 0$ となり、光速のずれも速度 V に依らず検出されないことになる。

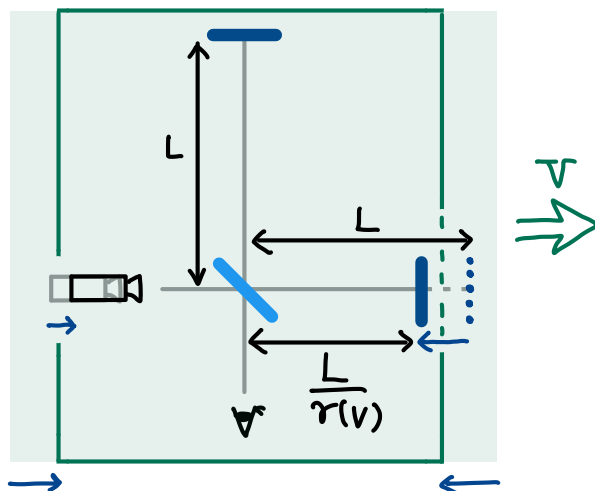


図 6: ローレンツ収縮したマイケルソン・モーリーの実験のセットアップ。実験系の運動方向の長さが $1/\gamma(V)$ 倍になっている。

この速度方向についての物体の長さの収縮はローレンツ収縮と呼ばれている。ローレンツによるもともとの提案では、エーテルの静止系に対して物体が運動している際に、その方向に物体の長さが収縮するとされた。そのような仮定を導入することで確かに実験事実は説明できるようになるものの、どのような物理的メカニズムによってそのような収縮が起こるのかを説明する必要が新たに生じてしまう、という問題があった。

● ガリレイ変換の修正

そもそも、今回導出した結果は、速度の異なる慣性系同士の間で時間・空間座標がガリレイ変換 (2.1) によって関係づけられる、と仮定したところから生じている。しかし、この仮定はあくまで我々が導入したものであり、それが本当に正しいかどうかは実験によって検証しなければならない¹³。

例えば、ガリレイ変換 (2.1) ではどの慣性系でも時間座標は共通 ($t = t'$) であるとされた。物理的には、静止していても運動していても時間の進み方は変化しない、という状況に対応する。日常的な感覚とはよく合うものの、例えば光速に非常に近い速度で運動している場合にもそうであるかどうかは、実際に実験的な検証をしてみなければわからない。従って、異なる慣性系同士がガリレイ変換とは異なる変換で関係づけられている、という可能性も残っており、理論的に再考する余地があることになる。

動機は異なるものの、アインシュタインが特殊相対性理論を構築する際にとった立場は最後に挙げたもの、すなわち異なる慣性系に移った際に時間・空間座標は、ガリレイ変換とは異なる変換に従っているのではないかと、いうものであった。次回の講義ではその詳細について解説する。

¹³もちろん、日常的な経験には合致するし、光速と比べて十分に遅い物体の運動については良い精度でガリレイ変換が成立するので、一定の妥当性がある仮定ではある。

第3回 特殊相対性理論の構築

前回の講義では以下の2点について紹介した。

- マクスウェル方程式がガリレイ変換に従うと仮定すると、光速は観測を行う系の速度 V に依存して変化する ($c \rightarrow c - V$)。
- 一方、光速は任意の速度の慣性系で常に一定であるという実験事実が得られた。

物体が進行方向に速度 V に応じてローレンツ収縮すると仮定すればこの矛盾は一応解消できるが、ではなぜそのような現象が起こるのかと問われると答えに窮してしまう。一方、上の議論でマクスウェル方程式がガリレイ変換に従うと仮定した点、特に静止系と運動系で時刻 t は共通であると仮定した点については、必ずしも実験事実に基づいて導入された仮定ではなく再考の余地がある。

上記の点について慎重に考えることで特殊相対性理論を構築することができる。今回と次回の講義で、この理論の中核をなすローレンツ変換の導出を行う。

3.1 特殊相対性原理 / 光速度不変の原理

やや天下りの的ではあるが、まず特殊相対性理論を構築する元となる仮定（原理）を導入する。以下の2点である。

- **特殊相対性原理**：どの慣性系においても、物理法則は同一である。物理理論を記述する方程式はどの慣性系でも同じ形で与えられ、同じ実験を異なる慣性系で行うと同一の結果が得られる¹⁴。
- **光速度一定の原理**：どの慣性系においても、光速度はどの方向にも一定値 c で与えられる。

前者の**特殊相対性原理**にマクスウェル理論も従うと仮定すれば、どの慣性系で光速度を導出しても常に一定値 $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ となり、後者の**光速度一定の原理**は自動的に満たされる。従って、後者は前者から導かれる帰結である。

上記のような仮定を導入すれば、少なくとも光速度一定という実験事実は説明できる。また、どの慣性系も物理的に完全に等価となるため、ガリレイ変換を考えていた時に出てきた特別な慣性系（光速がどの方向にも c となるような「静止系」）などというものはそもそも考えなくてよくなる。

3.1.1 アインシュタインの発想

上述の原理さえ導入すれば特殊相対性理論は構築できる。その前に、やや余談にはなるがアインシュタイン自身がどのようにして特殊相対性原理を考えついたのかについて簡単に紹介する。

- 16歳の時に「電磁波をその速さで追いかけて観測すると何が起こるのか？」という疑問を思いついたらしい¹⁵。図7参照。マクスウェル方程式によれば、電磁波は $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ で伝搬すると導出される。ガリレイ変換が正しいと信じると、電磁波と同じ速度で飛びながら電磁波を観測すれば、速度ゼロで動かない電磁波が見えるはずである。しかし、そのような「動かない電磁波」はマクスウェル方程式からは出てこない¹⁶、実験的にも知られておらず、何かがおかしい。

¹⁴もちろん、速度の異なる慣性系に移ったことによる物理量の値の変化などは生じる。それでも物理法則、すなわち物理量が従っている方程式には変化がないという意味である。

¹⁵アインシュタインが1946年に書いた自伝でそのようなエピソードが紹介されているとのこと。

参考：https://sites.pitt.edu/~jdnorton/teaching/HPS.0410/chapters/origins_pathway/index.html
https://sites.pitt.edu/~jdnorton/papers/Einstein_Discover.pdf

ちなみに、一般書などではこの話を単純化して『光の速さで飛んだ時に自分の顔を鏡で見たら何が映るか？』という問題をアインシュタインが考えた」と紹介されている場合もある。

¹⁶マクスウェル方程式にガリレイ変換をかけると出てくる、元々のマクスウェル方程式とは異なる方程式から出てくるもの。ただし、そのような方程式は実験結果からは得られない。

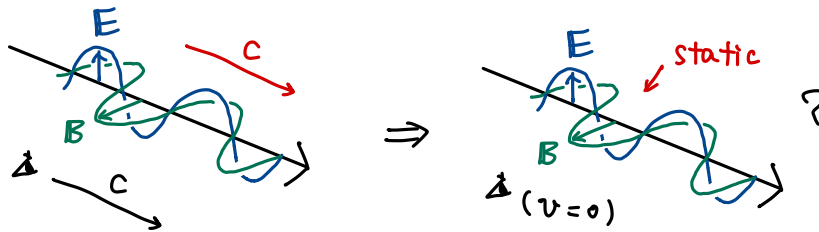


図 7: アインシュタインが 16 歳の時に考えたという思考実験。電磁波をその速度（光速）で追いかけて観測すると何が見えるのか？もし、マクスウェル方程式がガリレイ変換に従うならば、電磁波を光速で追いかけて見れば速度ゼロで静止した電磁波が見えるはずである。しかし、そのような電磁場の配位は理論的にも実験的にも知られていない。

● 電磁気学の双対性：

アインシュタインが特殊相対性理論を発表したのは 1905 年、26 歳の時だった。その発表を行った論文の冒頭には、おおよそ以下のような考察が書いてある。

まず、図 8a のように磁石を静置しておいて、磁力線を横切るように電線のある速度 V で動かしてみる。この時、電線内の電荷 q にかかるローレンツ力 $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ によって電線には $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ 方向の電流 I が流れる。

次に、図 8b のように電線を静置しておいて、磁石の方を先ほどとは逆向きに速度 V で動かしてみる。すると、電磁誘導の法則 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ に従って電線には電流が流れる。この電流の大きさは、先ほどの図 8a の実験をやった時に得られた電流 I と全く同じとなる。

この両者を比較すると、物理現象の見かけの姿（電流がローレンツ力によって生じるか、または電磁誘導によって生じるか）は異なる一方、最終的に得られる物理的な結果（電流 I の向きと大きさ）は同じである。また、図 8a と図 8b のセットアップのそれぞれでまったく同じ形のマクスウェル方程式とローレンツ力の式¹⁷：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (3.2)$$

を用いることにより、電流 I の値を正しく計算することもできた。これらの事実より、どの速度一定の系も物理的に完全に対等であり¹⁸、特別な「静止系」などもとより存在しないのではないか、と推論できる。

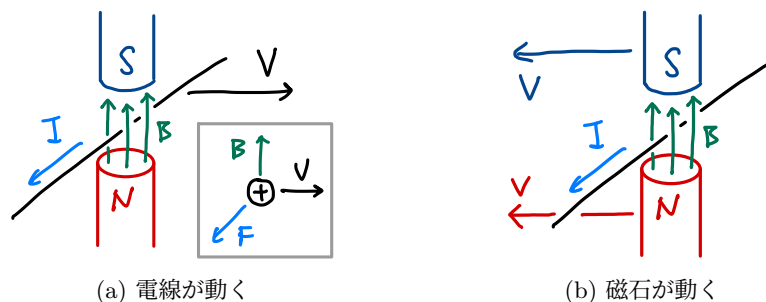


図 8: アインシュタインの特殊相対性理論の論文冒頭で紹介されている思考実験。

¹⁷まったく同じ形の式で、ただし座標だけ静止系の座標 (t, \mathbf{x}) を運動系の座標 (t', \mathbf{x}') に置き換えたもの、の意。

¹⁸どの速度一定の系でも同じ物理法則が成り立ち、物理実験によって系自体の速度を検出することはできない、の意。

3.2 光速度一定の原理の帰結

光速度一定の原理はどの速度の慣性系から見ても光の速度は一定であるというものだが、これは日常に見られる物体の運動やその速度の振る舞いの性質と根本的に異なる。そのため、この原理が正しいと認めると日常的な直感に反する様々な現象が起こることが予言される。そのような現象の例として、今回は**動く時計の遅れ**、および**時刻の同時性の変化**について紹介する。

以下の議論で用いるのは、**長さを測る物差しと時間を測る時計、および光と鏡**である。また、ある慣性系 O とその座標 (t, x, y, z) 、 O 系から見て x 正の方向に速度 V で運動している慣性系 O' とその座標 (t', x', y', z') を取って考える。簡単のため、以下では O 系を「**静止系**」、 O' 系を「**運動系**」と呼ぶ場合もある。

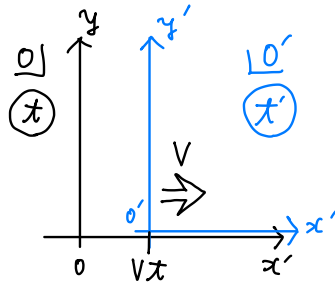


図 9: 慣性系 O と、それに対して x 正の方向に速度 V で運動する慣性系 O' 。

3.2.1 動く時計の遅れ

運動系 O' の時計を静止系 O から見ると何が起こるかについて調べるために、 O' 系の y' 軸方向に設置された光源と鏡の系を考える (図 10 参照)。また、この光源と鏡の系を時計と連動させておき、光が 1 往復するごとに時計が一刻み分進むようにしておく。以下ではこの系のことを**光時計**と呼ぶことにする。

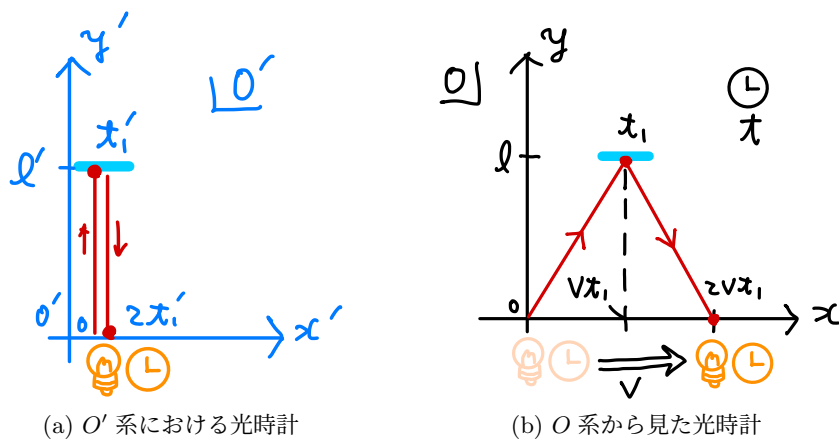


図 10: O' 系で y' 軸向きに設置された光時計と、それを O 系から見たもの。 O 系からは光時計が速度 V で x 軸の向きに運動しているように見える。

この光時計を、 O' 系に乗った観測者から見た場合と、静止系 O から見た場合とどうなるかを比較してみよう。

- **運動系 O' :** 光源から光が $t' = 0$ に発射され、 $y' = l'$ に置かれた鏡で時刻 $t' = t'_1$ に反射し、時

刻 t'_2 に帰ってくるとする (図 10a 参照)。光速は向きに依らず一定 ($= c$) なので

$$t'_1 = \frac{1}{2}t'_2 = \frac{\ell'}{c} \quad \Leftrightarrow \quad ct'_1 = \frac{1}{2}t'_2 = \ell'. \quad (3.3)$$

- **静止系 O** : 運動系 O' の光時計を静止系 O から見ると、 x 正の方向に速度 V で運動しているように見える。そのため、光時計内部を飛ぶ光は、図 10b のように斜め方向に飛んで鏡で反射し、再び $y = 0$ に帰ってくることになる。ただし、鏡の位置は $y = \ell$ にあるものとする。

経路の対称性から、前半 (光が放射されてから反射するまで) と後半 (反射時点から光が $y = 0$ に帰着するまで) の所要時間は一緒である。その (半経路分の) 所要時間を $t = t_1$ とする。今回の場合、光が斜めに伝搬している都合上光路長も伸びているため、光の伝搬に必要な所要時間 t_1 も若干伸びることになる:

$$t_1 = \frac{\sqrt{\ell^2 + (Vt_1)^2}}{c} \quad \therefore \quad t_1 = \frac{\ell}{\sqrt{c^2 - V^2}} \quad \Leftrightarrow \quad ct_1 = \frac{\ell}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma\ell. \quad (3.4)$$

ただし、今後繰り返し使うことになる記号 β, γ を以下の通り定義した。

$$\beta(V) \equiv \frac{V}{c}, \quad \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2(V)}} \quad (|\beta| \leq 1, \gamma \geq 1). \quad (3.5)$$

さて、ここで光時計の y 方向の長さは静止系 O でも運動系 O' でも同じ ($\ell = \ell'$) と仮定しよう。この仮定が実際に正しいことは次回の講義で示す。この仮定の下、光時計が一刻み分進むまでにかかった時間 t'_1 (式 (3.3)) と、同じ一往復分の時間を静止系 O で計ったもの t_1 (式 (3.4)) を比較すると

$$t_1 = \gamma \frac{\ell}{c} = \gamma t'_1 \geq t'_1 = \frac{\ell}{c}. \quad (3.6)$$

すなわち、静止した (運動系 O' に乗って測った) 光時計の一刻み分の時間 $t'_1 = \ell/c$ と比べて、速度 V で運動している光時計の一刻み分の時間を静止系 O で計った t_1 の方が $\gamma(V) \geq 1$ 倍に長くなっている。つまり、**速度 V で運動する時計は $\gamma(V)$ 倍ゆっくり進むように見える**ことが示された。

3.2.2 時刻の同時性

特殊相対性理論を導入する以前は、すべての慣性系で共通の絶対時間が存在して、例えば二つの事象が**同時**に起こったかどうかはその絶対時間を使って判定することができた。一方、光速度一定の原理を仮定すると、そのような**絶対時間のようなものは存在せず**、2つの事象が**同時かどうかは観測者の速度に依存する**、という相対論以前の常識には反した結論が得られる。以下で順を追って説明する。

- **静止系 O における時刻の同期**

静止系 O における「時間座標 t 」とはそもそも何なのかについて改めて考えてみよう。そのために、静止系の全ての点 (x, y, z) に時計が置かれており、その読みが $t(x, y, z)$ であるという状況を考える。それらの全ての時計を原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ に置いた時計と同じ時刻にセット (この操作を**時刻の同期**と呼ぶ) できれば、その時刻 t が物理現象を記述するのに使える時間座標としての役割を果たしてくれる。すなわち、

$$\text{空間全体で同期された時計が示す時刻} = \text{時間座標}$$

であると考えればよい。

ここで、空間的に離れた点に置かれた時計を同期するにはどうしたらよいかを考えてみる。

- 原点に置かれた時計を別の点まで運んで時刻合わせを行うとよい、と思うかもしれない。しかし、運び方次第で時計の時刻は変化してしまう（3.2.1節で示した通り、動く時計はその速度に応じて進みが遅くなる）ため、この方法で離れた時計同士を同期することはできない。
- 電波時計やインターネット時計のように、ある基準の時計から時刻の信号を送って、それに各地点の時計を合わせるということも考えられる。この方法だと、信号の伝搬に時間がかかるために遠方の時計ほど遅れてしまう。しかし、その遅れさえ補正できれば正しく時間合わせをできそうである。

以下では、後者の方法を改良したもの、すなわち互いに離れた時計同士の間で信号（光）をやり取りして時刻合わせを行う方法について以下で考えてみることにする。

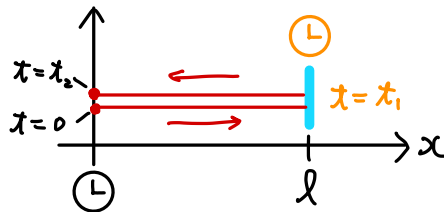


図 11: 原点と $x = l$ に置かれた時計の同期。原点の時計の時刻 $t = 0$ に光を送り、 $x = l$ に置かれた鏡で光を反射させて、それが原点の時計の時刻 $t = t_2$ に帰ってきたとする。また、反射の瞬間の時刻を鏡の地点 $x = l$ に置いた時計で計ったものが $t = t_1$ だったとする。

図 11 のように、原点に時計と光源を、距離 $x = l$ に別の時計と鏡を設置する。3.2.1 節で考えた光時計を進行方向向きに設置したものである。原点の時計で時刻 $t = 0$ に光を発し、 $x = l$ の鏡で反射させたものが時刻 $t = t_2$ に帰ってきたとする。一方、反射が起こった瞬間を位置 $x = l$ に置いた時計で計ったものが $t = t_1$ だったとする。光が往路・復路を通過しきるのに必要な時間は同じである。したがって、 $x = l$ に置いた時計で計った時刻 $t = t_1$ が

$$t_1 = \frac{1}{2}t_2 \quad (3.7)$$

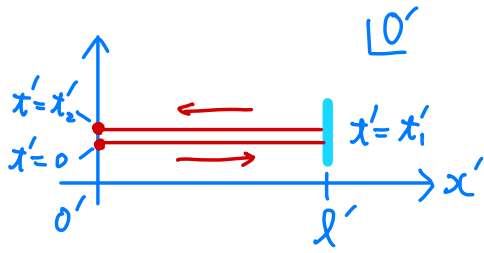
を満たしていれば、原点と位置 $x = l$ に置いた時計が同期されていると言えそうである。また、光の移動時間は経路長を光速で割った l/c で与えられるから $t_1 = \frac{l}{c}$ となる。

● 運動系 O' における時刻の同期

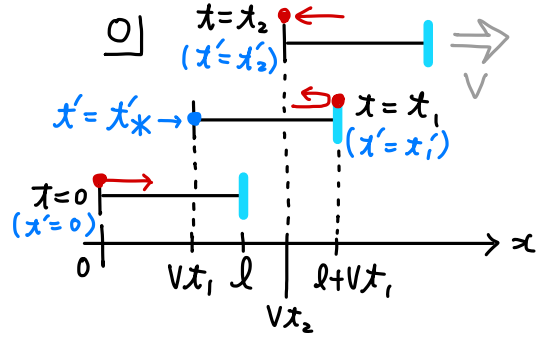
では次に、運動系 O' における時刻の同期について考える。ただし、鏡の位置は O' 系の座標で $x' = l'$ の位置にあるとする（図 12a 参照）。運動系 O' に乗った観測者から見ると、時刻の同期の手続きは先ほどと全く同じであり

$$t'_1 = \frac{1}{2}t'_2 = \frac{l'}{c} \quad \Leftrightarrow \quad ct'_1 = c(t'_2 - t'_1) = l' . \quad (3.8)$$

では、この O' 系における時刻の同期の様子を、静止系 O 系から見てみよう（図 12b 参照）。ただし、初期時刻 $t = 0$ で O' 系の原点は O 系の原点と一致しており、また鏡の位置は $x = l$ にあり、 O' 系全体が x 正の方向に速度 V で移動しているとする。単純に $x = l'$ としていないのは、運動系の経路の長さ l' が静止系では違った長さに見える場合を考慮に入れておくためである。



(a) 運動系 O' における時刻の同期



(b) 静止系 O から見た、 O' 系の時刻の同期

図 12: 運動系 O' における時刻の同期と、それを静止系 O から見たもの。

時刻 $t = 0$ に光が鏡に向けて放射されたのち、光は以下のように伝搬することになる。

- $t = t_1$: 鏡に光が反射する。鏡は速度 V で右に移動しているので、反射が起こる時刻 $t = t_1$ で鏡は $x = l + Vt_1$ の位置にあるため

$$t_1 = \frac{l + Vt_1}{c} \quad \therefore \quad t_1 = \frac{l}{c - V} \quad \Leftrightarrow \quad ct_1 = \frac{l}{1 - \beta} . \quad (3.9)$$

- $t = t_2$: 運動系 O' の原点に光が帰着する。図 12b からして、反射が起きてから O' 系の原点に着くまでに光が飛ぶべき距離は $l + Vt_1 - Vt_2$ 。これを光速 c で割ったものが光の伝搬時間 $t_2 - t_1$ となるので

$$t_2 - t_1 = \frac{l + Vt_1 - Vt_2}{c}$$

$$\therefore \quad t_2 - t_1 = \frac{l}{c + V} \quad \Leftrightarrow \quad c(t_2 - t_1) = \frac{l}{1 + \beta} , \quad ct_2 = \frac{l}{1 + \beta} + \frac{l}{1 - \beta} = \frac{2l}{1 - \beta^2} . \quad (3.10)$$

● 運動する系についての同時性のずれ

ここまでで得られた結果を改めて眺めてみると、何か妙なことが起こっていることに気づく。

- 静止系 O' の時計で計ると、光の発射→反射→光の帰着 は等間隔で起こっていた (式 (3.8) 参照)。
- 一方、これを運動系 O から見たときには、前半 (光の発射→反射) と後半 (反射→光の帰着) の所要時間 (3.9), (3.10) が互いに異なっている ($t_2 - t_1 \neq t_1$)。

この時点で、少なくとも運動系 O' の時計と静止系 O の時計には何らかのずれがあることが分かる。それをより具体的に見るため、光時計の左端に固定された時計が、図 12b における反射の瞬間に指し示している時刻 $t' = t'_*$ を求めてみよう。この時計の終時刻は $t' = t'_2$ で、一方 O 系で見た反射の瞬間と終時刻はそれぞれ $t = t_1, t_2$ だったのだから

$$t'_* = t'_2 \times \frac{t_1}{t_2} = 2t'_1 \times \frac{\frac{l}{1 - \beta}}{\frac{2l}{1 - \beta^2}} = (1 + \beta) t'_1 > t'_1 . \quad (3.11)$$

なお、 t'_1 は光時計の右端に固定された時計が反射の瞬間に指している時刻であり、左端の時計の方が $\beta t'_1$ だけ時刻が進んでいることになる。

したがって、運動系 O' では全空間にわたって時計が同期されていても、静止系 O から見ると進行方向にある時計ほど遅れているように見えることが分かった。そのため、 O' 系では同時に

起こった現象が O 系から見ると同時には起こらないように見えるという意味で、**同時性はどの慣性系から見るかによって変わる**と結論付けられる。。これも特殊相対論ならではの特徴的な現象の一つである。

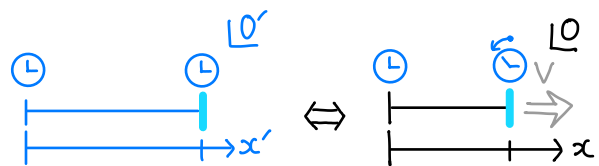


図 13: 運動系 O' に乗った状態で全空間にわたって時計を同期しても、静止系 O から見ると進行方向にある時計ほど遅れているように見える。特に、 O' 系では同時に起こった現象が、 O 系から見ると同時には起こらないように見える。

次回の講義では、以上で見た時間・空間座標の変換をひとまとめにしたものとして得られる**ローレンツ変換**の導出を行う。

第4回 特殊相対性理論の構築（続き）

前回は下記について解説した。

- (特殊相対性原理 \Rightarrow) 光速度一定の原理
- 光速度一定の原理の帰結
 - 動く時計の遅れ
 - 同時性のずれ（運動系の「同時」 \neq 静止系の「同時」）

以上を示す際に、鏡と光線のできた**光時計**や、それを用いた**時刻の同期**の手続きを用いた。

上記の結果から読み取れるのは、どうやら**静止系と運動系の「時間」が異なるらしい**、という点である。一方、特殊相対論以前に考えられていた座標変換である**ガリレイ変換**：

$$t' = t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t \quad (4.1)$$

では静止系・運動系の時間座標が同じ ($t = t'$) なので、上記のような性質は出てこない。そのため、**特殊相対論ではガリレイ変換が修正されることになる**。

今回の講義では、運動系と静止系との間で時間・空間座標がどのように変換されるかを表す**ローレンツ変換**を構築する。前回導出した時間の遅れや同時性のずれ（と、まだ説明していない**ローレンツ収縮**）をまとめて表したものに相当する。手順としては下記のとおり。

- 4.1 節： 相対論における時刻の同期を復習
- 4.2 節： 運動系における時刻の同期を静止系から見るとどう見えるかを整理
- 4.3 節： ローレンツ変換の構築を、前節で見た静止系と運動系の座標間の関係に基づいて行う。

導出のために必要となる計算の一部は前回以前の講義で行ったものと同様だが、復習も兼ねて今回改めて解説する。

表記：

今回の講義ノートでは、時間・空間の座標を表す記号として

$$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (4.2)$$

を用いる。 t に光速 c をかけたものをあえて使うのは、今回出てくる計算式などの表記がより単純化されるためである¹⁹。また、前回導入した運動系の速度 V の関数²⁰

$$\beta(V) \equiv \frac{V}{c}, \quad \gamma(V) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.3)$$

を今回も使う。速度 V を $V = \beta c$ と書き換える、といった計算を頻繁に行うので注意。

4.1 時刻の同期

まず、特殊相対論では異なる2点間の**時刻の同期**を行う際には図 14a のように光の信号をやりとりすることで行うのであった。 $x = 0$ と $x = \ell$ のそれぞれに別個の時計が置いてあり、それらについて同期（時刻合わせ）を行うことにする。そのために、以下のように光のやり取りと時刻の記録を行う。

¹⁹時間座標 t の次元は時間である一方、 ct の次元は長さなので空間座標 x, y, z と対等に取り扱うことができる、という事情もある。より単純に $c = 1$ となるような**自然単位系**を取って考えることも多い。

²⁰本当は速度 \mathbf{V} の向きも考慮してベクトル量 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{V}/c$ を定義して用いるべきだが、今回は簡単のため \mathbf{V} と x 軸が同じ向きの場合だけを考えるので式 (4.3) のようにしておく。

- $(ct, x) = (0, 0)$: $x = 0$ にある時計で $t = 0$ の時に、 $x = 0$ から $x = \ell$ に向けて光を飛ばす。
- $(ct, x) = (ct_1, \ell)$: 光が $x = \ell$ に届いたとき、 $x = \ell$ にある時計で $t = t_1$ だったとする。
- $(ct, x) = (ct_2, 0)$: 光を $x = \ell$ から反射させて $x = 0$ に到達した時刻が、 $x = 0$ の時計で $t = t_2$ だったとする。

この時、静止している2点間を光が右向きに飛ぶ時と左向きに飛ぶ時とで伝搬時間は同じであることから、もし

$$t_1 = \frac{1}{2}t_2 \quad (4.4)$$

となるように時計の時刻が調整されていれば、 $x = 0$ と $x = \ell$ との間で時計の同期ができていことになる。今行った時刻の同期を縦軸を ct 、横軸を x とするグラフ上に書くと図 14b のようになる²¹。このようなグラフのことを時空図と呼ぶ。

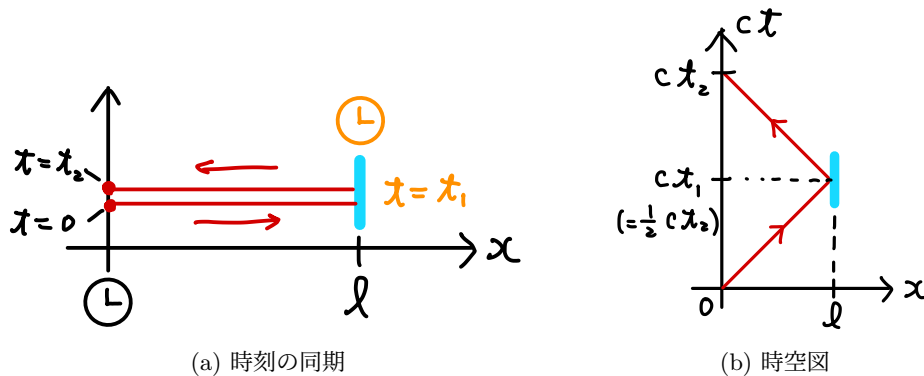


図 14: 原点と $x = \ell$ に置かれた時計の同期。原点の時計で時刻 $t = 0$ に光が原点から出発し、 $x = \ell$ の時計で $t = t_1$ に鏡で反射して、原点の時計で時刻 $t = t_2$ に帰ってくる。 $t_1 = \frac{1}{2}t_2$ ならば原点 $x = 0$ と位置 $x = \ell$ との間で時刻が同期できている、とする。図 14b は図 14a に対応する時空図。

4.2 運動系における時刻の同期

ある慣性系 O (以下では「静止系」と呼ぶ) と、それに対して x 軸の方向に速度 V の速さで移動している慣性系 O' (「運動系」と呼ぶ) を考える。運動系 O' における時刻の同期を行った際に、静止系 O からはどのように見えるかを整理しておく。時刻の同期を O' 系の速度の向きとその垂直方向に行う場合で大きく性質が異なるので、以下では別個に解析する。

4.2.1 進行方向の同期

運動系 O' での時刻の同期：

まず、 O' 系で原点と位置 $x' = \ell'$ の位置との間で時刻の同期を行う (図 15a 参照)。前節の要領に従って、時刻 $t' = 0$ に原点から光を放射し、 $x' = \ell'$ に置かれた鏡で $t' = t'_1$ に反射して、原点に時刻 $t' = t'_2$ に帰ってくるとする。時刻の同期ができていれば $t'_1 = \frac{1}{2}t'_2$ となること、および O' 系でも光速は c なので $ct'_1 = \ell'$ となることから

$$ct'_1 = \frac{1}{2}ct'_2 = \ell' \quad (4.5)$$

²¹ 縦軸として単に t ではなく ct を取ることで、光の経路 $x = \pm ct + x_0$ がちょうど斜め 45° の直線になっている。

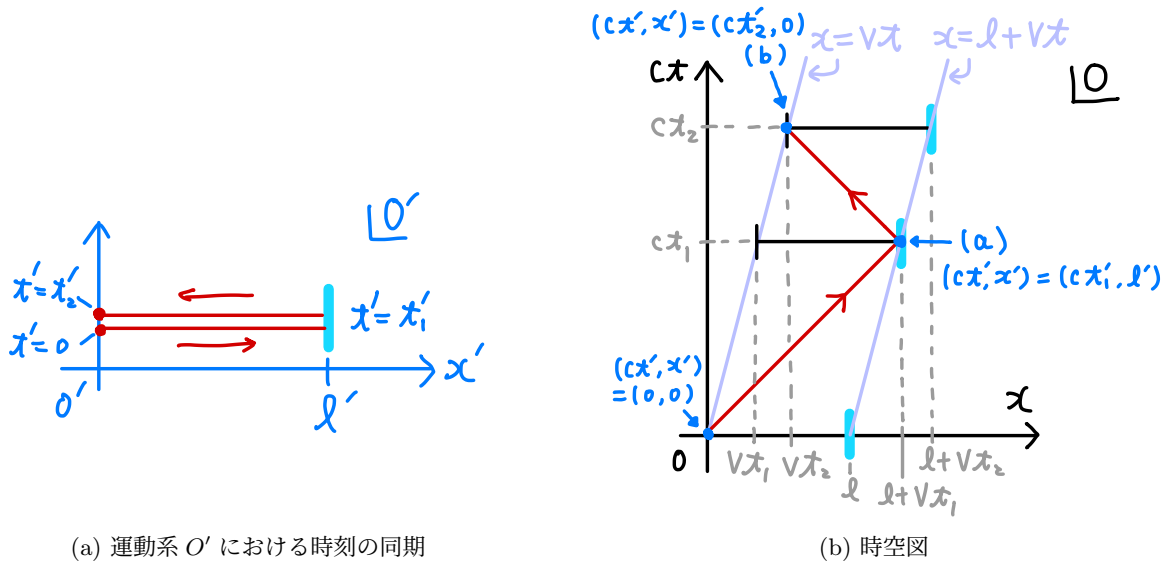


図 15: 運動系 O' における x' 方向の時刻の同期と、それを静止系 O から見た場合についての時空図。

となる。

静止系 O から見た時刻の同期：

次に、静止系 O からは上記の O' 系における時刻の同期がどのように見えるかを考える。以下のように設定する (図 15b 参照)。

- 運動系 O' (に置かれた実験装置) は、静止系 O に対して x 方向に速度 V で運動している。
- 初期時刻 ($t = 0, t' = 0$) で O 系と O' 系の座標軸は一致している。
- O' 系の $x' = l'$ に対応する地点は、 O 系では初期時刻 $t = 0$ に $x = l$ の位置とする。
 $\Rightarrow O'$ 系の原点と $x' = l$ の位置は、 O 系でそれぞれ経路 $x = Vt, x = l + Vt$ をたどる。

最後の項目で単純に $x = l'$ としていないのは、静止している物体の長さが l' だった場合でも、それが運動している場合には異なる長さ l に見える可能性があるためである。実際、 $V \neq 0$ ならば $l \neq l'$ となる (動く物体のローレンツ収縮) ことが後ほど確認できる。

O' 系全体が動いているため、静止系 O から見た光の経路は図 15b のように非対称な形状となる。この経路について、光の発射・反射・帰着が起こる座標位置を以下で整理してみよう。なお、今回の光の経路は x 方向に限定されているため、以下では座標のうち (ct, x) だけについて考える。

- **光の出発：** 光が発射される瞬間 $t' = 0$ に O 系と O' 系の原点はそろっているので

$$O: (ct, x) = (0, 0), \quad O': (ct', x') = (0, 0). \quad (4.6)$$

- **反射** (図 15b の点 (a))

O 系で光の反射が起こる時刻が $t = t_1$ だったとする。この時、鏡 (光の反射点) の O 系と O' 系それぞれにおける時間・空間座標は

$$O: (ct, x) = (ct_1, l + Vt_1), \quad O': (ct', x') = (ct'_1, l'). \quad (4.7)$$

ここで、 O 系における光の往路について $ct_1 = l + Vt_1 (= l + \beta ct_1)$ となるから

$$ct_1 = \frac{l}{1 - \beta}. \quad (4.8)$$

これと式 (4.5) を使って式 (4.7) を整理すると

$$O: (ct, x) = \left(\frac{l}{1 - \beta}, \frac{l}{1 - \beta} \right), \quad O': (ct', x') = (l', l'). \quad (4.9)$$

● 帰着 (図 15b の点 (b))

光が O' 系の原点に帰着する時刻が、 O 系では $t = t_2$ だったとする。この点の O, O' 両系における座標は

$$O: (ct, x) = (ct_2, Vt_2), \quad O': (ct', x') = (ct'_2, 0). \quad (4.10)$$

ここで、 O 系における光の復路について $c(t_2 - t_1) = \ell - V(t_2 - t_1)$ となるから

$$c(t_2 - t_1) = \frac{\ell}{1 + \beta} \Rightarrow ct_2 = \frac{\ell}{1 + \beta} + ct_1 = \frac{\ell}{1 + \beta} + \frac{\ell}{1 - \beta} = \frac{2\ell}{1 - \beta^2}. \quad (4.11)$$

これと式 (4.5) を使って式 (4.10) を整理すると

$$O: (ct, x) = \left(\frac{2\ell}{1 - \beta^2}, \frac{2\ell\beta}{1 - \beta^2} \right), \quad O': (ct', x') = (2\ell', 0). \quad (4.12)$$

4.2.2 垂直方向の同期

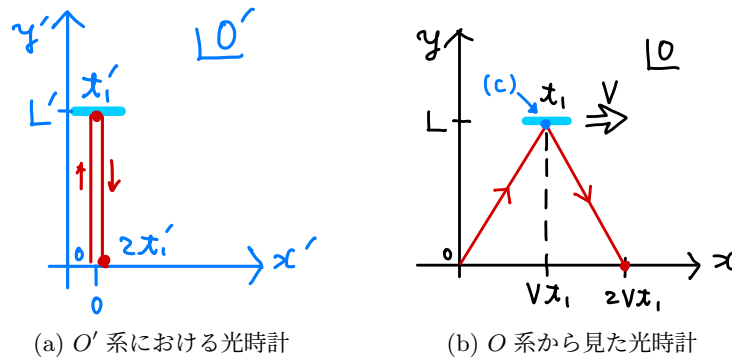


図 16: 運動系 O' における x' 方向の時刻の同期と、それを静止系 O から見た場合の図。

運動系 O' での時刻の同期:

今度は、 O' 系で原点と位置 $y' = L'$ の位置との間で時刻の同期を行う (図 16a 参照)。時刻 $t' = 0$ に原点から光を飛ばし、 $t' = t'_1$ に反射して $t' = t'_2$ に原点に帰ってくるとすると、前節と同様に

$$ct'_1 = \frac{1}{2}ct'_2 = L'. \quad (4.13)$$

なお、この光の経路については常に $x' = 0$ である。

静止系 O から見た時刻の同期:

静止系 O では、上記の O' 系における光の経路は図 16b のようになる。鏡は初期時刻 $t = 0$ のとき $(x, y) = (0, L)$ の位置にあり、速度 V で x 軸方向に移動しているように見える。時刻 $t = t_1$ に反射が起こったとすると (図 16b の点 (c))、光の反射が起こるまでの経路について

$$ct_1 = \sqrt{L^2 + (Vt_1)^2} = \sqrt{L^2 + (\beta ct_1)^2} \quad \therefore ct_1 = \frac{L}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma L. \quad (4.14)$$

また、この瞬間に鏡は $x = Vt_1 = \beta ct_1$ の位置にある。従って、光の反射点 (c) の O, O' 両系における時間・空間座標は

$$\begin{aligned} O: (ct, x, y) &= (ct_1, Vt_1, L) = (\gamma L, \gamma\beta L, L), \\ O': (ct', x', y') &= (ct'_1, 0, L') = (L', 0, L'). \end{aligned} \quad (4.15)$$

以上で導出した、図 15, 16 の点 (a), (b), (c) の時間・空間座標をまとめると表 1 のようになる。

表 1: 図 15, 16 の点 (a), (b), (c) の O, O' 各系における時間・空間座標。 z は常にゼロである。

	$O : (ct, x, y)$	$O' : (ct', x', y')$
点 (a)	$\left(\frac{\ell}{1-\beta}, \frac{\ell}{1-\beta}, 0\right)$	$(\ell', \ell', 0)$
点 (b)	$\left(\frac{2\ell}{1-\beta^2}, \frac{2\ell\beta}{1-\beta^2}, 0\right)$	$(2\ell', 0, 0)$
点 (c)	$(\gamma L, \gamma\beta L, L)$	$(L', 0, L')$

4.3 ローレンツ変換の構築

前節では、時刻の同期を行う際の光の経路上の点 (a), (b), (c) 静止系 O と運動系 O' の時間・空間座標がどのように対応づいているかを調べた。その結果をまとめて、 O, O' 両系の座標がどのように対応づいているかを与えるローレンツ変換を本節で求める。

4.3.1 変換の形を指定

まず、 O 系の座標 (ct, x, y, z) と O' 系の座標 (ct', x', y', z') の対応関係は一般に

$$ct' = ct'(ct, x, y, z), \quad x' = x'(ct, x, y, z), \quad y' = \dots, \quad z' = \dots, \quad (4.16)$$

と書き表せる。関数 $ct'(ct, x, y, z), x'(ct, x, y, z), \dots$ は、少なくとも表 1 の対応関係がすべて満たされるようなものになっていなければならない。

ここで、前節で行った操作は、本質的には O, O' 両系で物体とその運動について長さや時間を計測して比較するというものであった。これについて

- **線形性**：実験に用いる物体の長さを O' 系で n 倍にすれば、その長さを静止系 O で計った際にも結果は n 倍になる。光が飛ぶ所要時間についても同様。
- **一様性**：時間・空間は一様で特別な点などないので、実験をどの時刻・位置で行ったとしても同じ結果が得られるはず。

厳密な証明は省くが、上記 2 点を満たすような座標変換は**新・旧座標の一次関数**となることが示せる：

$$\begin{aligned} ct' &= \Lambda_{00}ct + \Lambda_{01}x + \Lambda_{02}y + \Lambda_{03}z \\ x' &= \Lambda_{10}ct + \Lambda_{11}x + \Lambda_{12}y + \Lambda_{13}z \\ y' &= \Lambda_{20}ct + \Lambda_{21}x + \Lambda_{22}y + \Lambda_{23}z \\ z' &= \Lambda_{30}ct + \Lambda_{31}x + \Lambda_{32}y + \Lambda_{33}z \end{aligned} \quad (4.17)$$

係数 Λ_{ij} は速度 c, V の関数である。なお、右辺に定数項を入れていないのは、 O, O' 両系の原点をそろえて

$$O : (ct, x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad O' : (ct', x', y', z') = (0, 0, 0, 0) \quad (4.18)$$

となるようにしたため。

式 (4.17) が一次式であることの説明

例えば、式 (4.17) の右辺に 2 次関数が現れるような場合を考えよう。単純のため

$$x' = \alpha x^2 \quad (4.19)$$

という対応関係となったとする。ここで、 O 系 E で長さ ℓ の棒の左端を $x = x_0$ に置いたとすると、 O' 系で計った長さ Δx は

$$\Delta x = \alpha [(x_0 + \ell)^2 - x_0^2] = \ell^2 + 2\ell x_0 \quad (4.20)$$

となり、どの位置 $x = x_0$ に棒を置くかで O' 系で計った長さが変わってしまうことになる。一方、実際に実験をやってみるとそのような位置依存性は出てこないはずである。そうするためには式 (4.19) の段階で右辺を x の一次式にしておくほかない。

4.3.2 系の対称性を使う

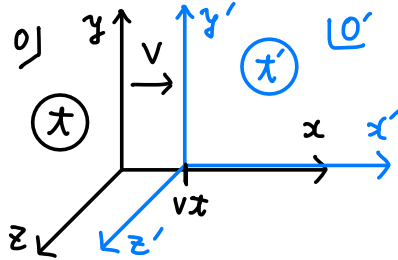


図 17: 今回考えている静止系 O と運動系 O' . 速度の方向である x 軸方向以外に特別な向きはない。また、どの時刻 t および位置 (x, y, z) も対等で、特別な点は存在しない。

今回考えている実験系は図 17 の通りで、以下の性質がある。

- 速度の方向である x 軸方向以外に特別な向きはない。そのため、
 - y 軸方向と z 軸方向は対等。
 - y 軸, z 軸をそれぞれ反転 ($y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$) させても系の物理的性質は変わらない。
- どの時刻 t および位置 (x, y, z) も対等で、特別な点は存在しない。原点をどの点に取るか次第で座標の値は変わるが、物理的には何も変化がない。

以上を踏まえると、一般的な変換式 (4.17) を単純化することが可能となる。

- y 成分と z 成分は完全に対等なので、 y 成分だけ書くことにして z 成分は省略して書く。最終結果を書くときに復活させればよい。
- $y \rightarrow -y$ と y 軸を反転させても結果は変わらないはず。従って、
 - ct', x' の式の y 項はゼロで、かつ
 - y' の式の ct, x 項はゼロとしてよい。

すなわち、式 (4.17) を以下のように単純化できる。

$$ct' = \Lambda_{00}ct + \Lambda_{01}x + \cancel{\Lambda_{02}y} \quad (4.21)$$

$$x' = \Lambda_{10}ct + \Lambda_{11}x + \cancel{\Lambda_{12}y} \quad (4.22)$$

$$y' = \cancel{\Lambda_{20}ct} + \cancel{\Lambda_{21}x} + \Lambda_{22}y \quad (4.23)$$

4.3.3 係数 Λ_{ij} の決定

式 (4.21), (4.22), (4.23) に現れる係数 Λ_{ij} を、表 1 の対応関係をもとに決定していく。(a), (b), (c) の各点についての O 系の座標 (ct, x, y) と O' 系の座標 (ct', x', y') を代入して、 Λ_{ij} が満たす条件式を導出していけばよい。

- 点 (a): 表 1 の座標値を式 (4.21), (4.22) に代入して

$$\ell' = \Lambda_{00} \frac{\ell}{1-\beta} + \Lambda_{01} \frac{\ell}{1-\beta} \quad (4.24)$$

$$\ell' = \Lambda_{10} \frac{\ell}{1-\beta} + \Lambda_{11} \frac{\ell}{1-\beta} \quad (4.25)$$

y についての式 (4.23) は単に自明な式 ($0 = 0$) になる。

- 点 (b): 上記と同様にして

$$2\ell' = \Lambda_{00} \frac{2\ell}{1-\beta^2} + \Lambda_{01} \frac{2\ell\beta}{1-\beta^2} \quad (4.26)$$

$$0 = \Lambda_{10} \frac{2\ell}{1-\beta^2} + \Lambda_{11} \frac{2\ell\beta}{1-\beta^2} \quad (4.27)$$

- 点 (c): この場合は y の式 (4.23) も非自明に残ってくる。

$$L' = \Lambda_{00}\gamma L + \Lambda_{01}\gamma\beta L \quad (4.28)$$

$$0 = \Lambda_{10}\gamma L + \Lambda_{11}\gamma\beta L \quad (4.29)$$

$$L' = \Lambda_{22}L \quad (4.30)$$

以上について、式 (4.27) と (4.29) は互いに等価であるため、互いに独立な方程式は 6 本分あることになる。一方、変数は $\Lambda_{00}, \Lambda_{01}, \Lambda_{10}, \Lambda_{11}, \Lambda_{22}$ の 5 つと $\ell'/\ell, L'/L$ の 2 つで計 7 つである。そのため、上記の方程式を解けば未知変数が 1 つ分を除いてすべて決まるはずである。

まず、式 (4.27) から直ちに

$$\Lambda_{10} = -\Lambda_{11}\beta. \quad (4.31)$$

また、式 (4.24), (4.26) を連立させて

$$\Lambda_{00} \frac{\ell}{1-\beta} + \Lambda_{01} \frac{\ell}{1-\beta} = \Lambda_{00} \frac{\ell}{1-\beta^2} + \Lambda_{01} \frac{\ell\beta}{1-\beta^2} \quad (4.32)$$

$$\Leftrightarrow \Lambda_{00} \frac{1+\beta-1}{1-\beta^2} = \Lambda_{01} \frac{\beta-(1+\beta)}{1-\beta^2} \quad (4.33)$$

$$\therefore \Lambda_{01} = -\Lambda_{00}\beta. \quad (4.34)$$

ここまでの段階で、式 (4.24), (4.25) は次のように単純化している。

$$\ell' = \Lambda_{00} \left(\frac{\ell}{1-\beta} - \beta \frac{\ell}{1-\beta} \right) = \Lambda_{00}\ell \quad (4.35)$$

$$\ell' = \Lambda_{11} \left(-\beta \frac{\ell}{1-\beta} + \frac{\ell}{1-\beta} \right) = \Lambda_{11}\ell. \quad (4.36)$$

これらの式から直ちに

$$\Lambda_{11} = \Lambda_{00}. \quad (4.37)$$

最後に、式 (4.28), (4.30) を連立させ、式 (4.34) も使いつつ整理すると

$$\Lambda_{22} = \Lambda_{00}\gamma + \Lambda_{01}\gamma\beta = \Lambda_{00}\gamma(1-\beta\cdot\beta) = \Lambda_{00} \frac{1}{\gamma}. \quad (4.38)$$

式変形のため、 γ の定義式 (4.3) を用いた。

4.3.4 逆変換の性質を使う

ここまでで、式 (4.21), (4.22), (4.23) の変換は以下のように単純化された。

$$ct' = \Lambda_{00}(ct - \beta x) = \varphi(V)\gamma(ct - \beta x) \quad (4.39)$$

$$x' = \Lambda_{00}(-\beta ct + x) = \varphi(V)\gamma(-\beta ct + x) \quad (4.40)$$

$$y' = \frac{\Lambda_{00}(V)}{\gamma}y = \varphi(V)y. \quad (4.41)$$

ここで $\varphi(V) \equiv \frac{\Lambda_{00}(V)}{\gamma}$ と書き換えた。

今から、式 (4.41) の y の係数 $\varphi(V)$ は 1 に等しくなければならないことを示す。そのために、運動系 O' に対して x' 軸方向に速度 $-V$ で動く系 O'' をさらに考える (図 18 参照)。この新たな系 O'' の各座標点は O のそれと一致することを示せるが²²、これは上の変換で $V \rightarrow -V$ ($\Leftrightarrow \beta \rightarrow -\beta$) としたものが逆変換になっていることを意味する。

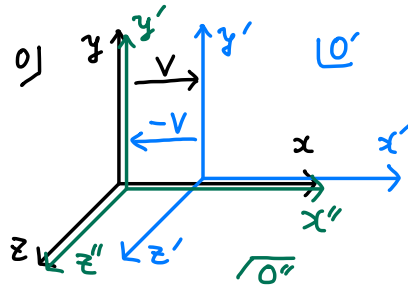


図 18: 運動系 O' に対して x' 軸方向に速度 $-V$ で動く系 O'' . O'' 系は元の静止系 O と一致する。

このことを y についての式 (4.41) に適用すると

$$y'' = \varphi(-V)y' = \varphi(-V) \cdot \varphi(V)y = y. \quad \therefore \varphi(V)\varphi(-V) = 1. \quad (4.42)$$

また、空間の x 方向と $-x$ 方向が対等であることから²³、速度 V の向きを反転させた場合も y 座標方向の振る舞いは変化しないと考えられる。すなわち

$$y' = \varphi(V)y = \varphi(-V)y \quad \therefore \varphi(-V) = \varphi(V). \quad (4.43)$$

式 (4.42), (4.43) から直ちに $\varphi(V) = 1$ が示される。

4.3.5 最終結果：ローレンツ変換

以上の結果をまとめると、静止系 O と運動系 O' の座標間関係式が以下のように得られる。

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (4.44)$$

$$x' = \gamma(-\beta ct + x) \quad (4.45)$$

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (4.46)$$

この座標変換（ローレンツ変換）の諸性質について次回以降の講義で解説していく。

²²式 (4.39), (4.40), (4.41) についてさらに $-V$ に対応する変換をかけた式を書き下せばより具体的に確認できる。

²³図 18 のような系を z 軸負の位置から眺める、と考えてもよい。 V の向きは反転したように見えるが、元々の系と全く同じものを見ているに過ぎず、 y 方向の変換則 (4.41) も変化しない。

第5回 ローレンツ変換の性質

前回の講義では、光速度一定の原理に基づいてローレンツ変換を導出した。この変換に基づくと、ガリレイ変換に従う相対論以前の物理とは根本的に異なる物理現象が予言される。そのようなローレンツ変換の物理的性質について説明する。

5.1 復習：ローレンツ変換

静止系 O (座標: (ct, x, y, z)) と、それに対して x 軸の方向に速度 V で移動している運動系 O' (座標: (ct', x', y', z')) との間の座標変換であるローレンツ変換は

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (5.1)$$

$$x' = \gamma(-\beta ct + x) \quad (5.2)$$

$$y' = y, \quad z' = z \quad (5.3)$$

で与えられるのであった。ただし

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.4)$$

β は速度 V を光速 c で割って無次元化したもので $-1 \leq \beta \leq 1$ 。 γ は gamma factor とも呼ばれる量で、 $|V|$ が光速 c に比べて十分小さいときは 1, $|V|$ が光速に近づく ($|\beta| \rightarrow 1$) につれて無限に増大する (図 19b 参照)。なお、 $\gamma(-V) = \gamma(V)$ であることに注意。

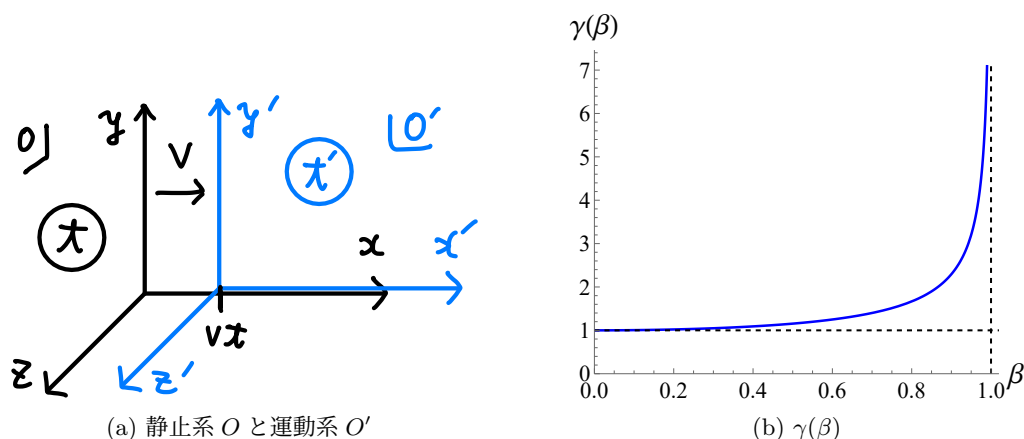


図 19: (a) 静止系 O と運動系 O' 。 (b) gamma factor $\gamma(\beta)$ のグラフ。

逆変換

式 (5.1)–(5.3) は、ある点の静止系 O での座標を運動系 O' での座標に書き直すときに便利な形に書いてある。これとは逆に、運動系 O' の座標が与えられたときに静止系 O での座標を出してくれる式、すなわちローレンツ変換 (5.1)–(5.3) の逆変換もあると、運動系 O' の物理を静止系 O から見るとどうなるかを考える際に便利である。これを以下に示す。

逆変換を構築する方法はいくつかある。結果としては単に式 (5.1)–(5.3) で $V \rightarrow -V$ (すなわち $\beta \rightarrow -\beta$) としたものが逆変換になっているので、実用上はそれを使えばよい。以下で見る通り、直接計算で逆変換を構築するのも簡単にできる。そのために、まず変換 (5.1)–(5.3) を行列表示してお

くと

$$\underbrace{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\equiv \mathbf{x}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\equiv \Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\equiv \mathbf{x}} \Leftrightarrow \mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x}. \quad (5.5)$$

逆変換は、変換行列 Λ の逆行列で与えられる：

$$\mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \Lambda^{-1} \mathbf{x}' \quad (5.6)$$

変換行列 Λ の (y, z) 部分は単位行列そのものなので、以下では省略して (t, x) 部分だけに注目する。すると、逆行列 Λ^{-1} は

$$\Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda^{-1} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1-\beta^2} \begin{pmatrix} 1 & +\beta \\ +\beta & 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

従って、逆変換 $\mathbf{x} = \Lambda^{-1} \mathbf{x}'$ は

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

もしくは、成分ごとに書き下すと

$$ct = \gamma(ct' + \beta x') \quad (5.9)$$

$$x = \gamma(\beta ct' + x') \quad (5.10)$$

$$y = y', \quad z = z'. \quad (5.11)$$

最初に述べた通り、この逆変換は元の変換 (5.1)–(5.3) について速度を反転 ($\beta \rightarrow -\beta$) したものと同一形である。以下では、この逆変換も単に「ローレンツ変換」と呼ぶことにする。

5.2 ローレンツ変換にまつわる物理現象

ガリレイ (逆) 変換

$$t = t', \quad x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z' \quad (5.12)$$

とローレンツ (逆) 変換 (5.9)–(5.11) との相違点は、**変換後の時間座標 t' に元の空間座標 x が混ざること** (式 (5.9))、および ct', x' それぞれに**係数 γ がかかる**ことである (式 (5.9), (5.10))。それぞれ、以下で紹介するような物理的意味がある。

5.2.1 動く時計の遅れ

これまでの講義でも紹介した通り、運動系 O' に乗っている時計を静止系 O から見ると $\gamma(V)$ 倍に遅く進んで見える。直感的な方法でこれを導出する場合は、進行方向と垂直な方向に置いた光時計を考えるとよいのであった。

運動系 O' の原点 $x' = 0$ に固定された時計 (時刻 t') を静止系から見ると、式 (5.9) で $x' = 0$ とした式に従う：

$$t = \gamma t'. \quad (5.13)$$

例えば、 O' 系の時計が 1 秒を刻むのにかかる O 系での時間は $t = \gamma t' = \gamma \times 1$ 秒で、 $\gamma \geq 1$ だからこれは 1 秒よりも長い。運動している O' 系の時計の方が $\gamma(V)$ 倍にゆっくり進んで見える、ということを表している。²⁴

²⁴逆に、運動系 O' から静止系 O の時計を見た場合は、 O 系の時計が速度 $-V$ で運動しているように見え、そのため $\gamma(-V)$ 倍に遅く進んで見える。 O 系と O' 系のどちらから見ても相手の方の時計が遅く進んで見えるわけだが、次節で説明する同時性のずれによりつじつまが合うようになっている。

5.2.2 同時性のずれ

ガリレイ変換 (5.12) とローレンツ変換の t の式 (5.9) とのもう一つの相違点は、後者には空間座標 x' が混ざってくることである。そのため、運動系 O' に乗っている観測者からすると同時 (同じ t') に起こった現象でも、静止系から眺めると異なった時刻 t に起こったように見える、ということを意味する。「同時」という概念は観測者 (の速度) ごとに異なる、と言ってもよい。

このような現象が起こること自体はこれまでの講義でも解説したが、ローレンツ変換の式 (5.9) に基づいてより具体的に見てみよう。運動系 O' の各地点に設置されている時計の時刻 t' を、静止系からある時刻 $t = 0$ に読み取ってみる。この場合、式 (5.9) で $t = 0$ とした式が成立するので

$$\gamma(ct' + \beta x') = 0 \quad \therefore t' = -\frac{\beta x'}{c} = -\frac{Vx'}{c^2}. \quad (5.14)$$

すなわち、運動系 O' の進行方向 (x') の方にある時計ほど過去の時刻を指し示している、もしくは時刻が遅れていることになる。

この現象の起源は、次のような思考実験を考えるとわかりやすい²⁵。図 20 のように、 O' 系に車両を設置して、その中心点から車両の先端と後端にいる観測者に光を送る。この車両が静止系 O に対して前方に等速度で動いている状態を考える。

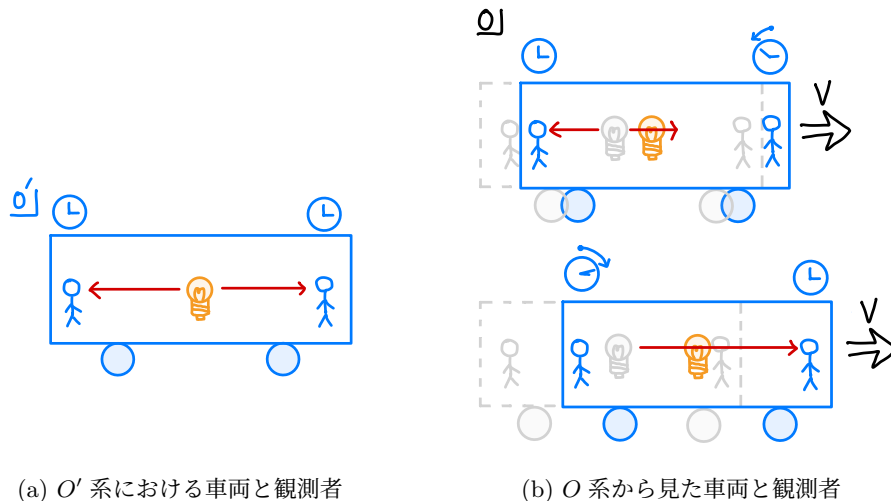


図 20: O' 系の車両と観測者。 O' 系から見ると両方の観測者が同時に光を受け取るが、これを静止系 O から見ると車両先端の観測者の方が後で光を受け取ることになる。

この実験を O' 系と O 系のそれぞれから見た様子は以下ようになる。

- O' 系: O' 系の立場からすると、この二人の観測者は同じ時刻 (t') に光をキャッチする。
- O 系: 静止系 O から見るとこの車両は前方に動いているので、車両の前方/後方にいる観測者はそれぞれ光源に対して遠ざかる/近づくように見える。静止系 O でも光の伝搬速度は c で一定なので、車両の後方にいる観測者が先に光をキャッチし、その後に前方の観測者が光をキャッチするように見える。

どちらの立場から見たとしても、光が各観測者に届いた瞬間に各観測者が持っている時計は同時刻 (t') を指しているはずである。これが静止系 O での見え方と整合的になるためには、 O 系から見ると車両の先端にいる観測者の持っている時計が元から遅れているとするほかない。そうなっていることにより、車両先端の観測者は後の時刻 (t) で光をキャッチしたにもかかわらず、本人としては後端の観測者と同じ時刻 (t') に光をキャッチしたように認識する、ということになる。

²⁵ 前回の講義で行ったローレンツ変換の導出に使ったセットアップと本質的には同じものである。光の各点への到着時刻などをこの系について書き下せば同じローレンツ変換の表式が導出できる。

5.2.3 ローレンツ収縮

ローレンツ変換の x 成分 (式 (5.2)) に基づくと、動いている物体の長さは静止時の長さの $1/\gamma$ 倍に縮むという現象が予言される。起こる現象自体は、マイケルソン・モーリーの実験の結果を非相対論的な物理で説明しようとした際に導入されたローレンツ変換と全く同一であるため、特殊相対論に基づいて導出されたこの収縮現象もその名で呼ばれる。

(静止時の) 長さが L' の物体が O' 系に置かれているとして、それが静止系 O に対して速度 V で運動しているとする。そして、静止系 O にいる観測者がこの物体の長さのある瞬間 $t = 0$ に測った長さが L であったとする。式 (5.2) に基づくと、その長さ L は

$$\underbrace{x'}_{=L'} = \gamma(-\beta \underbrace{ct}_{=0} + \underbrace{x}_{=L}) \quad \therefore L = \frac{1}{\gamma} \times L' \leq L'. \quad (5.15)$$

$\gamma \geq 1$ なので、静止系 O で計った長さ L の方が物体静止時の長さ L' よりも短くなっている。

この現象は、動いている時計の遅れに基づいて以下のように導出することもできる。静止系 O から見て速度 V で走る車両について、その長さ L を測ることを考える。今回は、図 21a のように O 系の原点 $x = 0$ に時計を置いておき、 $x = 0$ の地点を車両の先端が通過してから後端が通過するまでの所要時間 T を測って、それに車両の速度 V をかけることで長さ L を求めることにする：

$$L = VT. \quad (5.16)$$

では、この測定の様子を車両に固定された運動系 O' から見てみる (図 21b)。すると

- O' 系からは静止系 O の時計は速度 $-V$ で動いているように見える。
- その動いている時計が車両の先端から後端までを通り過ぎる間に、その時計は (O 系で見たときと同じく) T だけの時間を刻む。

さて、動いている時計の刻みは $\gamma(V)$ 倍に遅くなって見えるのだから、動いている時計が車両の先端から後端までを通過するのにかかる時間を O' 系の車両に乗った人が測ると

$$T' = T \times \gamma. \quad (5.17)$$

従って、車両に乗った人は車両の長さ L' が

$$L' = VT' = \gamma VT = \gamma L \quad (5.18)$$

であると判断するだろう。すなわち、物体の静止時の長さ L' と比べて、その物体が速度 V で運動している状態で計った長さ L は $1/\gamma(V)$ 倍に縮んでいることになる。

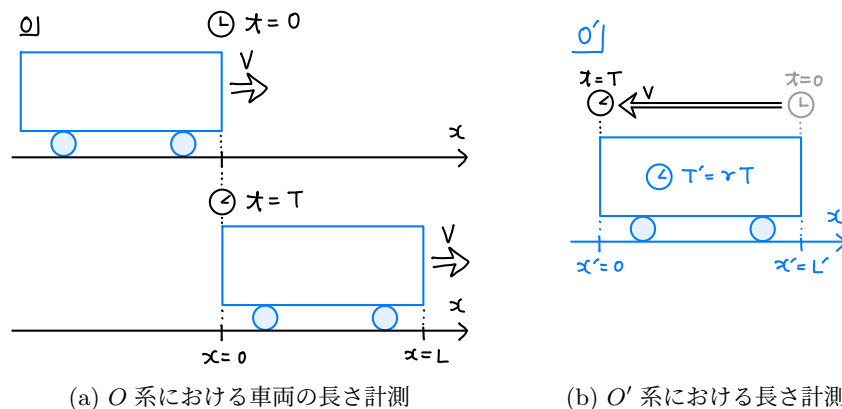


図 21: 動く車両の長さ計測。静止系では車両の通過時間 T を測る。車両に乗った観測者からは、時計の方が逆向きに速度 V で車両先端から後端へ動いていくように見える。

5.3 非相対論的極限

以上ではローレンツ変換とガリレイ変換との相違点に注目し、それを起源として生じる新たな物理現象についてまとめた。これらの現象を実験的に確認することは可能である一方、我々の普通の生活の中でこれらの現象に気づくことはまずない。これは、日常生活で見られる物理現象のほとんどにおいて、速度 V が光速 c よりも十分に遅いためである。従って、この速度が遅い極限（非相対論的極限と呼ぶ）：

$$|\beta| = \frac{|V|}{c} \ll 1 \quad (5.19)$$

を取れば特殊相対論においても相対論以前の物理が再現され、特に静止系と運動系との座標間の関係はガリレイ変換に帰着すると期待される。

このような物理的直観を数式の上でも確認しておく。特殊相対論においては静止系と運動系はローレンツ変換で結ばれる、というのがここまでの結果だった。そこで、ローレンツ変換の式 (5.9)–(5.11) について非相対論的極限 $|\beta| \rightarrow 0$ を取った時にどのような変換に帰着するかをしてみる。まず、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \xrightarrow{|\beta| \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4). \quad (5.20)$$

従って、 $|\beta| \rightarrow 0$ の時にローレンツ変換の式 (5.9)–(5.11) を β の 1 次までで近似する式を書き下すと

$$ct = ct' + \beta x' + \mathcal{O}(\beta^2) \quad (5.21)$$

$$x = \beta ct' + x' + \mathcal{O}(\beta^2) = x' + Vt' + \mathcal{O}(\beta^2) \quad (5.22)$$

$$y = y', \quad z = z'. \quad (5.23)$$

$\mathcal{O}(\beta^2)$ 項を無視すれば、式 (5.22), (5.23) はガリレイ変換と一致する。また、 t についての式 (5.21) は

$$t \simeq t' + \frac{V}{c} \cdot \frac{x'}{c} \quad (5.24)$$

と書き換えられる。この右辺第 2 項は、日常的な物理現象のスケールでは第 1 項よりも十分小さくなっている。例えば、 t, t' として約 1 秒間を取ったとすると、それに対して右辺第二項が同等の大きさになるのは $\frac{|V|}{c} \cdot \frac{|x'|}{c} \sim 1$ となった場合である。一方、速度として $|V| = 1 \text{ m/s}$ 、長さとして $x' = 1 \text{ m}$ を取ると

$$\frac{|V|}{c} \cdot \frac{|x'|}{c} \simeq 10^{-17} \ll 1 \quad (5.25)$$

となり、右辺第 1 項よりも十分に小さい。従って、少なくとも上述のような時間・長さスケールの物理現象を考えるうえでは右辺第二項を無視して差し支えない。

以上の結果は、**非相対論極限ではローレンツ変換はガリレイ変換に帰着する**ことを意味する。日常的なスケールの物理現象を考える限りにおいてはガリレイ変換を使ってもほぼ差し支えなく、一方光速に近い速度を持つ粒子が存在する場合などでは相対論的效果が現れてくる、ということになる。

5.4 ローレンツ変換の時空図

ローレンツ変換 (5.1), (5.2) を時空図 ((ct, x) ないし (ct', x') を縦軸・横軸とするプロット) で書いてみると図 22 のようになる。例えば、 O 系の座標 (ct, x) が通常の直交座標になるように書くと図 22a が得られる。このグラフを書くためには、式 (5.1), (5.2) で $ct' = 0, 1, 2, \dots$ や $x' = 0, 1, 2, \dots$ とした式：

$$ct = \beta x + \frac{ct'}{\gamma} = \beta x + \frac{1}{\gamma} \times 0, 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

$$x = \beta ct + \frac{x'}{\gamma} = \beta ct + \frac{1}{\gamma} \times 0, 1, 2, \dots \quad (5.27)$$

に対応する直線群を引けばよい。これらが運動系 O' における座標一定面 ($ct' = \text{一定}$, $x' = \text{一定}$) に対応する。式 (5.26) は傾き β , 切片 ct'/γ の直線に対応し、それを直線 $ct = x$ について鏡映した直線が式 (5.27) に対応する。

逆に、運動系 O' から見た静止系 O の座標系を書くためには、ローレンツ逆変換の式 (5.9), (5.10) について同様の作業を行えばよい (図 22b 参照)。 O 系の座標を基準とした図 22a について $\beta \rightarrow -\beta$ (左右反転と等価) として $(ct, x) \leftrightarrow (ct', x')$ と置き換えたものになっている。これは、ローレンツ逆変換が元の変換について速度を反転 ($\beta \rightarrow -\beta$) したものになっているためである。

この図から、これまでに解説してきた特殊相対論特有の性質を読み取ることができる。

- **光速一定**：どちらの座標系から見ても光の経路は $ct = x$ ないし $ct' = x'$ (に平行な直線群) となる。 O 系、 O' 系のどちらから見ても光速は c で等しい、ということに対応している。
- **動く時計の遅れ** (図 22a の緑点、図 22b の左の黒点)：運動系 O' の原点に固定された時計で $ct' = 1$ に対応する点の ct 座標は γ であり、 O' 系で計った時間である 1 よりも長い。動く時計の進みを静止系から見ると γ 倍に遅くなっていることを表している。なお、 O' 系から O 系に固定された時計を見ても遅くなって見える (図 22b の左の黒点)。その意味で、 O 系と O' 系は互いに対等になっている。
- **同時性のずれ** (図 22a の $ct' = \text{一定}$ の直線など)：運動系 O' の時刻一定面 ($ct' = \text{一定}$ の直線) は、静止系 O の時刻一定面 ($ct = \text{一定}$ の直線) とずれている。「同時」の意味が観測者の速度ごとに異なる、ということに対応する。
- **ローレンツ収縮** (図 22a の青点、図 22b の右の黒点)：運動系 O' の原点から長さ 1 の地点 ($x' = 1$) を O 系の時刻 $ct = 0$ の瞬間に見ると位置 $x = 1/\gamma < 1$ の地点にある。運動する物体の長さが $1/\gamma$ 倍に縮んで見えるというローレンツ収縮に相当する。なお、静止系 O の物体の長さを運動系 O' から見たときも同様に収縮して見える (図 22b の右の黒点)。

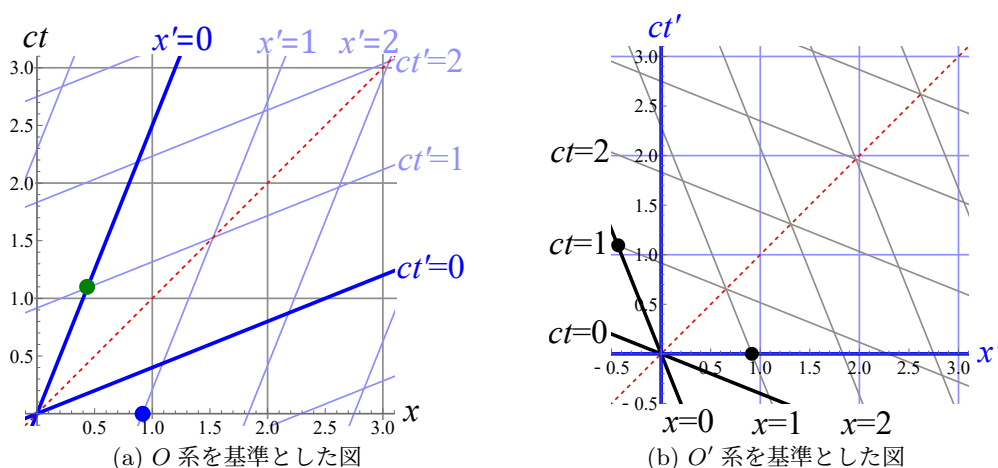


図 22: (a) 静止系 O の座標 (ct, x) と運動系 O' の座標 (ct', x') を $\beta = 0.4$ の場合にプロットしたもの。この速度 β に対して $\gamma \simeq 1.09$, $1/\gamma \simeq 0.92$ である。青点は $(ct, x) = (0, 1/\gamma)$ で、速度 β で動く長さ 1 の棒を静止系 O で見たときの長さに対応する。緑点は O' 系の原点の時計で時刻 $ct' = 1$ に相当する点で、 O 系の時刻 1 よりも後の時刻となっている。(b) 同じグラフを O' 系の座標 (ct', x') を基準として書いたもの。黒点は O 系で長さ $x = 1$, 時間 $ct = 1$ を O' 系で計った時の長さ・時間を表す点。図 (b) は図 (a) を左右反転して座標を $(ct, x) \leftrightarrow (ct', x')$ と入れ替えたものになっていることに注意。

第6回 時空と因果性

今回は以下の内容を順次解説する。

- 速度の合成則 → 光速は粒子・信号の最高速度
- 光速に基づいた時空の因果性
- 因果関係を定める世界間隔 Δs^2
- 世界間隔のローレンツ不変性と固有時間・固有長

6.1 速度の合成則

簡単のため、 x 方向の速度についてだけ考える。静止系 O に対して x 方向に速度 V で動く運動系 O' を考え、この O' 系上で x' 方向に速度 V' で運動する粒子があったとする。これを静止系 O から見たときの速度 v は、ガリレイ変換に基づくと単に

$$v = V + V' \quad (6.1)$$

で与えられるのであった。

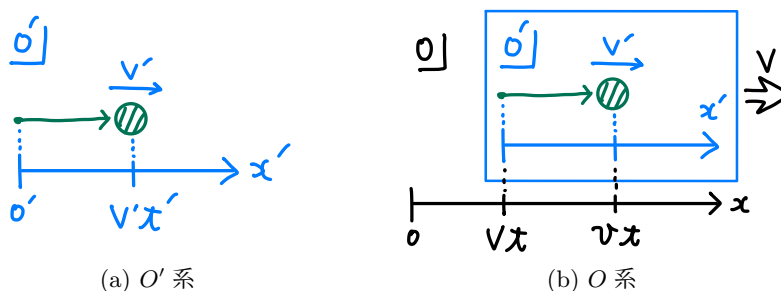


図 23: 速度の合成で考える系。速度 V' の粒子を速度 V だけ加速する。

では、特殊相対論に基づいて速度の合成則を改めて導出してみよう。 O 系から見て x 方向に速度 $V = c\beta$ で動く O' 系から O 系へのローレンツ変換は

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (6.2)$$

O' 系で速度 V' で動く粒子の軌道が

$$x' = V't' \equiv \beta' ct' \quad (6.3)$$

で与えられたとする。これを O 系から見たときの粒子の軌道は、ローレンツ変換 (6.2) に従うと

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ \beta' ct' \end{pmatrix} = \gamma ct' \begin{pmatrix} 1 + \beta\beta' \\ \beta + \beta' \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

$$\therefore ct = \gamma ct' (1 + \beta\beta'), \quad x = \gamma ct' (\beta + \beta'). \quad (6.5)$$

粒子軌道の起点を原点にセットしてあったので、 O 系で見た粒子の速度 v は

$$v = \frac{x}{t} = c \cdot \frac{\gamma ct' (\beta + \beta')}{\gamma ct' (1 + \beta\beta')} = c \cdot \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} = \frac{V + V'}{1 + \frac{VV'}{c^2}}. \quad (6.6)$$

これが相対論的な速度の合成則である。

- 非相対論的極限

速度が光速よりも遅い極限 ($|V|, |V'| \ll c$) で、式 (6.6) は

$$v = \frac{V + V'}{1 + \frac{VV'}{c^2}} = (V + V') \left(1 - \mathcal{O}\left(\frac{VV'}{c^2}\right) \right). \quad (6.7)$$

従って、 $\mathcal{O}\left(\frac{VV'}{c^2}\right)$ 項を無視する近似では相対論的な速度の合成則 (6.6) は通常の (非相対論的な) 式 (6.1) に帰着する。

- 光速度は不変

運動系 O' で光速 $V' = c$ で運動する粒子を静止系 O から見たときの速度 v は

$$v = \frac{V + c}{1 + \frac{Vc}{c^2}} = c. \quad (6.8)$$

すなわち、光速はどの慣性系から見ても変化せず c のままである。

- 光速＝最高速度

光速以下の速度を合成しても、合成された速度 v は光速 c を越えないことを以下のようにして示せる。式 (6.6) より、光速を越えない速度 $|\beta|, |\beta'| < 1$ について

$$1 - \frac{|v|}{c} = 1 - \left| \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} \right| = \frac{1 + \beta\beta' - |\beta + \beta'|}{1 + \beta\beta'}. \quad (6.9)$$

この分子について

$$(1 + \beta\beta')^2 - |\beta + \beta'|^2 = \beta^2\beta'^2 + 2\beta\beta' + 1 - (\beta^2 + 2\beta\beta' + \beta'^2) = (1 - \beta^2)(1 - \beta'^2) > 0. \quad (6.10)$$

この結果と式 (6.9) より、 $1 - \frac{|v|}{c} > 0$, すなわち合成された速度は光速を越えない ($|v| < c$) ことが示された。すなわち、**光速以下の速度で動く物体がいくら加速しても光速には到達できない。**

6.2 時空の因果性

前節で示した通り、物体はどれだけ加速してもその速度が光速に到達することはない。また、光速度で運動する物体を加速しても光速を越えさせることはできない。そのため、相対論においては**光速は物体・信号の最高速度**としての役割を果たす。また、光の伝搬面を基準として**因果性** (ある点を基準として、別の点がその未来・過去・その他のいずれにあるか) を厳密に定めることができる。順を追って説明する。

6.2.1 時空

相対論以前の物理では**時間座標 t** と **空間座標 \mathbf{x}** はあくまで別個のものであった。実際、ガリレイ変換において時間座標は不変であり、空間座標も速度の分シフトされるだけである。

一方、相対性理論においては、ローレンツ変換 (6.2) のもとで時間と空間は互いに混ざり合ってしまう、互いに明確に区別されるものではない。むしろ、両者を一体のものとしてとらえたほうがすっきりする。そのような立場を取ることにして、時間と空間をまとめて**時空**と呼ぶことにする。例えば、私たちの世界は時間 (1次元) と空間3次元で構成される**4次元時空**である。また、時空の中のある時刻・位置の一点 (ct, \mathbf{x}) のことを**時空点**、その時刻・位置で起きた何らかの現象のことを**事象 (event)** と呼ぶ。

6.2.2 世界間隔

本節冒頭で述べた通り、時空の因果性は光の伝搬面を基準として定められる。その光の経路を解析するのに便利な量である**世界間隔**を本節で導入する。

時空の原点と別の点 (ct, x, y, z) との間の**世界間隔** Δs^2 を

$$\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -(ct)^2 + |\mathbf{x}|^2 \quad (6.11)$$

と定義する²⁶。この量の性質は下記の通り。

- **距離の一般化**： Δs^2 は空間的な距離の 2 乗 $x^2 + y^2 + z^2$ に $-(c dt)^2$ を付け加えたものになっている。空間成分と異なり負符号がついているために通常の距離とは異なった振る舞いをする。
- **光の経路上で $\Delta s^2 = 0$** ：時刻 $t = 0$ に原点から光を飛ばしたとすると、光のその後の位置は $|\mathbf{x}| = ct$ で与えられる。したがって、光の経路に沿って $\Delta s^2 = -(ct)^2 + |\mathbf{x}|^2 = 0$ となる。
- **Δs^2 はローレンツ不変量**

簡単のため、時空のうち (ct, x) 部分だけを考える。 O' 系の原点と別の点 (ct', x') との間の世界間隔を O' 系で計ると

$$\Delta s'^2 = -(ct')^2 + x'^2 . \quad (6.12)$$

この 2 点間の世界間隔を O 系から測った値を求めるには、ローレンツ変換 (6.2) によって O 系における 2 点の座標を出せばよい。まず、 O' 系の原点 $(ct', x') = (0, 0)$ は O 系の原点 $(ct, x) = (0, 0)$ に写される。一方、 O' 系の点 (ct', x') の O 系における座標は

$$ct = \gamma (ct' + \beta x') , \quad x = \gamma (x' + \beta ct') . \quad (6.13)$$

したがって、 O 系で計った 2 点間の世界間隔は

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= -(ct)^2 + x^2 = -\gamma^2 (ct' + \beta x')^2 + \gamma^2 (x' + \beta ct')^2 \\ &= \gamma^2 [-(1 - \beta^2) (ct')^2 + (1 - \beta^2) x'^2] = -(ct')^2 + x'^2 = \Delta s'^2 . \end{aligned} \quad (6.14)$$

すなわち、静止系 O から測った場合でも世界間隔は不変 ($\Delta s^2 = \Delta s'^2$) である。 Δs^2 はローレンツ変換で変化しない、というこの性質のことを「 Δs^2 は**ローレンツ不変量**である」とも言う。

6.2.3 因果関係

光よりも速く運動する粒子・信号は存在しないということを踏まえると、座標 (ct, x) の点の原点に対する因果関係は下記の 3 つのパターンしかないことが分かる。図 24 も参照のこと。原点から未来・過去向きに飛ばした光の経路 $x = \pm ct$ が境界線になっている。

1. **未来**：点 (ct, x) が未来向きの光の経路の内側の領域 $|x| \leq ct$ ($t > 0$) に入る場合、原点からその点に (光速よりも遅い) 粒子・信号を送ることができる。逆はできない。この点は原点に対して**未来**の領域にある、と言う。

この場合、2 点間の世界間隔は $\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 \leq 0$ (ただし $t > 0$) となる。

2. **過去**：同様に、点 (ct, x) が過去向きの光の経路の内側の領域 $|x| \leq -ct$ ($t < 0$) に入る場合、その点から原点へ粒子・信号を送ることができ、逆はできない。この点は原点に対して**過去**の領域にある、と言う。

この場合も、2 点間の世界間隔は $\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 \leq 0$ (ただし $t < 0$) となる。

²⁶一般の 2 点 $(ct_1, \mathbf{x}_1), (ct_2, \mathbf{x}_2)$ の間の世界間隔は、 $c\Delta t = ct_2 - ct_1, \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ として $\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta \mathbf{x}^2$ と与えられる。また、時空中の 2 点間の座標が $(c dt, dx, dy, dz)$ だけ離れている場合について、その 2 点間の (微小) 世界間隔 $ds^2 = -(c dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ を使うことも多い。

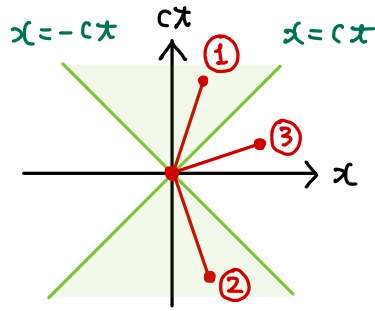


図 24: 原点についての因果的領域。緑線は時刻 $t = 0$ に原点 $x = 0$ から出た光の経路。

3. **空間的**: 点 (ct, x) が過去向き・未来向きの光の経路の外側の領域 $|x| > ct$ に存在するとき、原点からこの点へ、もしくはこの点から原点へ粒子や信号を送ることはできない。この2点は互いに因果関係がない、またはこの2点は**空間的**に離れている、などと言う。

この場合、2点間の世界間隔は $\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 > 0$ となる。

- **因果関係はローレンツ不変**

前節で説明した通り、世界間隔 Δs^2 はローレンツ変換で変化しない。また、2点間の因果関係がどの種類になるかは Δs^2 (と t) の符号で決まる、というのが上で述べた結果の一つであった。したがって、2点間の因果関係はローレンツ変換で不変、すなわち**どの慣性系から見ても因果関係は変わらない**。例えば、粒子の速度はどの速度の慣性系から見るかで変化する。2点間の因果関係は、そのような慣性系の選び方に由来する不定性なしに決まっていることになる。

- **空間的に離れた2点の時間順序は不定**

上記で言うところの「未来」・「過去」は、単純に時間座標 t が原点の時刻 $t = 0$ より前か後かで決めているのではないことに注意。特に、空間的に離れた2点の場合、そのどちらの時間座標が先になるかはローレンツ変換、すなわちどの速度の慣性系から見るかによって入れ替わってしまう。そのため、この場合は「どちらが時間的に先か」を定めることにあまり意味がない。一方、「互いに信号のやり取りをできない」という性質はどの慣性系でも必ず成立している。観測の仕方に依存しない性質である、という意味でこちらの方がより重要である。

- **光円錐**

y, z 座標も考慮に入れた場合の光の波面は $|x| = |ct|$ 上にあるが、時間座標を高さ、空間座標を横方向の位置としてこれを図示すると、原点を頂点とする円錐となる。ただし、円錐の時刻一定面による断面は円(2次元平面上の1次元球面)ではなく、3次元空間中の2次元球面である。この光の伝搬面が描く(高次元版の)円錐を**光円錐**と呼ぶ。図 25 参照。時刻 t が一定となる面 Σ は3次元空間 (x, y, z) となるが、空間方向を1次元つぶして2次元面のように描くと、上記の円錐状の構造が見て取りやすくなる。

6.3 固有時・固有長

世界間隔のもう一つの物理的な意味は、**時計・物体が静止している状態で計った時間・長さ**であり、それぞれ**固有時・固有長**と呼ばれる。

- **固有時**: 静止している時計(時刻: t) を原点に置く。その位置は $(ct, x) = (ct, 0)$ となるが、この点と原点との世界間隔は

$$\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 = -(ct)^2. \quad (6.15)$$

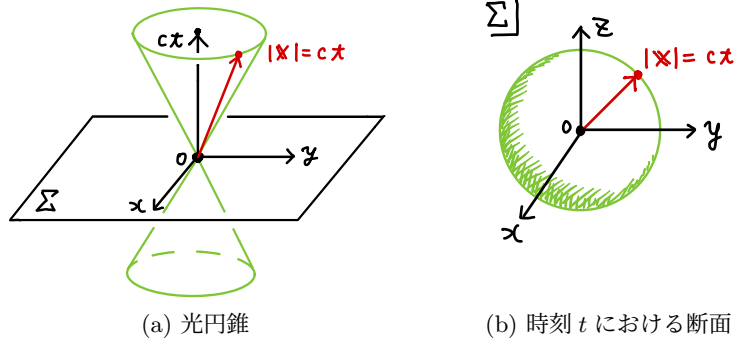


図 25: 光円錐の図。図 25a は 3 次元空間 (x, y, z) である時刻一定面 Σ を 2 次元面 (x, y) として書いたもの。図 25b は光円錐の時刻 t における断面。3 次元空間内の 2 次元球面となる。

したがって、世界間隔は時計の時刻と $t = \frac{1}{c}\sqrt{-\Delta s^2}$ という関係にある。

- **固有長**：静止している棒（長さ： L ）を原点から x 軸方向に向けて置く。この棒の両端の時刻 $t = 0$ における位置は $(ct, x) = (0, 0), (0, L)$ となるが、この 2 点間の世界間隔は

$$\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 = L^2, \quad (6.16)$$

すなわち棒の長さは $L = \sqrt{\Delta s^2}$ で与えられる。

世界間隔 Δs^2 はローレンツ不変、すなわちどの速度の慣性系から見ても変化しない。したがって、動いている時計・棒があった場合にその「両端」の間の世界間隔を求めれば、その時計・棒が静止しているときの時間・長さが求められることになる。この量は観測の仕方（観測を行う慣性系の選び方）に依存しない物体固有の量となるので、それぞれ**固有時**・**固有長**とよばれる。

例えば、動いている時計の位置が $(ct, x) = (ct, Vt)$ だったとすると、原点との世界間隔は

$$\Delta s^2 = -(ct)^2 + x^2 = -(ct)^2 + (Vt)^2 = -(ct)^2 (1 - \beta^2) = -\frac{1}{\gamma^2}(ct)^2. \quad (6.17)$$

したがって、初期時刻 ($t = 0$) とその後のある時刻 t との間の固有時間は $\frac{1}{c}\sqrt{-\Delta s^2} = \frac{t}{\gamma}$ である。動いている時計の刻みは $\frac{1}{\gamma}$ 倍に遅くなって見えるので、 t 秒経過後に動いている時計は t/γ 秒しか刻んでいない、ということと対応している。

6.4 ローレンツ変換の別の導出法

世界間隔 (6.11) のローレンツ変換に対して不変であった。実は、この性質は**平面上の回転**と密接な関係にあることが以下のようにしてわかる。

- **距離と回転変換**

原点と位置 (x, y) の点を結ぶ線分を考えると、その長さ l は

$$l^2 = x^2 + y^2 \quad (6.18)$$

で与えられる。この線分を原点について回転させても、長さ l はもちろん変化しない。

この事実を数式で書き表してみよう。点 (x, y) を原点について角度 θ だけ回転させることを考える。回転後の位置を (x', y') とすると、その座標は以下の**回転変換**で求められる：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}. \quad (6.19)$$

回転後の原点との距離 ℓ' は、回転前の距離 ℓ から変化しない：

$$\ell'^2 = x'^2 + y'^2 = (x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 = x^2 + y^2 = \ell^2 . \quad (6.20)$$

● 距離 $\ell^2 \rightarrow$ 世界間隔 Δs^2

平面上の距離 (6.18) において、座標 y はもちろん実数である。ここで、 y 軸をあえて実数ではなく虚数方向に伸ばしてみることにする。これを実現するべく $y \rightarrow ict$ (ct は実数) と置き換えると、距離の式 (6.18) は

$$\ell^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (ict)^2 = -(ct)^2 + x^2 = \Delta s^2 \quad (6.21)$$

のとおり、世界間隔の式 (6.11) に一致する。

● 回転 \rightarrow ローレンツ変換

さて、この置き換えを回転変換の式 (6.19) でもやってみよう。変換後の座標について $y' \rightarrow ict'$ と同様の置き換えを行うと

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -i \sin \theta \\ -i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} . \quad (6.22)$$

変換行列に虚数単位 i が入っているので、変換後の座標 (ct', x') を実数にするためには工夫が必要になる。結果としては、角度を虚数にする ($\theta \rightarrow i\eta$) にするとうまくいくことが以下のようにしてわかる。まず、

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} . \quad (6.23)$$

したがって、 $\theta \rightarrow i\eta$ として回転角度を虚数方向にとると

$$\sin(i\eta) = \frac{e^{i \cdot i\eta} - e^{-i \cdot i\eta}}{2i} = \frac{e^{-\eta} - e^{\eta}}{2i} = i \sinh \eta, \quad \cos(i\eta) = \frac{e^{i \cdot i\eta} + e^{-i \cdot i\eta}}{2} = \frac{e^{-\eta} + e^{\eta}}{2} = \cosh \eta . \quad (6.24)$$

したがって、式 (6.22) は

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -i \sin \theta \\ -i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta \\ \sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \cosh \eta \begin{pmatrix} 1 & \tanh \eta \\ \tanh \eta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} . \quad (6.25)$$

ここで $\beta = -\tanh \eta$ と取ると、ローレンツ変換の式 (6.2) がちょうど再現される。ただし、ここで

$$1 + \tanh^2 \eta = \frac{1}{\cosh^2 \eta} \quad \therefore \quad \cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh^2 \eta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \gamma \quad (6.26)$$

となることを使った。

以上より、世界間隔は虚時間 it についての距離、ローレンツ変換は虚数角度の回転として理解できることが分かった。

逆に、物理的な考察によって世界間隔 (6.11) がどの慣性系でも同じ値になることを導いておいて、それを不変に保つ変換を構築することでローレンツ変換の表式 (6.2) を導出することもできる。この導出法の詳細については本講義では割愛する²⁷。

²⁷例えば、岩波文庫「相対論の意味」(アインシュタイン 著)、東京図書「場の古典論」(ランダウ 著)にはこの方針に基づくローレンツ変換の導出法が説明されている。

第7回 相対論における諸現象

これまでの講義では、特殊相対性理論の構築とその基本的性質について説明してきた。その知識をもとに、相対性理論においてはどのような現象が起こると予言されるかについて何点か紹介したい。

7.1 固有時間

7.1.1 復習：世界間隔と固有時間

- 世界間隔

微小に離れた2点の座標が (cdt, dx, dy, dz) だけ離れていたとする。この時に、この2点間の世界間隔を

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (7.1)$$

と定義する。この量はどの慣性系で評価しても同じ値になるという特徴がある。数学的には、ローレンツ変換

$$cdt = \gamma(cdt' + \beta dx'), \quad dx = \gamma(dx' + \beta cdt'), \quad dy = dy', \quad dz = dz' \quad (7.2)$$

で世界間隔 (7.1) が不変、すなわち

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -(cdt')^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \quad (7.3)$$

となり、 ds^2 はローレンツ不変量であるということに対応している。

- 固有時間

速度 V で運動する粒子の軌道が $(ct, x) = (ct, Vt) = (ct, \beta ct)$ で与えられたとする (ただし $y = z = 0$)。この粒子が静止して見える慣性系 (速度 V の運動系) では、この粒子の軌道は $(ct', x') = (ct', 0)$ と表される。この時、静止系と運動系における粒子軌道に沿った世界間隔の関係は、式 (7.3) より

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(cdt)^2 + dx^2 = -(cdt)^2 + (\beta cdt)^2 = -(1 - \beta^2)(cdt)^2 = \frac{1}{\gamma^2}(cdt)^2 \\ &= -(cdt')^2 + dx'^2 = -(cdt')^2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

したがって、 $\frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}$ という量を計算すると

$$\frac{1}{c}\sqrt{-ds^2} = dt' = \frac{1}{\gamma}dt \equiv d\tau. \quad (7.5)$$

この式は以下の2つのことを意味する。

- 式 (7.5) に出てくる“ dt' ”は、粒子の静止系で計った経過時間 dt' そのものである。したがって、どの慣性系でもよいので粒子の軌道にそって世界間隔 ds^2 を計算して $\frac{1}{c}\sqrt{-ds^2} \equiv d\tau$ を求めると、その粒子に乗って計った経過時間が求まる。この時間 τ のことを**固有時間**と呼ぶ²⁸。

²⁸固有時間は、経路が曲線となるような一般の軌道 $(ct, \mathbf{x}) = (ct, \mathbf{x}(t))$ についても同様に計算できる。粒子の軌道に沿って $d\tau$ を積分すればよい。

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \int \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c} \int \sqrt{(cdt)^2 - dx^2} = \frac{1}{c} \int \sqrt{(cdt)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2(t)} \\ &= \frac{1}{c} \int \sqrt{1 - |\boldsymbol{\beta}(t)|^2} cdt = \int \sqrt{1 - |\boldsymbol{\beta}(t)|^2} dt \leq \Delta t. \end{aligned} \quad (7.6)$$

粒子 (にくっついている時計) が動いている ($|\boldsymbol{\beta}| \neq 0$) 限り、固有時間 $\Delta\tau$ は静止系における経過時間 Δt よりも必ず短くなる。

- 式(7.5)によると、静止系（粒子が速度 V に見える系）で計った経過時間 dt は、粒子の静止系で計った経過時間の γ 倍 ($dt = \gamma dt'$) である。これまでも導出してきた「速度 V で動く時計は γ 倍に遅く進む」という性質を表す。

7.1.2 双子の「パラドックス」

固有時間についての上記の計算結果に基づくと、以下の状況で何が起こるかは直ちにわかる。

- **双子の弟**：出発地点で静止して、弟の時計で $t = 0$ に兄がロケットで出発するのを見送り、兄が時刻 $t = T$ に帰ってくるまで待つ。
- **双子の兄**：弟の時計で $t = 0$ に速度 V で出発後、時刻 $\frac{1}{2}T$ に折り返し、速度 $-V$ で出発地点に帰ってくる。

兄が出発点に戻ってきた時刻 $t = T$ の時点でより歳を取っているのはどちらか、というのが問題である（図 26 参照）。

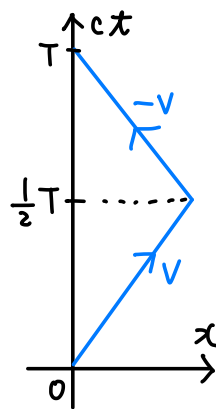


図 26: 双子のパラドックスで考える弟 (ct 軸)・兄 (青線) の移動経路。

上で述べた通り、兄・弟が持っている時計が刻む経過時間、すなわち固有時間はどの慣性系で計算しても同じ値となる。したがって、弟の立場から兄・弟の往復所要時間を計算すると以下の通り。

- **双子の弟**：上記の通り、兄は出発後に $\Delta t = T$ 後に帰ってくる。
- **双子の兄**：兄の経路に沿った固有時間 $\Delta\tau$ を弟の静止系で計算すると²⁹、兄の速度が V ないし $-V$ であることから

$$\Delta\tau = \int_0^{T/2} \frac{1}{\gamma(V)} dt + \int_{T/2}^T \frac{1}{\gamma(-V)} dt = \frac{1}{\gamma(V)} T \leq T . \quad (7.7)$$

したがって、速度 V で飛んでいた兄の方が感じる往復時間 $\Delta\tau$ の方が、弟の待つ時間 T よりも短い。すなわち、双子であってもこの宇宙旅行後には弟の方が兄よりも歳を取る。

さて、この問題が「双子のパラドックス」と呼ばれる所以は、兄からこの状況を見たときには逆に弟が速度 V で往路・復路を飛び、そのために逆に弟の感じる往復時間の方が短くなるのでは、という気がするためである。兄が折り返す際に進行方向逆向きの加速度運動をしている訳だが、それが原因で兄の座標系から見た弟の時計の進み方が一定ではなくなる。その効果も取り入れて兄の立場から往復時間を計算すると、結局上記の弟の立場から出した計算結果が再現され、特に矛盾はないことが分かる³⁰。

²⁹わざわざ固有時間の計算をせずとも、単に「速度 V で動く時計は γ 倍に遅く進む」という知識を使えばよい。

³⁰兄の立場から見た弟の運動の様子は案外複雑なので、本講義では割愛する。松田卓也・木下篤哉著「相対論の正しい間違え方」（丸善出版）などに詳しく解説されている。

7.1.3 地表に飛来する宇宙線（地表の立場から）

宇宙線が大気に衝突して生じる μ 中間子は、 β 崩壊

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (7.8)$$

によって寿命 $2.2 \mu\text{sec} = 2.2 \times 10^{-6} \text{ sec}$ で崩壊する。そのため、光速 $c \sim 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ で走っても相対論効果を考慮に入れなければ 600 m 程度しか飛ばず、上空約 10 km で生成された後に地表に届くことはない。しかし、地表からこの粒子を見た場合、相対論的效果の一つである「動く時計は遅く進む」ために寿命もその分伸びて見える。例えば、光速の 99% で μ 粒子が飛んでいるとすると、その寿命は

$$\gamma(V = 0.99c) = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.99)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0.99\sqrt{1 - 0.99}}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{0.01}} = 7.07\dots, \quad (7.9)$$

すなわち寿命は約 7 倍に伸び、そのために上空で μ 粒子が生成後崩壊するまでに飛ぶ距離もその分伸びる。7 倍程度だと 10 km を渡りきるにはやや足りないが、 μ 粒子の速度がもう少し早ければ地表まで届くほどに飛距離も伸びる。

7.2 ローレンツ収縮

7.2.1 地表に飛来する宇宙線（粒子の立場から）

動いている物体の長さは $\frac{1}{\gamma(V)}$ 倍に縮んで見える、というのがローレンツ収縮の基本的性質である。これを踏まえ、先ほどの μ 粒子の飛距離の話をも μ 粒子の静止系から見ると下記のようになる。

- μ 粒子の静止系では、 μ 粒子が崩壊するまでの寿命は本来の値である $2.2 \mu\text{sec}$ となる。
- μ 粒子の静止系から見ると、地球の大気層の方が速度 V で自分の方に移動してくるように見える。そのため、大気層の厚さが $\frac{1}{\gamma(V)}$ 倍に薄くなって見える。

以上より、 μ 粒子の立場からすると、大気層が $\frac{1}{\gamma(V)}$ 倍に薄くなっているために自分の寿命内に上空から地表まで渡りきれた、ということになる³¹。

7.2.2 車と車庫のパラドックス

静止状態における長さが L の車と車庫があったとする。車が速度 V で車庫に対して走っているとき、それらの長さは互いにどうなって見えるか、というのが（他の呼び方で呼ばれることも多いが）「車と車庫のパラドックス」の問題設定である。ひとまずローレンツ収縮の性質に基づいて考えると、以下の通りの結果が得られそうである。

- **車庫の静止系** (図 27a, 27b): 車庫の静止系から見た車の長さは、ローレンツ収縮により $\frac{L}{\gamma(V)} (\leq L)$ となる。そのため、車は車庫 (長さ L) に収まるはずである。
- **車の静止系** (図 27c): 車の静止系で計った車の長さは L である。一方で、車庫の方は速度 $-V$ で運動して見えるので、その長さは $\frac{L}{\gamma(-V)} = \frac{L}{\gamma(V)} (\leq L)$ となる。そのため、車の静止系から見ると、車は車庫より長くはみ出して見える。

上記 2 つの結果は一見逆になっており、そのため互いに矛盾していないだろうか、という疑問を覚えるのでこの問題は車と車庫の「パラドックス」と呼ばれている。

³¹寿命が延びる割合 ($\gamma(V)$ 倍) と大気層が薄くなる割合 ($1/\gamma(V)$) が同じ値 (の逆数) となっており、そのためどちらの描像でも μ 粒子が地表に届くのに必要となる速度は同じ値となる。

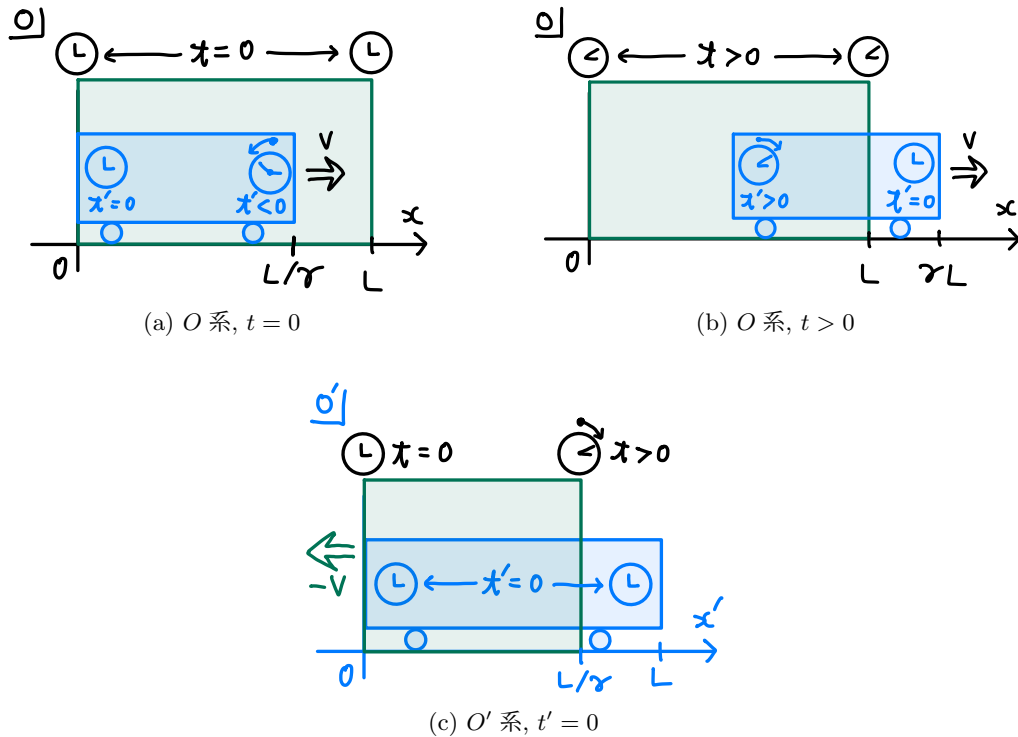


図 27: 「車と車庫のパラドックス」で考える系。それぞれ、(a) 静止系 O における時刻 $t = 0$ の瞬間、(b) 車両先端の時計が $t' = 0$ を示している瞬間を O 系で見たもの、(c) 運動系 O' における時刻 $t' = 0$ の瞬間の図である。

実際のところ、これら 2 つの結論はどちらも正しく、また互いに矛盾していないというのが正解である。ローレンツ変換のもう一つの帰結であった同時性のずれも考慮するとそうわかるのだが、これを見落としがちなために一見「パラドックス」に見えてしまう、というのがこの話の落ちである。以下で順を追って解析してみよう。

- 車庫の静止系 O , 時刻 $t = 0$ (図 27a): この瞬間に、車の後端 ($x' = 0$) が車庫の入り口 ($x = 0$) と一致し、なおかつその位置で車内の時計も $t' = 0$ を指しているとする。この時、車の先端の位置 ($x' = L, x = \frac{L}{\gamma}$) については

$$ct' = \gamma \left(\underbrace{ct}_{=0} - \beta \underbrace{x}_{=L/\gamma} \right) = -\gamma\beta \cdot \frac{L}{\gamma} = -\beta L (< 0) \quad (7.10)$$

という式 (ローレンツ変換の t 成分) が成立するため、車の先端に置かれた時計は少し過去の時刻 $ct' = -\beta L$ を指しているとわかる。

- 車庫の静止系 O , 時刻 $t > 0$ (図 27b): では次に、車両の先端に置かれた時計が時刻 $t' = 0$ を示す瞬間について考えてみる。先ほどの状況よりも少し後の時刻 ($t > 0$) に相当する。この時点での車両先端の位置は、ローレンツ変換の x 成分の式より

$$x = \gamma \left(-\beta \underbrace{ct'}_{=0} + \underbrace{x'}_{=L} \right) = \gamma L \quad (7.11)$$

となり、これは車庫の右端の位置 $x = L$ よりも右側にある。

- 車の静止系 O' , $t' = 0$ (図 27c): 車の静止系における時刻 $t' = 0$ では、車庫が速度 $-V$ で左向きに運動しており、この瞬間にその左端が $x = 0$ にちょうど重なる。この時、車庫の右端は $x' = \frac{L}{\gamma}$ にあり、車の先端 $x' = L$ の方が右側にある。

上記の O 系の解析結果 (1, 2 番目の場合) をよく見ると、車に乗っている時計で $t' = 0$ となる瞬間については、車の左端が車庫の左端 ($x = 0$) と一致し、また車の右端 ($x = \gamma L$) が車庫の右端 ($x = L$) よりも右側に来ている。この位置関係は、 O' 系から見たもの (3 番目の場合) と一致している。すなわち、 O' 系の $t' = 0$ の瞬間には、車の左端が車庫の左端 ($x' = 0$) と一致し、車の右端 ($x' = L$) は車庫の右端 ($x' = \frac{L}{\gamma}$) よりも右側に来ている。というわけで、 O, O' 系の各地点の時刻まで含めた比較を行うと、どちらの系でも同じ現象が起きていると確認することができた。

なお、車・車庫の長さの関係自体は、 O 系で見ると車庫の方が車よりも長く、 O' 系で見ると車の方が車庫よりも長い、とどちらの系から見るかで逆転している。図 28 のように時空図を書いて O 系における $t = 0$ の瞬間と O' 系における $t' = 0$ の瞬間の比較をしてみると分かりやすいかもしれない。この図からも読み取れるように、上記の実験は全く同じ物体系の互いに異なる部分を見ていることに相当している。

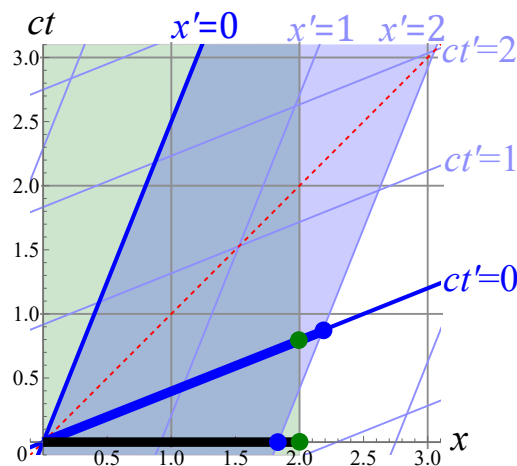


図 28: 「車と車庫のパラドックス」の系の時空図。図中で青・緑の塗りつぶし範囲はそれぞれ車・車庫の軌道に相当する。ただし、車・車庫の静止状態での長さを $L = 2$ とした。静止系 O の時刻 $t = 0$ の瞬間 (図 27a)、運動系 O' の時刻 $t' = 0$ の瞬間 (図 27c) はそれぞれ図中の黒・青の太線部分に対応する。青点・緑点は車・車庫の右端の位置を示している。

7.2.3 ローレンツ収縮の見え方：テレル回転

以上で紹介してきた話は、どれも O, O' 系に張った座標系 $(ct, x), (ct', x')$ を使って物体の運動や形状を調べた場合の話である。しかし、ある地点から運動する物体を眺めたときにどう見えるのかについては、光が物体表面から出て目に届くまでのタイムラグも考慮して改めて解析しないとわからない。そのような、**相対論的現象の実際の見え方**についての解析の一例を紹介しておく。

図 29a のように、眼前を幅 L 、奥行き D の箱が速度 V で移動しているとする。この箱が正面に来たように見えたとき、箱はどのような形状に見えるだろうか。ただし、十分小さな箱が十分遠くにある場合を考える。

まず、箱のこちらを向いている面については、ローレンツ収縮のため幅が $\frac{L}{\gamma(V)}$ に縮まるし、見え方としても実際にその幅で見える。一方、進行方向から見て後ろ側の面から出る光については以下のような見え方をする。解析の都合のため、箱の後端の手前側の角が時刻 $t = 0$ に位置 $x = 0$ にあったと仮定する。

- **手前側の後端角から出た光**: 位置 $x = 0$ から出た光を我々は見ることになるので、そのまま「手前側の角が位置 $x = 0$ にある」ように見える。

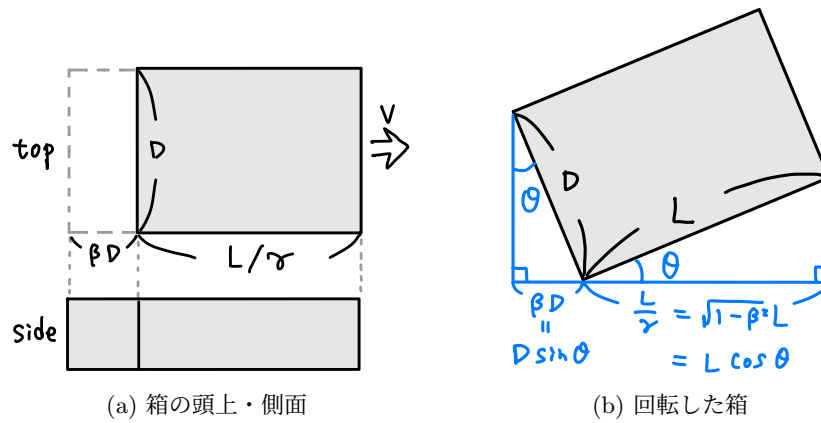


図 29: (a) 速度 V で移動する幅 L , 奥行き D の箱の俯瞰図、および側面の見え方。(b) 角度 θ (ただし $\beta = \sin \theta$) だけ回転した箱。側面から見ると、ちょうど (a) の場合と同じ見え方となる。

- **奥側の後端角から出た光**：箱の奥行きが D だけあるため、手前側の後端角から出た光よりも、奥側の後端角から出た光は目に届くまで D/c だけ余分に時間がかかる。そのため、 $\Delta t = D/c$ だけ過去の位置 $x = -V \times \frac{D}{c} = -\beta D$ から出た光が、手前側の角から出た光と同時に目に届く。見え方としては、奥側の角が位置 $x = -\beta D$ にあるように見える。

箱の後端奥側の角 ($x = -\beta D$) が手前の角 ($x = 0$) よりも左側にあるのだから、箱の奥側の面全体がこちらに見えることになる。こちらに見える形状は図 29a の通りとなるが、これはちょうど箱を $\beta = \sin \theta$ を満たす角度だけ回転させた時の見え方と同じである (図 29b 参照)。ローレンツ収縮した物体が見えるかと思いきや実は回転して見えるだけ、というこの現象は、発案者の名前を取って**テレル回転**と呼ばれる³²。

7.3 シミュレーションによる再現

光速は日常的な物理現象よりも非常に速いため、よほど精密な実験でもしない限りは相対論的効果を実際に見ることは難しい。しかし、シミュレーションを使って相対論的現象が実際にどう見えるかを再現することはできる。本節では、以下のシミュレーター³³を使って以上で説明した諸現象を確認してみることにする。パソコンやスマホ等のブラウザ上で動作する。

1. **道路と球体**: <https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~norihiro.tanahashi/webgl/city>
2. **電車**: <https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~norihiro.tanahashi/webgl/railway>

このシミュレーションの設定は下記の通り。

- 自分の最高速度は、シミュレーション内の単位で 19.99 である。
- 光速の初期値は $c = 30$ で、20 以上の任意の値に設定できる。

光速が自分や運動する物体の速さと同程度だった場合に周りの景色はどう見えるか、などを再現するものである。光速が大きい (もしくは自分の速さが遅い) 場合が非相対論的な場合に、光速が小さく自分や物体の速さに近い場合が相対論的な場合に相当する。

³²光速に近い速度で飛んでくるサッカーボールはどう見えるか、などといった問題もこの章の内容を踏まえるとわかる。

³³MIT Game Lab が制作した特殊相対性理論シミュレーション用ツールキットである [OpenRelativity](#) を修正・改造して作成した。

7.3.1 地表に飛来する宇宙線（地表の立場から）

7.2.1 節で説明した通り、「地表に飛来する宇宙線」の話を宇宙線の立場から見ると、大気層の厚さがローレンツ収縮するために地表までより短時間で到達できる、という状況になる。大気層の代わりに、シミュレーション 1 にある道路を反対側の壁まで走りきるのにかかる時間を見てみる。

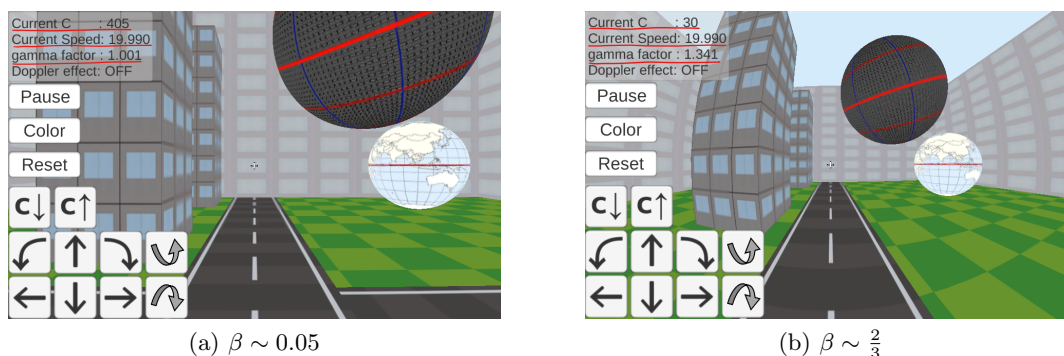


図 30: 速度を $V \sim 20$ に固定し、光速 c を変えて $\beta = \frac{V}{c} \sim 0.05$, $\beta \sim \frac{2}{3}$ とした場合の走行時間の比較。道路を端まで渡りきるのに、前者の方が 1.3 倍ほど時間がかかる。

自分の速度を $V \sim 20$ に固定し、光速 c を変えて $\beta = \frac{V}{c} \sim 0.05$, $\beta \sim \frac{2}{3}$ とした場合に、道路を向こう側の端まで走りきるのに必要な時間の比較を行った際の様子（画面からは所要時間が読み取れないが）図 30 である。速度 V が同じであるにもかかわらず、前者の方が 1.3 倍ほど時間がかかる。これは、後者の場合には $\gamma \sim 1.3$ となっており、その分道路の長さが $\frac{1}{1.3}$ 倍にローレンツ収縮しているのが原因である。先述した宇宙線の話を宇宙線の立場から見た場合に相当する。

7.3.2 車と車庫のパラドックス

7.2.2 節で説明した「車と車庫のパラドックス」は、同じ長さの 2 つの物体がありその片方だけが運動している場合、どちらの物体の方が長く見えるかは観測者の速度次第で入れ替わる、というのが結論だった。これをシミュレーション 2 で確認してみる（図 31）。

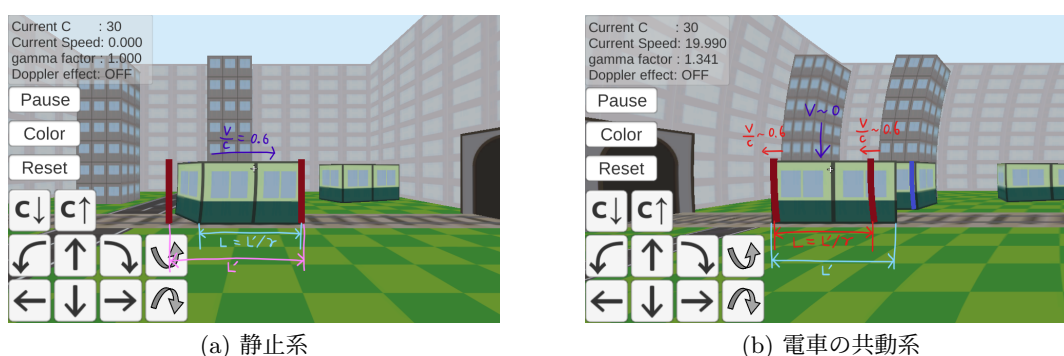


図 31: 速度 $\frac{V}{c} = 0.6$ で走る電車の見え方。(a) 静止系から電車を眺めた場合。この電車については $\gamma^{-1} \sim 0.75$ で、実際その程度長さが短くなって見える。(b) 電車とほぼ同じ速度で運動しながら眺めた場合。逆に、地面に固定してあるポール間の距離の方が短くなって見える。

このシミュレーションでは、電車の静止時の長さと同じ間隔で線路脇にポールが立ててある。電車は $V = 18$, すなわち $\frac{V}{c} = 0.6$ の速度で走っているのだが、静止状態でこの電車を見る場合には

$\frac{1}{\gamma(V)} \sim 0.75$ 倍に電車の側面が短縮して見える³⁴。一方で、電車をそれとほぼ同じ速度で追いかけて、自分の正面に電車とポールが来た瞬間に見ると、逆に地面に立てたポールの間隔の方がローレンツ収縮して電車より短く見える。7.2.2 節でも説明した通り、この2通りの見え方はどちらも物理的に正しい見え方であり、同時性のずれという現象があるおかげで互いに整合的になっている。

7.3.3 テレル回転

7.2.3 節で説明した通り、速度 V で運動する（微小で遠方にある）物体は $\theta = \sin^{-1} \frac{V}{c}$ だけ回転した物体が静止しているときとほぼ同じ見え方をする。

シミュレーション 1 に地球儀が置いてある。静止時にこちら側を向いて見える面を「正面」と呼ぶことにすると、光速が大きく非相対論的な場合は、地球儀が目の中の位置に来た時にはその正面が必ずこちらを向いて見える。一方、自分が光速に近い速度で運動している（もしくは地球儀が光速に近い速度で動く）場合には、地球儀が動いていく方向に対して後ろ側の面がこちらを向くように地球儀が回転して見える（図 32）。一方で、球体が運動していても一見ローレンツ収縮らしき現象は観察されず、単に回転した状態の球体があるように見えている。シミュレーション 2 では、速度 $\frac{V}{c} = 0.6$ の電車と、 $\theta \sim 37^\circ$ 傾けて設置してある電車がおおよそ同じ見え方をしている（図 33）。この場合にテレル回転の回転角が $\theta = \sin^{-1} 0.6 \sim 37^\circ$ となることが原因である。

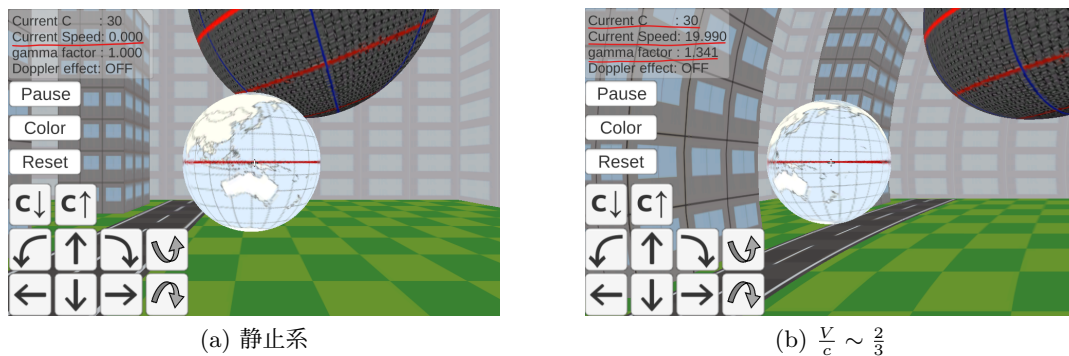


図 32: 地球儀を (a) 静止状態で眺めた場合と、(b) $\frac{V}{c} \sim \frac{2}{3}$ で右向きに走りながら、地球儀が正面に来た瞬間に見た場合。図 (b) では自分に対して地球儀が左向きに動いて見えるが、そのために地球儀が西方向へいくらか回転して見えている。

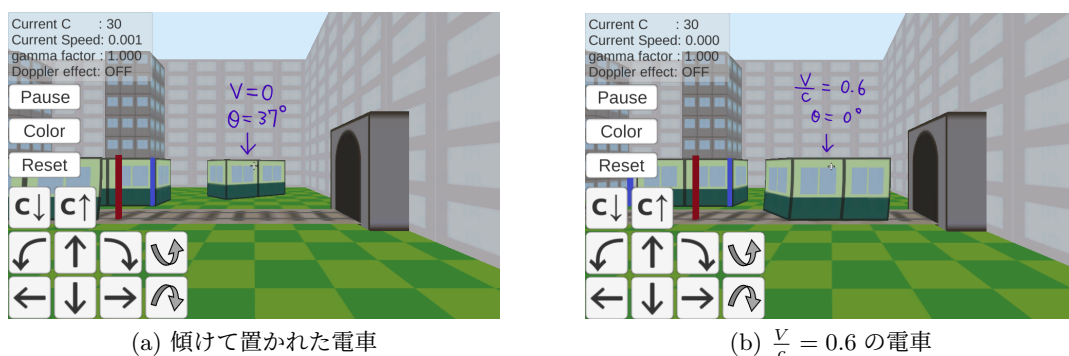


図 33: (a) 線路に対して 37° 傾けた状態で置かれた電車と (b) 速度 $\frac{V}{c} = 0.6$ で走る電車との比較。どちらも正面・側面の長さの比がほぼ同じなため、一見同じ角度だけ回転しているかのように見える。

³⁴7.2.3 節で説明した効果により電車の最後尾の面も同時に見えているので注意が必要。

第8回 共変性の理解に向けて

特殊相対性理論は

特殊相対性原理：どの慣性系においても物理法則は同一である

を最初に仮定することで構築されてきた。物理現象は対象とする物理的実体（点粒子、場など）が従う運動方程式によって記述されるので、この原理は

運動方程式が任意の慣性系で同じ \Leftrightarrow 運動方程式がローレンツ変換で「不変」

ということを意味しそうである。これをどのようにすれば実現できるのか、順を追って理解してみる。

向こうしばらくの間の目標として、相対性理論における運動方程式（点粒子の運動方程式、波動方程式、マクスウェル方程式など）を構築するというのを掲げておく。今回は、そのための準備に相当する内容を解説する。

8.1 ニュートンの運動方程式の共変性

相対論的における運動方程式はどのような性質を持っていないといけないか、というのを考えるために、まずはニュートン力学に立ち返って運動方程式がどのような性質を持っていたかを再確認する。

質量 m で外力 $\mathbf{F}(t)$ のかかる粒子の軌道 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ についてのニュートンの運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(t) \quad (8.1)$$

で与えられる。この方程式は、以下の「不変性」を持つ。

- **ガリレイ不変性**：静止系 (t, \mathbf{x}) から運動系 (t, \mathbf{x}') へ移る座標変換 $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{V}t$ (時間座標 t は変換しない) を式 (8.1) に適用すると

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}'(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(t) \quad (8.2)$$

となる。元の方程式 (8.1) と比べて、空間座標が $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ と静止系から運動系の座標に書き換えられている以外は全く同じ形をしている。すなわち、ニュートンの運動方程式はガリレイ変換に対して不変である。

方程式が同じ形をしているということは、同じ初期条件を与えて方程式を解いた際の解も $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ の置き換えだけすれば互いに一致する。物理的には、静止系と運動系における粒子の運動の性質にまったく差がなく、実験によって静止系・運動系のどちらにいるかを区別することはできない、ということの意味する。粒子の運動に関する物理法則はどの慣性系でも同じである、ということもできるだろう。

- **並進・回転に対する共変性**：今度は、式 (8.1) を書き表すときに使う座標を次のように取り換えると何が起こるか見てみよう。
 - － **並進**：座標系 \mathbf{x} の原点を定数ベクトル $\Delta \mathbf{x}$ だけずらした座標系 \mathbf{x}' は、 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \Delta \mathbf{x}$ という座標変換で関係づいている。この座標変換に基づいて \mathbf{x}' 座標系における運動方程式を書き下すと $m \frac{d^2 \mathbf{x}'(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(t)$ となり、元の式 (8.1) と同じ形の方程式となる。これを**運動方程式 (8.1) は並進不変性を持つ**と言い、物体の運動法則は空間のどの点を基準点にして位置を測っても同じ、という（当然の）物理的性質と対応している。

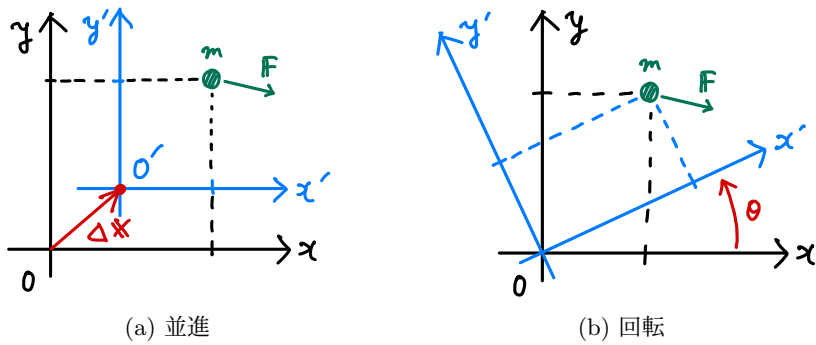


図 34: 並進・回轉變換された座標系における粒子の運動の記述。粒子の位置や外力 \mathbf{F} の向きは変化せず、座標系の方が変化している。

- **回転**: 簡単のため、空間の 2 次元部分 (x, y) だけ考える。元の座標系を角度 θ だけ回転させた座標系 (x', y') を考えたとき、運動方程式 (8.1) はどのような形になるだろうか。

まず、図 34b も参考にしつつ調べると、新旧座標は次のように関係づけることができる:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \Leftrightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} . \quad (8.3)$$

座標同士の関係に加えて、外力ベクトル \mathbf{F} の成分も同様に変換される。点粒子の位置座標は原点からの位置ベクトルを使って表せるが、 \mathbf{F} の成分も位置ベクトルと同じ変換に従う。

$$\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{F}' = \mathbf{R}\mathbf{F} . \quad (8.4)$$

逆に $\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}'$, $\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}'$ が成立するので、式 (8.1) は次のように書き換えられる:

$$m \frac{d^2(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}')}{dt^2} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}' \Leftrightarrow \mathbf{R}^{-1} \left(m \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} \right) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}' . \quad (8.5)$$

もちろん、この式の左側から \mathbf{R} を作用させれば \mathbf{x}' 座標系における運動方程式が

$$m \frac{d^2\mathbf{x}'(t)}{dt^2} = \mathbf{F}'(t) \quad (8.6)$$

と得られる。方程式の形自体は、回轉變換を課す前の式 (8.1) と同じである。回転された座標系 \mathbf{x}' でも物体の運動についての力学法則は同じ、ということを意味する。

ガリレイ変換や並進の場合には、方程式の各項の値が変換前後で変化せず、そのために元と同じ形の運動方程式がそのまま成立していた。一方で、回轉變換の場合は方程式の各項に \mathbf{R}^{-1} がかった形の方程式 (8.5) が出てきた。もちろん最終的には元と同じ形の方程式 (8.6) に書き換えられた訳だが、そうできた理由は方程式の各項が変化しなかったからではなく、全ての項がちょうど同じ分 (\mathbf{R}^{-1}) だけ変換したからである。

このように、ある方程式に何らかの変換をかけたときに、個々の項は変化するものの、**全ての項が同じ分だけ変換するために変換前と同じ形の方程式が成立する場合**、その方程式は**共変性**を持つという。

物理学における運動方程式が共変的であれば、変換の前後で運動方程式が同じ形をとるので、その運動方程式が記述する物理法則も変換の前後で変化しない。今回の例でいうと、もともとの座標系と回転された座標系のどちらから見ても物理法則は同じである、ということになる。

8.2 相対論的運動方程式を作るには

冒頭で述べた通り、特殊相対性原理が成り立つということは、相対性理論における運動方程式がローレンツ変換に対して「不変」である、ということの意味する。そのような運動方程式をどのようにしたら作れるかを考えてみよう。

8.2.1 ニュートン力学がローレンツ不変でないこと

まず、準備としてニュートン力学の方程式がローレンツ変換で不変でないことと、そのために相対論においてはニュートン力学の方程式は全ての慣性系で成立する方程式とはなっていないことを本節で確認する。

ニュートンの運動方程式(8.1)について考えてもよいのだが、説明がやや煩雑になる³⁵。そこで、ニュートンの運動方程式を時間積分したものに相当する**運動量保存則**に注目してみる。質量 $m_0 = m_1 + m_2$ 、速度 \mathbf{v}_0 の粒子が質量 m_1, m_2 、速度 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の2粒子に分裂するとき、分裂前後での運動量保存則は

$$m_0 \mathbf{v}_0 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 . \quad (8.11)$$

ニュートンの運動方程式がガリレイ不変だったことに対応して、この**運動量保存則もガリレイ不変**となる。したがって、**ニュートン力学において運動量保存則(8.11)は任意の慣性系で成立する**。

ガリレイ変換 $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{V}t$ によって速度は $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ と書き換えられるので、式(8.11)は

$$m_0(\mathbf{v}'_0 + \mathbf{V}) = m_1(\mathbf{v}'_1 + \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{v}'_2 + \mathbf{V}) \Leftrightarrow m_0 \mathbf{v}'_0 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 \quad (8.12)$$

と変形される。この式は元の運動量保存則(8.11)について $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'$ と置き換えた式になっており、式の形自体はガリレイ変換前後で変化していない。

³⁵ ニュートンの運動方程式(8.1)が元とは別の慣性系ではどのような方程式に見えるか確かめてみよう。この式の左辺は位置座標 \mathbf{x} と時間微分 d/dt でできているが、この時間・空間微分はローレンツ変換(8.17)に従う。この変換前の粒子の軌道が $x = X(t)$ 、変換後の軌道が $x' = X'(t')$ で与えられるとする。まず、粒子の軌道の式にローレンツ変換を適用すると

$$x = X(t) \Rightarrow \gamma(\beta ct' + X'(t')) = X(\gamma(ct' + \beta x')) . \quad (8.7)$$

この式の両辺を変換後の時間座標 t' で微分し、式を整理して $\frac{dX'(t')}{dt'}$ を求めると

$$\frac{dX'(t')}{dt'} = \frac{\frac{dX(t)}{dt} - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c} \frac{dX(t)}{dt}} . \quad (8.8)$$

これは、元の系での粒子速度 $\frac{dX(t)}{dt}$ から速度 $V = \beta c$ を引いたときの相対論的な速度の合成則の式そのものである。この式を t' でもう一度微分し、式を整理すると

$$\frac{d^2 X'(t')}{dt'^2} = \frac{1}{\left[\gamma(\beta) \left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dX(t)}{dt} \right) \right]^3} \frac{d^2 X(t)}{dt^2} \quad (8.9)$$

となることを示せる。したがって、ローレンツ変換後にニュートンの運動方程式が成立するとき ($m \frac{d^2 X'(t')}{dt'^2} = F'$)、変換前の慣性系では次のような式が成立することになる：

$$m \frac{d^2 X'(t')}{dt'^2} = F' \Rightarrow \frac{m}{\left[\gamma(\beta) \left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dX(t)}{dt} \right) \right]^3} \frac{d^2 X(t)}{dt^2} = F' . \quad (8.10)$$

右辺に現れる力 F' を逆ローレンツ変換したものが F であるが、これは逆変換前の力の値 F' とローレンツ変換に現れる速度 $V = \beta c$ だけに依存し、粒子の速度 $\frac{dX(t)}{dt}$ には依存しないと考えるのが自然である。したがって、式(8.10)は、少なくとも粒子速度 $\frac{dX(t)}{dt}$ に依存した係数が左辺に現れている分、本来のニュートンの運動方程式 $m \frac{d^2 X(t)}{dt^2} = F$ とは異なる式となっている。ニュートンの運動方程式がローレンツ変換に対して共変的でない、と言ってもよい。

なお、粒子の運動量をあえて $\mathbf{p} = \gamma(v)m\mathbf{v}$ と修正して得られる運動方程式 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ は、ローレンツ変換に対して不変となることが示せる。このようなローレンツ不変な方程式を自然な形で導出するのが今後の目標である。

では、運動量保存則 (8.11) が相対論でも通用するかを確認してみる。相対論においてはガリレイ変換の代わりにローレンツ変換を使う必要があり、それに従うと**相対論的な速度の合成則**

$$v \rightarrow \frac{v+V}{1+\frac{vV}{c^2}} \equiv v' \quad (8.13)$$

によって変換後の速度 v' が得られるのであった。ただし、簡単のため速度 \mathbf{v} と \mathbf{V} が同じ向きを向いていることを仮定して、その方向の速度の成分をそれぞれ v, V と書いた。この変換則を運動量保存則の両辺それぞれに適用すると

$$(\text{左辺}) = m_0 \frac{v_0 + V}{1 + \frac{v_0 V}{c^2}}, \quad (\text{右辺}) = m_1 \frac{v_1 + V}{1 + \frac{v_1 V}{c^2}} + m_2 \frac{v_2 + V}{1 + \frac{v_2 V}{c^2}}. \quad (8.14)$$

各項の分母は速度 v, v_1, v_2 に依存しているため、各項ごとに値が異なる。したがって、ローレンツ変換前の慣性系で運動量保存則 $m_0 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$ が成立していたとすると、**ローレンツ変換で移った先の慣性系では運動量保存則が成立しない**。また、各項ごとに別の係数が現れてしまうということで、**運動量保存則がローレンツ変換に対して共変的でない**ことも見て取れる。これが全ての慣性系で運動量保存則が成立してくれない数学的な原因である。

8.2.2 ローレンツ不変な方程式の構築法

ニュートン力学に出てくる方程式はローレンツ変換に対して不変ではなく、そのためにニュートン力学における法則がある慣性系で成立していたとすると別の慣性系では成立しなくなってしまうことが前節で示された。ここで、もし**ローレンツ変換に対して共変的な運動方程式**を作ることができれば、ローレンツ変換で移り合える全ての慣性系で同じ形の方程式が成立するため、物理法則もすべての慣性系で同じとなる。本節では、そのような**ローレンツ不変な運動方程式の構築法**を考えていく。

そのために、ニュートン力学の回転変換に対する共変性について説明した 8.1 の内容を改めて注意深く見てみる。回転変換に対してニュートンの運動方程式 (8.1) が同じ形をとる (共変) という性質が出てきたのは、その式の全ての項が回転行列 \mathbf{R}^{-1} がかかる形で変換されたからであった。特に、運動方程式の左辺は

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2} \cdot \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{m \frac{d^2}{dt^2}}_{\text{不変}} \cdot \underbrace{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}'}_{\mathbf{x} \text{ から変換}} \quad (8.15)$$

のように、回転変換で変化しない部分 ($m \frac{d^2}{dt^2}$) と、回転行列がかかる形で変換する部分 ($\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}'$) で構成されている。右辺の \mathbf{F} はベクトルとしての変換 ($\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}'$) をするわけだが、これがちょうど位置ベクトル \mathbf{x} と同じ変換性を持つので、方程式に現れる全ての項が同じ分だけ変換する (共変) という性質が現れたのであった。

以上を踏まえると、以下のような教訓が得られるであろう。

- ある運動方程式に何らかの変換 (上記の例では回転、今後考える例ではローレンツ変換) を適用するとき、**同じ変換性を持つ項だけで方程式を構成すれば (定義より) 方程式は共変的**となる。
- それを実現するためには、方程式の各項を構成する各パーツ (上の例では $m, \frac{d}{dt}, \mathbf{x}$ など) の変換性を調べておき、項全体として正しい変換性を示すようにそれらの各パーツを適切に組み合わせる必要がある。

上記の例で言うと、右辺に現れる $\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}'$ と同じ変換性を示す項を作るためには、位置ベクトル $\mathbf{x} (= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}')$ を一つと、回転変換で変化しない量 ($m, \frac{d}{dt}$) を組み合わせればよい。方程式

に出てくる $m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}$ 以外にも、例えば $m, \frac{d}{dt}$ を複数個と \mathbf{x} を一つだけ使って作られた $m^2 \frac{d^3}{dt^3} \mathbf{x}$ のような項を方程式に足した場合でも回転変換に対する共変性は保たれる。

この教訓に基づいて、ローレンツ変換に対して共变的に振る舞う運動方程式を構築するための準備を次の節から始めていく。

8.3 ローレンツ変換に対するスカラー・ベクトル・テンソル

回転変換の例では、回転変換に対して変化しない量 ($m, \frac{d}{dt}$) と、ベクトルのように回転行列がかかる形で変化する量 (\mathbf{x}, \mathbf{F}) が方程式の構成要素として使われていた。相対論においてある慣性系から別の慣性系に移るためにはローレンツ変換を使う必要があるが、単純に考えると回転変換の例で見たような方程式の作り方がこの場合でもできそうである。そのためには、運動方程式に現れそうな種々の物理量のローレンツ変換に対する変換性を整理しておくことと便利である。本節では、ローレンツ変換に対する変換性で分類された量であるスカラー・ベクトル・テンソルと、そのために必要となる数学的道具立てを順次導入する。

8.3.1 準備：テンソル表記

これまで考えてきたローレンツ変換は4次元時空の座標についての変換であるが、これを描き表す際に便利な記法をいくつか導入しておく。

- 時空点の座標を

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (8.16)$$

と表す。 μ は 0, 1, 2, 3 の値を取る添え字であり、 μ に特定の値を入れた場合には座標の特定の成分を表すものとする (例: $x^2 = y$)。添え字としてはギリシャ文字 ($\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots$) を用いる。

- x^μ のように、4次元座標 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ に対応する4成分を持つベクトル量を4元ベクトルと呼ぶ。4次元的位置ベクトル x^μ は4元ベクトルの一例。

- テンソル表記 / アインシュタインの規約：

座標 x^μ についてのローレンツ変換は

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

と表せる。毎回このように行列表示していると大変なので、以下のような表記法を導入する³⁶。まず、式 8.17 を

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (8.18)$$

と書き表す。ただし、式中に現れる $\Lambda^\mu{}_\nu$ はローレンツ変換行列の成分を表したもので、以下の式で与えられる。例えば $\Lambda^1{}_0 = -\gamma\beta$ 。第1添え字 μ を上の位置、第2添え字 ν を下の位置に書いてある意味は後で説明する。

$$\underbrace{\left(\begin{matrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{matrix} \right)}_{\mu=0,1,2,3} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.19)$$

³⁶ 第4回のノートで使っていた表記法と少しだけ異なるので注意。

さらに、式 (8.18) に出てくる和記号 $\sum_{\nu=0}^3$ を省略して以下のように書くことにする：

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \left(= \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \right) \quad (8.20)$$

すなわち、上・下の添え字で同じ文字のペアがある場合、その添え字に 0, 1, 2, 3 を順次代入して和をとるものとする。このような式の書き方のことを**アインシュタインの規約**と呼んでいる。式 (8.20) はあくまで行列表記で書かれた式 (8.17) を別の書き方で書いたものに過ぎないので注意。

例) $x'^0 = \Lambda^0_{\mu} x^{\mu} = \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1 + \Lambda^0_2 x^2 + \Lambda^0_3 x^3 = \gamma x^1 - \gamma \beta x^2 + 0 \times x^2 + 0 \times x^3 = \gamma (ct - \beta x)$.
 行列表記で書かれている式 (8.17) の $x^0 = ct'$ 成分を書き下したものに相当する。

8.3.2 スカラー・ベクトル・テンソル

式 (8.20) のとおり、4次元的な位置ベクトル x^{μ} はローレンツ変換行列 Λ^{μ}_{ν} がかかる形で変換することが分かった。回転変換の場合の式 (8.3) と式の形自体は同様である。この x^{μ} と同じ変換性を示す物理量以外にも、例えばローレンツ変換に対して不変な量（世界間隔 ds^2 など）も存在する。そこで、ローレンツ変換に対する変換性で分類された量（スカラー・ベクトル・テンソル）を以下で順次導入する。

- **スカラー**：4次元座標 x^{μ} の関数 $\phi(x^{\mu})$ があり、それがローレンツ変換に対して

$$\phi'(x'^{\mu}) = \phi(x^{\mu}) \quad (8.21)$$

のように値が変化しない場合、その関数 $\phi(x^{\mu})$ をローレンツ変換についての**スカラー**と呼ぶ。ただし、 x'^{μ} は元の座標 x^{μ} と同じ点を表す座標で、 x^{μ} をローレンツ変換したもの ($x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$)。

例) 世界間隔 $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2$ はローレンツ変換に対して

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 = -(cdt')^2 + dx'^2 = ds'^2$$

 となり、その値が変化しない。したがって、ローレンツ変換に対して**世界間隔 ds^2 はスカラー**として振る舞う。また、世界間隔から定義される**固有時間 $d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2}$ もスカラー**である。粒子の静止状態での質量 m や、完全流体の静止系における密度 $\rho(x^{\mu})$ ・圧力 $P(x^{\mu})$ なども、定義によりスカラー量となる。

- **反変ベクトル**：位置ベクトル x^{μ} のローレンツ変換 (8.20) と同じ形で変換する量、すなわち4成分を持つベクトル量 $V^{\mu}(x^{\nu})$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) で、ローレンツ変換を適用した際に

$$V'^{\mu}(x'^{\rho}) = \Lambda^{\mu}_{\nu} V^{\nu}(x^{\rho}) \quad (8.22)$$

のように振る舞う量を**反変ベクトル**と呼ぶ。「反変」という文言が名前についている理由は、後ほどこれとは異なる変換性を示すベクトル量をもう一種類導入するためである。

反変ベクトルの添え字は上の位置に書くのがルール。 x^{μ} 自身も反変ベクトルの一例である。

ちなみに、ローレンツ変換の式 (8.20) の両辺の微分を取ると

$$\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} = \right) dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} dx^{\nu} \quad (8.23)$$

 となる。最左辺の青字部分は、 x'^{μ} を変換前の座標 x^{μ} の関数 $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$ だと思って微分のチェインルールを適用した式。したがって、ローレンツ変換を考える際、変換行列 Λ^{μ}_{ν} は

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad (8.24)$$

 のように座標間の変換行列として書くこともできる。

- **共変ベクトル**：4成分を持つベクトル量 U_μ で、ローレンツ変換に対して

$$U'_\mu(x'^\rho) = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu U_\nu(x^\rho) \quad (8.25)$$

と振る舞うものを**共変ベクトル**と呼ぶ³⁷。ただし、 $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$ は $\Lambda^\mu{}_\nu$ (式 (8.19)) の逆行列で

$$\begin{pmatrix} (\Lambda^{-1})^0{}_0 & (\Lambda^{-1})^0{}_1 \\ (\Lambda^{-1})^1{}_0 & (\Lambda^{-1})^1{}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad (\Lambda^{-1})^2{}_2 = (\Lambda^{-1})^3{}_3 = 1 \quad (8.26)$$

と、 $\Lambda^\mu{}_\nu$ について速度を反転 ($\beta \rightarrow -\beta$) した式で与えられる。

共変ベクトルの添え字は下の位置に書くのがルール。

重要な例としては、**微分演算子** $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ は**共変ベクトル**として振る舞う。

$$\left[\begin{array}{l} (\cdot) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ について変数変換 } x^\mu \rightarrow x'^\mu \text{ を行うと、微分のチェインルールより} \\ \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} . \\ \text{ただし、座標変換行列と } \Lambda \text{ との関係式 (8.24) を使った。} \end{array} \right]$$

- **テンソル**：ベクトルは添え字を一つだけ持つ4成分の量だったが、行列のように複数の添え字・成分を持つ量も存在する。その一例として、ローレンツ変換に対して以下のように変換する量

$$T'^{\mu\nu}(x'^\rho) = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}(x^\rho) \quad (8.27)$$

が存在したとき、 $T^{\mu\nu}$ を **(2階反変) テンソル**と呼ぶ。反変ベクトルの成分が行列に拡張されたものである。このほかに、

$$T'_{\mu\nu}(x'^\rho) = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu T_{\alpha\beta}(x^\rho), \quad (8.28)$$

は **2階共変テンソル**と呼ばれる³⁸。名前はさておき、**添え字の位置(上下)に応じて用いるべきローレンツ変換行列 Λ, Λ^{-1} が決まるのが重要な点**である。

$$\left[\begin{array}{l} \text{【例】反変ベクトル2つの積 } (V^\mu V^\nu, x^\mu x^\nu \text{ など}) \text{ は2階反変テンソル、共変ベクトル2つの積} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \text{ など} \right) \text{ は2階共変テンソルである。他の重要な例もあるが、今後随時導入する。} \end{array} \right]$$

【今後の方針】 以上で述べたスカラーやベクトルなどを組み合わせることで、普通の運動方程式に現れるような物理量で、なおかつローレンツ変換に対してスカラーないしベクトルとして振る舞う量を作ることができる。その一例は、運動する粒子の位置座標 $x^\mu = x^\mu(t)$ (ベクトル) と、その軌道に沿って測った粒子の固有時間 τ (スカラー) を合わせて作った **4元速度** u^μ ：

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \quad (8.30)$$

で、これは反変ベクトルとして振る舞う ($u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu$)。このような物理量を作っておき、同じ変換性を持つ量だけを使って式を組めば、ローレンツ変換に対して共变的に振る舞う運動方程式を容易に構築できる。次回以降の講義で、そのような方針に基づき**相対論的力学**などの構築を進める。

³⁷ 「共変」という言葉の由来は、座標を張る際に用いた基底ベクトルが式 (8.25) と同じ変換をするため、式 (8.25) に従うベクトル U_μ のことを「基底ベクトルと共通の変換をする」という意味を込めて「共変ベクトル」と呼ぶことにした、というものである。これをはじめとして、基底ベクトルを導入して説明したほうがすっきりする箇所もあるが、本講義では割愛する。

³⁸ これらのほかに

$$T'^\mu{}_\nu(x'^\rho) = \Lambda^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu T^\alpha{}_\beta(x^\rho), \quad T'^\nu{}_\mu(x'^\rho) = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \Lambda^\nu{}_\beta T^\alpha{}_\beta(x^\rho) \quad (8.29)$$

のようなテンソルも存在し、2階混合テンソルと呼ばれる。

第9回 相対論的力学の構築

9.1 復習と補遺：スカラー・ベクトル・テンソル

9.1.1 定義と例

ローレンツ変換 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) に対する変換性に応じてスカラー・ベクトル・テンソル (単にテンソルと総称する) を以下のように定義する。添字の個数はテンソルの階数と呼ばれる。

$$\begin{aligned} \text{スカラー:} & \quad \phi'(x'^{\rho}) = \phi(x^{\rho}) \\ \text{反変ベクトル:} & \quad V'^{\mu}(x'^{\rho}) = \Lambda^{\mu}_{\nu} V^{\nu}(x^{\rho}) \\ \text{共変ベクトル:} & \quad U'_{\mu}(x'^{\rho}) = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} U_{\nu}(x^{\rho}) \\ \text{2階テンソル:} & \quad T'^{\mu\nu}(x'^{\rho}) = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} T^{\alpha\beta}(x^{\rho}), \quad T'_{\mu\nu}(x'^{\rho}) = (\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\mu} (\Lambda^{-1})^{\beta}_{\nu} T_{\alpha\beta}(x^{\rho}), \\ & \quad T'^{\mu}_{\nu}(x'^{\rho}) = \Lambda^{\mu}_{\alpha} (\Lambda^{-1})^{\beta}_{\nu} T^{\alpha}_{\beta}(x^{\rho}), \quad T'_{\mu}{}^{\nu}(x'^{\rho}) = (\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\beta} T_{\alpha}{}^{\beta}(x^{\rho}) \end{aligned}$$

- 世界間隔 ds^2 はスカラー：

$$ds'^2 = -(cdt')^2 + |d\mathbf{x}'|^2 = -(cdt)^2 + |d\mathbf{x}|^2 = ds^2. \quad (9.1)$$

世界間隔を用いて計算される固有時 $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}$, 固有長 $dl = \sqrt{ds^2}$ もスカラーとなる。

- 位置座標 x^{μ} は反変ベクトル：

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \left(= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu} \right). \quad (9.2)$$

この式から、ローレンツ変換を考えるときは $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ と書ける。

- 偏微分 $\partial/\partial x^{\mu}$ は共変ベクトル：

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}. \quad (9.3)$$

偏微分が共変ベクトルであることを明示するためにも、 $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ と略記することがある。

9.1.2 テンソル計算

テンソルについての計算は、ベクトルや行列について行える計算を拡張したもので与えられる。

- 加法：同じ型のテンソルは互いに足し合わせることができる。

$$\text{例) } aV^{\mu} + bU^{\mu} = W^{\mu}, \quad aT_{\mu\nu} + bU_{\mu}V_{\nu} = S_{\mu\nu} \quad (a, b: \text{スカラー}) \quad (9.4)$$

- 積：スカラー・ベクトル・テンソルの積を取ると、より高階のテンソルが得られる。

$$\text{例) } aU_{\mu}V_{\nu} = T_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu}V^{\rho} = S_{\mu\nu}{}^{\rho} \quad (9.5)$$

- 微分：微分演算子 ∂_{μ} は共変ベクトルとして振る舞うが、これをテンソルに作用させたものは階数の一つ高いテンソルとなる。

$$\text{例) } \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} = T_{\mu}{}^{\nu} \quad (a: \text{スカラー}) \quad (9.6)$$

- 縮約：一つの項の中で、反変添字（上付き）と共変添字（下付き）に同じ文字を一つずつ入れたとき、その添字に 0, 1, 2, 3 を入れて和を取る（**アインシュタインの規約**）。ベクトルの内積の計算と類似しているが、上付き・下付き添字のペアについて和をとるのが特徴。

$$\text{例) } V_{\mu}W^{\mu} \equiv \sum_{\mu=0,1,2,3} V_{\mu}W^{\mu} \quad (9.7)$$

- **縮約** → **テンソル型の変化**：あるテンソルについて縮約を行ったとき、そのテンソルの型（スカラー、反変・共変ベクトル/テンソルなど）は、縮約されずに残っている添字で決定される。そのため、縮約するとテンソルの階数が減少する。

例) 反変テンソル $T^{\mu\nu}$ と共変ベクトル V_ν を縮約した $T^{\mu\nu}V_\nu$ は反変ベクトルになる。

$$\left[\begin{array}{l} (\because) T^{\mu\nu}V_\nu \text{ を構成する各要素にローレンツ変換をかけると以下のように振る舞う：} \\ T'^{\mu\nu}V'_\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\gamma{}_\nu V_\gamma = \Lambda^\mu{}_\alpha \underbrace{(\Lambda^{-1})^\gamma{}_\nu \Lambda^\nu{}_\beta}_{=\delta^\gamma{}_\beta} T^{\alpha\beta} V_\gamma = \Lambda^\mu{}_\alpha T^{\alpha\beta} V_\beta \quad (9.8) \\ \text{この式はテンソル } T^{\alpha\beta}V_\beta \text{ が反変ベクトルとして振る舞っていることを示す。縮約された添字} \\ \nu \text{ について、ローレンツ変換で生じる変換行列 } \Lambda^\nu{}_\beta \text{ がちょうど打ち消し合って消えるのがこ} \\ \text{の性質の起源である。} \end{array} \right.$$

特に、添字がすべて縮約されたテンソル量はスカラーとして振る舞う (例: $V_\mu U^\mu$ はスカラー)。

9.1.3 計量テンソル

[計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$] 4次元座標を $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ と書くこと、およびアインシュタインの規約を用いると、世界間隔 ds^2 を次のように書き表すことができる：

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_{\mu, \nu=0,1,2,3} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (9.9)$$

ただし、 $\eta_{\mu\nu}$ は以下で定義される計量テンソルである (単に「計量」とも呼ぶ)³⁹：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & [(\mu\nu) = (00)] \\ +1 & [(\mu\nu) = (11), (22), (33)] \\ 0 & [\text{その他の成分}] \end{cases} \Leftrightarrow \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.10)$$

また、計量 $\eta_{\mu\nu}$ の逆行列を $\eta^{\mu\nu}$ と書くことにする。 $\eta^{\mu\nu}$ は以下を満たす。

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\rho, \quad \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \quad (9.11)$$

$\delta^\mu{}_\nu$ は $\mu = \nu$ ならば 1, $\mu \neq \nu$ ならば 0 となるクロネッカーのデルタ記号で、単位行列に対応する。式 (9.10) の行列表示からもわかるとおり、逆行列 $\eta^{\mu\nu}$ の成分は $\eta_{\mu\nu}$ と全く同じである。

[計量 $\eta_{\mu\nu}$ と世界間隔 ds^2 のローレンツ不変性] 計量は2階共変テンソルなので、ローレンツ変換した場合の成分は $\eta'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta}$ で与えられる。さらに、この計量はローレンツ変換で成分が不変という性質がある：

$$\eta'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}. \quad (9.12)$$

この性質を使うと、ローレンツ変換で世界間隔 ds^2 の表式が不変に保たれることが示せる⁴⁰。

³⁹ このテンソルの名前に「計量」とついているのは、 $\eta_{\mu\nu}$ の成分の値が dx^μ 方向の世界間隔 $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ の大きさを決めているためである。大雑把には、長さを測る物差しのようなものがあつた時、 dx^μ が物差しに書いてある目盛り、 $\eta_{\mu\nu}$ の成分の値が実際の物理的な長さに対応している。なお、この計量はゆがみのない平坦な時空における計量である。

⁴⁰ 式 (9.12) を使うと、ローレンツ変換で世界間隔 ds^2 は以下のように振る舞うことが分かる：

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} ((\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha dx'^\alpha) ((\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta dx'^\beta) = (\eta_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta) dx'^\alpha dx'^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = ds'^2. \quad (9.13)$$

2番目の等号ではローレンツ逆変換の式 ($dx^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha dx'^\alpha$)、4番目の等号では計量 $\eta_{\mu\nu}$ がローレンツ変換で不変であること (式 (9.12)) を用いた。この式の最初の状態 ($ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$) と最後の状態 ($ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu$) を見比べると、座標を $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ と置き換えた以外は全く同じ式になっている。世界間隔 ds^2 の表式がローレンツ不変で、どの慣性系でも同じ表式で与えられるということを表している。これらの式を成分で書き下したのが式 (9.1) で、ローレンツ変換で式の形が変わっていないことが見て取れる。

逆に、計量 $\eta_{\mu\nu}$ を先に定義しておいて、それを不変に保つ変換を導出することでローレンツ変換を構築することもできる。 $\eta_{\mu\nu}$ とそれを使って計算される世界間隔 ds^2 をまず導入しておき、光速不変の原理を成立させるためには $\eta_{\mu\nu}$ がどの慣性系でも不変でなければならない、ということを使ってローレンツ変換を構築することになる。

[反変/共変成分の変換、内積] ある反変ベクトル V^μ があったとき、計量 $\eta_{\mu\nu}$ と縮約することで、ベクトル V の共変成分 V_μ が得られる。同様に、ある共変ベクトルがあったとき、計量の逆 $\eta^{\mu\nu}$ と縮約することで、ベクトル U の反変成分 U^μ が得られる⁴¹：

$$V^\mu \rightarrow V_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} V^\nu, \quad U_\mu \rightarrow U^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} U_\nu. \quad (9.14)$$

例えば、2つのベクトル V^μ, U^μ の内積 $\eta_{\mu\nu} V^\mu U^\nu$ は以下のように書き表すことができる。

$$\eta_{\mu\nu} V^\mu U^\nu = V_\mu U^\mu = V^\mu U_\mu = -V^0 U^0 + V^1 U^1 + V^2 U^2 + V^3 U^3. \quad (9.15)$$

特に、世界間隔 ds^2 は dx^μ のそれ自身との内積（ノルムの2乗）で与えられ、以下のように書ける：

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu = dx^\mu dx_\mu = -(dx^0)^2 + |d\mathbf{x}|^2 = -(cdt)^2 + |d\mathbf{x}|^2. \quad (9.16)$$

9.2 4元速度、4元運動量

以上で述べたテンソル量を組み合わせることで、普通の運動方程式に現れるような物理量で、なおかつローレンツ変換に対してテンソルとして振る舞う量を作ることができる。その後、同じ変換性を持つテンソル量だけを使って式を組めば、ローレンツ共変な運動方程式を容易に構築できる。そのための準備として、粒子の運動を記述するのに必要となる**速度・運動量に対応するベクトル**を導入する。

- **4元速度 u^μ** ：時間座標 t はローレンツ変換に対するスカラー量ではないので、ニュートン力学における速度 $\frac{dx}{dt}$ もベクトルとして振る舞わない。ニュートン力学がローレンツ不変でないのもこれが原因であった。一方、**時間座標に対応するスカラー量は固有時間 $d\tau$** である。そこで、運動する粒子の4次元的位置座標 $x^\mu = x^\mu(\tau)$ とその軌道に沿った固有時間 τ を組み合わせて作られる**4元速度 u^μ** を

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \quad (9.17)$$

と定義すると、通常速度 $\frac{dx}{dt}$ に対応し、かつ反変ベクトルとして振る舞う量を得られる：

$$u'^\mu = \frac{dx'^\mu(\tau)}{d\tau'} = \frac{d\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu(\tau)}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu. \quad (9.18)$$

[u^μ の性質] 通常時間・空間座標を用いて定義される3次元的速度 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$, $\beta = \mathbf{v}/c$ を用いると、 u^μ の分母に入っている固有時間は以下のように書ける：

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c} \sqrt{(cdt)^2 - d\mathbf{x}^2(t)} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2} dt = \sqrt{1 - \beta^2} dt = \frac{1}{\gamma(\beta)} dt \quad (9.19)$$

したがって、 u^μ の成分は

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} = \gamma(\beta) \frac{dx^\mu(\tau)}{dt} = \gamma(\beta) \left(\overbrace{\frac{d(ct)}{dt}}^{\mu=0}, \overbrace{\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}}^{\mu=1,2,3} \right) = \gamma(\beta) (c, \mathbf{v}(t)). \quad (9.20)$$

非相対論的極限 ($|\beta| \ll 1, \gamma \rightarrow 1$) で u^μ の空間成分 $\gamma\mathbf{v}$ は通常速度 \mathbf{v} に一致する。

また、式 (9.20) を使うと4元速度の2乗 $u^\mu u_\mu$ は必ず定数 $-c^2$ になると示せる⁴²：

$$u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma^2(\beta) (-c^2 + |\mathbf{v}|^2) = -c^2 \gamma^2(\beta) (1 - \beta^2) = -c^2. \quad (9.21)$$

3次元速度 \mathbf{v} がどの値でもこの式が成立するので、 u^μ の4成分のうち独立なのは3成分だけである。 u^μ の空間成分に含まれる \mathbf{v} の選び方の自由度に相当する。

⁴¹反変ベクトル V^μ はベクトル V の基底 e_μ についての成分、共変ベクトル V_μ は同じベクトル V の双対基底 ω^μ ($e_\mu \cdot \omega^\nu = \delta_\mu^\nu$) についての成分なのだが、詳細についての解説は本講義では割愛する。

⁴²ただし、光をはじめとする静止質量がゼロの粒子については $u^\mu u_\mu = 0$ となる。今後の講義で解説する。

- **4元運動量** p^μ : ニュートン力学では (運動量)=(質量)×(速度) と与えられたが、これを参考にして運動量に相当する4元ベクトルを構築してみよう。粒子が静止して見えるような慣性系で測った粒子の質量 m_0 (静止質量と呼ぶ) は、定義によりどの慣性系でも一定値を取るため、スカラーとして振る舞う。そこで、静止質量 m_0 と4元速度 u^μ をかけたものを

$$p^\mu = m_0 u^\mu = (m_0 \gamma c, m_0 \gamma \mathbf{v}(t)) \equiv \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (9.22)$$

と定義すると、これは反変ベクトルとして振る舞う。このベクトル p^μ を **4元運動量** と呼ぶ。また、最後の等号で定義した E, \mathbf{p} はそれぞれ **相対論的なエネルギー・運動量** だが、その性質については以下で説明する。

[p^μ の性質] **非相対論極限で、 p^μ の空間成分は通常の運動量と一致する** ($\mathbf{p} = m_0 \gamma \mathbf{v} \rightarrow m_0 \mathbf{v}$)。また、 p^μ の2乗を計算すると

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu &= \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = - \left(\frac{E}{c} \right)^2 + |\mathbf{p}|^2 \\ &= m_0^2 u_\mu u^\mu = -m_0^2 c^2. \end{aligned} \quad (9.23)$$

この式の1行目は p^μ の成分 (9.22) を使って $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$ を具体的に書き下したものの、2行目は $u_\mu u^\mu$ の式 (9.21) を用いて $p^\mu p_\mu$ を書き換えたものにそれぞれ相当する。この式を整理すると

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2 c^2 \quad (9.24)$$

という関係式が得られる。

9.3 相対論的運動方程式

9.3.1 運動方程式の構築

前節で作ったベクトル量を用いて、ニュートンの運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \quad (9.25)$$

の相対論版をいよいよ構築する。その際に、以下の要請を満たす方程式を作るものとする：

1. **特殊相対性原理を満たす**。すなわち、運動方程式がローレンツ共変となり、どの慣性系でも物理法則は同一であるものとする。
2. **非相対論的極限** $|\mathbf{v}| \ll c$ でニュートンの運動方程式 (9.25) に帰着する。
実験事実として、この極限では式 (9.25) が精度良く成立するため。
3. (非相対論的極限ではない一般の場合でも) **実験事実と合致する**。

要請 1, 2 に従って運動方程式を理論的に組み、それが実験的な要請 3 も満たすことを確認する、という流れとなる⁴³。

要請 1 は、前節で構築したような運動量などに相当するベクトル量を使って式全体を書き下せば自動的に満たされる。どの量をどう組み合わせると方程式を作ればよいかの指針は要請 2 が与えてくれる。特に、非相対論的極限で4元運動量 p^μ の空間成分が通常の運動量 $m\mathbf{v}$ に帰着すると確認していたので、式 (9.25) に倣って、力に相当する4元ベクトル F^μ を使って

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu \quad (9.26)$$

⁴³ただし、本講義では主に前半の理論面を解説し、後半の実験的な検証については深入りしないことにする。

という式を立てれば、その空間成分は非相対論的極限で自動的に式 (9.25) に帰着すると期待される。ただし、4元力ベクトル F^μ の成分がどう与えられるかについては別途調べる必要があり、以下で議論する。なお、この式を作る際に固有時間（スカラー）による微分 $d/d\tau$ を用いたおかげで左辺はベクトル量になり、右辺にもベクトル量 F^μ を持ってくることで方程式全体が共变的に振る舞うようになっている：

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = F^\mu \Leftrightarrow (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \frac{d}{d\tau}p'^\alpha = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha F'^\alpha \Leftrightarrow \frac{d}{d\tau}p'^\mu = F'^\mu . \quad (9.27)$$

左辺が変換前の慣性系における運動方程式、中央が同じ式をローレンツ変換後の量 p'^μ, F'^μ で書き直したもので、それを式変形 ($\Lambda^\nu{}_\mu$ を縮約) して得られるのが右辺の p'^μ, F'^μ についての関係式で、ローレンツ変換後に成り立つべき運動方程式になっている。方程式が共变的に組まれていたおかげで、元の運動方程式（左辺）と同じ形の式となっている。

9.3.2 $F^\mu = 0$ の場合

4元力 F^μ がゼロとなる場合、式 (9.26) は

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = 0 \Leftrightarrow p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = (\text{一定}) \quad (9.28)$$

という4元運動量 p^μ の保存則を与える。この式の空間成分

$$\mathbf{p} = m_0\gamma(v)\mathbf{v} = (\text{一定}) \quad (9.29)$$

は、ニュートン力学の時と同様に、自由粒子は一定の速度 \mathbf{v} で運動するということを示している。

[E の解釈] 式 (9.28) の時間成分については

$$E = m_0\gamma(v)c^2 = \sqrt{(m_0c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2c^2} = (\text{一定}) \quad (9.30)$$

となり、 E という量の保存則を与える。運動量 \mathbf{p} が保存しているのでこの量 E も確かに保存するのだが、この量がどのような物理量に相当するのかについては一考の余地がある。ニュートン力学においては、力のかかっていない粒子の軌道について変化しない保存量は運動エネルギーと粒子の質量であった。式 (9.30) の E はそのどちらとも一致はしないが、 E を非相対論極限 $|\mathbf{v}| \ll c$ で展開すると

$$E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2c^2} = m_0c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{p}|^2c^2}{(m_0c^2)^2} + \mathcal{O}(|\mathbf{p}|^4) \right) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0|\mathbf{v}|^2 + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^4) \quad (9.31)$$

と、近似的には運動エネルギー $\frac{1}{2}m_0|\mathbf{v}|^2$ と定数部分 m_0c^2 との和で与えられる。ただし、非相対論極限では単に $\mathbf{p} \simeq m_0\mathbf{v}$ となることを使った。

E の展開式 (9.31) に出てくる定数部分 m_0c^2 にはどんな意味があるだろうか。ニュートン力学においては粒子の質量はただの定数なので、式 (9.31) も運動エネルギー $\frac{1}{2}m_0|\mathbf{v}|^2$ を定数 m_0c^2 だけずらして書いたものに過ぎないようにも見える。しかし、以下のように考えると、 m_0c^2 を単なる定数部分とはみなすことはできず、むしろ粒子のエネルギーの一部であり、粒子の運動状態に応じて変化する量だとみなす必要があるとわかる。

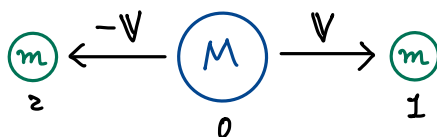


図 35: 静止している静止質量 M の粒子が、静止質量 m , 速さ $|\mathbf{v}|$ の2つの粒子に分裂したとする。

図 35 のように、静止質量 M の粒子が静止しており、それが、静止質量 m 、速さ $|\mathbf{v}|$ の 2 つの粒子に分裂したとする。この場合に、運動量保存則 (9.28) が何を予言するのかを見てみよう。まず、図 35 の粒子 0, 1, 2 の 4 元運動量は、それぞれ

$$p_0^\mu = (Mc, 0), \quad p_1^\mu = m\gamma(v)(c, \mathbf{v}), \quad p_2^\mu = m\gamma(-v)(c, -\mathbf{v}). \quad (9.32)$$

このとき、運動量保存則 $p_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$ の空間成分は自明に満たされる。一方、時間成分は

$$M = \gamma(v)m + \gamma(-v)m = 2\gamma(v)m \geq 2m, \quad (9.33)$$

すなわち、分裂後の粒子の速度がゼロでない ($|\mathbf{v}| \neq 0, \gamma > 1$) 場合は、分裂後の粒子の静止質量の合計値 $2m$ は分裂前の粒子の静止質量 M と比べて減少することを予言する。運動の過程で静止質量 (分裂前は M 、分裂後は $2m$) が保存されないのだから、 E の表式 (9.30) に含まれる質量項 m_0c^2 を E 全体から切り分けて考える意義がなくなる。この意味で、式 (9.30) に含まれる m_0c^2 は単に保存量 E の一部分に過ぎず、場合によっては質量部分 m_0c^2 と運動量部分 $|\mathbf{p}|c$ が互いに移り変わることもある、と理解するのが良さそうだとわかる。

9.3.3 $F^\mu \neq 0$ の場合

次に、相対論的運動方程式 (9.26) で 4 元力 F^μ がゼロではない場合を考える。その際、3 次元的な力のベクトル \mathbf{F} を

$$\mathbf{F} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (9.34)$$

と、相対論的な 3 次元運動量ベクトル $\mathbf{p} = m_0\gamma(v)\mathbf{v}$ (式 (9.22) 参照) の時間座標 t による微分で定義する。非相対論的極限ではニュートンの運動方程式 (9.25) と一致する定義である。

この定義に従うと、式 (9.26) の空間成分は

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \gamma(v) \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma(v)\mathbf{F}. \quad (9.35)$$

また、式 (9.26) の時間成分は

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \gamma(v) \frac{dp^0}{dt} = F^0 \quad (9.36)$$

となるが、この式の意味を考えてみよう。 $p^0 = E/c = m\gamma(v)c$ の時間座標 t による微分は、 E を \mathbf{p} など表す式 (9.30) を参考にすると

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \sqrt{(m_0c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2c^2} = \frac{1}{c} \frac{c^2 \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}}{\underbrace{\sqrt{(m_0c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2c^2}}_{= E = m_0\gamma(v)c^2}} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}. \quad (9.37)$$

ただし、最後の等号では $\mathbf{p} = m_0\gamma(v)\mathbf{v}$ と与えられることを用いた。この式は、粒子に加えられた力 \mathbf{F} による仕事率 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$ がエネルギーの時間変化率 dE/dt に等しいということを示している。これを踏まえると、 E は特殊相対論における粒子のエネルギーであると解釈すると良さそうだとことが示唆される。そのような解釈に基づくと、静止した質量 m_0 の粒子もエネルギー $E = m_0c^2$ を持っていることになる。この質量由来のエネルギーは静止質量エネルギーと呼ばれている。

また、以上の内容を踏まえて 4 元力ベクトル F^μ の成分を書き下しておく

$$F^\mu = \gamma(v) \left(\frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{F} \right) \quad (9.38)$$

であり、時間・空間成分がそれぞれエネルギー E 、運動量 \mathbf{p} の時間変化率を与えている。

第10回 相対論的力学の性質

10.1 復習：相対論的運動方程式

前回の講義で、ニュートンの運動方程式を相対論に拡張した式として以下を導入した。

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad (10.1)$$

この式の構成要素は下記の通り。粒子の軌道は $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ で与えられるとする。

- **4次元座標** $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$
ローレンツ変換に対してベクトルとして振る舞う: $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$.
- **固有時間** $d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2} dt = \frac{1}{\gamma(v)} dt$ ($\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$): 粒子の静止系で計った (粒子にくっついて運動している時計で計った) 時間。定義によりスカラー量として振る舞う。
- **4元速度** $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(v)(c, \mathbf{v})$: ベクトルとして振る舞う。
- **静止質量** m_0 : 粒子の静止時に (粒子の静止系で) 計った質量。定義によりスカラーとなる。
- **4元運動量** $p^\mu = m_0 u^\mu = m_0 \gamma(v)(c, \mathbf{v}) \equiv \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right)$: ベクトルとして振る舞う。
 $E = m_0 \gamma(v) c^2 = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2 c^2}$ は粒子のエネルギー、 $\mathbf{p} = m_0 \gamma(v) \mathbf{v}$ は運動量。
力がかかっていない場合 ($F^\mu = 0$)、 E, \mathbf{p} は保存量となる。
- **4元力** $F^\mu = \gamma(v) \left(\frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{F} \right)$: 3次元運動量の時間変化 ($\frac{d}{dt}$) を3次元力 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ と定義した。運動方程式 (10.1) からわかる通り、 $\frac{1}{\gamma(v)} F^\mu$ の各成分が E, \mathbf{p} の時間変化率 ($\frac{d}{dt}$) となっている:

$$\frac{d}{dt} E = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}. \quad (10.2)$$

なお、 F^μ の時間成分 F^0 の表式は、式 (10.2) の $\frac{dE}{dt}$ の式の左辺を計算すると得られる:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{(m_0 c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2 c^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} c^2}{E} = \frac{m_0 \gamma(v) \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} c^2}{m_0 \gamma(v) c^2} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}. \quad (10.3)$$

10.2 E, \mathbf{p} の性質

10.2.1 静止質量の性質

前回の講義でも分裂する粒子の例を使って静止質量 m_0 が保存量ではないことを確認したが、少し別の例で改めて確認しておく。

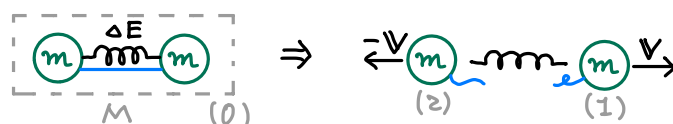


図 36: 自然長より縮んだばねを粒子 (静止質量 m) の間に挟み、粒子同士を紐でつなぐなどして固定しておく。その後、紐を切ればねを解放すると、粒子はエネルギーを受け取り速度 $\pm v$ を持つ。初期状態の系全体の静止質量 M は、各粒子の静止質量の合計 $2m$ より縮んだばねの持つエネルギー ΔE の分だけ増加する。

図 36 のように、二つの粒子 (静止質量: m) をばねでつなぎ、自然長より短い状態で (粒子を紐をつなぐなどして) 固定しておく。その結果としてばねに ΔE だけのエネルギーが蓄えられたとする⁴⁴。この場合、この粒子とばねで構成される物体全体が持っているエネルギーは

$$E = 2mc^2 + \Delta E \equiv Mc^2. \quad (10.4)$$

ただし、物体系全体が静止していることから、物体系全体を一つの物体とみなしたときの静止質量 $M = 2m + \frac{\Delta E}{c^2}$ を定義した。今回の場合 $\Delta E = \frac{1}{2}k\Delta x^2 > 0$ なので、系全体の静止質量は個々の粒子の静止質量の和よりも大きくなる ($M > 2m$)。

ばね・粒子系の固定を外すとばねが伸びて粒子が飛散するが、その後の各粒子の静止質量は (当初の設定通り) m となる。なお、運動量保存則は

$$p_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu \quad \Leftrightarrow \quad (Mc, 0) = \gamma(v)(mc, \mathbf{v}) + \gamma(v)(mc, -\mathbf{v}) \quad (10.5)$$

と与えられ、固定解除前・解除後で全エネルギー $E = Mc^2 = 2\gamma(v)mc^2$ 自体は保存している⁴⁵。

この例で示されるように、静止質量は必ずしも物体の構成要素固有の量というわけではなく、**内部エネルギーも質量に寄与する**。この現象は以下のような例でも現れる。

- **核分裂と質量欠損:** 上記の例では粒子とばねの系を考えたが、核分裂する原子核でも本質的には同じことが起こっている。原子核内部で働く相互作用が上記の例におけるばねと紐の役割を果たし、それが蓄えていたエネルギーが核分裂の際に解放される。このエネルギーの分、分裂前と比べて分裂後の原子核の総静止質量は減少している。
- 容器に入った気体を加熱すると内部エネルギーが増大するが、その場合気体の静止質量も増大し、その増分は $\Delta M = \Delta E/c^2$ となる。
- 互いに引力を及ぼす粒子対 (e^-e^+ 対、星のペアなど) があつた場合、粒子が近づいた方が引力によるポテンシャルエネルギーが減少する。この場合、個々の粒子の静止質量の合計より、粒子が近づいて結合状態をなしたときの静止質量は結合エネルギー (< 0) の分だけ少なくなる。

10.2.2 静止質量がゼロの粒子

- **光の静止質量はゼロ:** 静止質量 m_0 、速度 \mathbf{v} の粒子の E, \mathbf{p} は

$$E = m_0\gamma(v)c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} = \sqrt{(m_0c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2 c^2}, \quad \mathbf{p} = m_0\gamma(v)\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}}. \quad (10.6)$$

光は速度 $\mathbf{v} = c$ を持つが、この場合 E, \mathbf{p} の分母 $\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}$ はゼロとなつてしまい、一見 E, \mathbf{p} は発散してしまうように見える。実は、**光の静止質量はゼロ** ($m_0 = 0$) であり、そのおかげで \mathbf{p} も分子・分母が両方ゼロとなることによって有限値にとどまる。

$m_0 = 0$ の場合、光のエネルギーは $E = |\mathbf{p}|c$ となる。量子論などで光子のエネルギーと運動量が $E = pc = h\nu$ となることが知られているが、それと同じ結果である。

⁴⁴本文中の議論では ΔE の具体的表式は特に必要ないが、例えばばね定数 k 、自然長からの縮みが Δx ならば $\Delta E \sim \frac{1}{2}k\Delta x^2$ となる。実際にはばねの静止質量に対応するエネルギーも入ってきて、こちらはばねを解放した後も残る。本文中の議論ではばねの静止質量エネルギーを無視している。

⁴⁵エネルギー保存則 (式 (10.5) の $\mu = 0$ 成分) から固定解除後の粒子の速度を求めると

$$Mc^2 = 2mc^2 + \Delta E = 2\gamma(v)mc^2 = 2mc^2\sqrt{1 + \frac{|\mathbf{V}|^2}{c^2}} \quad \therefore \quad |\mathbf{v}|^2 = \frac{\Delta E}{m} + c^2 \left(\frac{\Delta E}{2mc^2} \right)^2$$

となる。右辺第 1 項の寄与 ($|\mathbf{v}|^2 = \frac{\Delta E}{m}$) がニュートン力学における粒子速度に相当する。

- **静止質量がゼロ** $\rightarrow |\mathbf{v}| = c$: 逆に、光のように静止質量 m_0 がゼロの粒子があったとすると、式 (10.6) からして $|\mathbf{v}| < c$ である限り $E = 0 = \mathbf{p}$ となって粒子そのものが消えてしまう。 E, \mathbf{p} がゼロではない値を取るのは、 $|\mathbf{v}| = c$ となって E, \mathbf{p} の分子・分母が両方ゼロになる時に限られる。端的に言うと**静止質量 m_0 がゼロの粒子は常に光速で運動する**ということになり、これを静止させることはできない。
- **超相対論的極限** $|\mathbf{v}| \rightarrow c$: 粒子の質量がゼロではない場合、 $|\mathbf{v}| \rightarrow c$ の極限で粒子の E, \mathbf{p} はともに発散する。これは、**質量を持つ粒子を有限のエネルギーで加速しても光速には到達しない**ことを意味する。この極限で $E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2 c^2} \sim |\mathbf{p}|c$ となり、光の場合と同じ E, \mathbf{p} の関係式が近似的に成立する。この極限では質量エネルギー $m_0 c^2$ が運動量の寄与 $|\mathbf{p}|c$ と比べて無視でき、近似的に質量がゼロの粒子のように振る舞うため。

10.2.3 等加速度運動

相対論的な運動方程式 (10.1) の解の簡単な例として、相対論的な等加速度運動を調べてみる。図 37a のように x 方向に運動するロケットを考えて、ロケットの乗客から見てロケットは常に加速度 a で運動し続けているものとする。この時に、静止系から見るとどのような運動に見えるかを考えてみる。

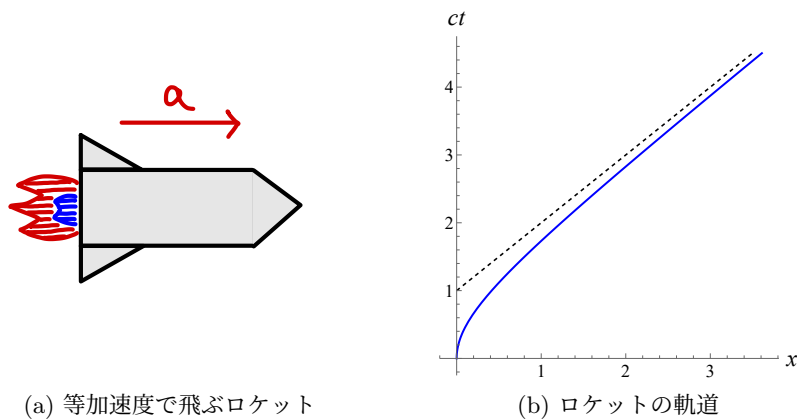


図 37: 等加速度で飛ぶロケットと、その軌道の時空図。ただし図 (b) では $c = 1, a = 1$ とした

「ロケットの乗客から見てロケットが加速度 a で運動する」という状況を式で表すには以下のように考えるとよい。今回の場合ロケットの速度は時々刻々変化するが、ある時刻 $t = t_*$ の瞬間に注目することにすると、その瞬間にロケットが止まって見えるような慣性系を取ることができる。つまり、その瞬間にロケットの速度が $\mathbf{v}(t_*)$ となる場合、一定の速度 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t_*)$ で運動し続けている慣性系を別途用意しておくと、時刻 $t = t_*$ にその慣性系から見てロケットは一瞬静止して見える。この場合、ロケットの速度が十分遅い ($c \gg v = 0$) ためにニュートン力学の運動方程式がそのまま成立する：

$$\frac{d}{dt} m_0 \mathbf{v}(t) = \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m_0} . \quad (10.7)$$

右の式の右辺 \mathbf{F}/m_0 がロケットの静止系で見たロケットの加速度となるが、この x 成分が一定値 a となる場合、すなわち $\mathbf{F} = (m_0 a, 0, 0)$ となるのが「ロケットの乗客から見てロケットが加速度 a で運動する」場合に相当する。これに対応する 4 元力 $F^\mu = \gamma(v)(\frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{F})$ は (y, z 部分は省略する)

$$F^\mu = (F^t, F^x) = (0, m_0 a) \quad (10.8)$$

と与えられる⁴⁶。これを元の系（ロケットが速度 $v(t)$ で運動して見える系）に戻すと

$$F^\mu = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ m_0 a \end{pmatrix} = m_0 a \gamma(v) \begin{pmatrix} v/c \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10.9)$$

この4元力 F^μ に対する式(10.1)の解を求めればよい。

式(10.1)を時間座標 t を用いて書き換えると

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma(v) \frac{dp^\mu}{dt} = F^\mu \Leftrightarrow \frac{dp^\mu}{dt} = \frac{1}{\gamma(v)} F^\mu = \left(\frac{m_0 a v(t)}{c}, m_0 a \right). \quad (10.10)$$

この式の x 成分 $\frac{dp^x}{dt} = m_0 a$ から直ちに $p^x = m_0 a t$ とわかる。ただし、初期時刻 $t = 0$ で粒子は静止しているとした。この式からさらに

$$p^x = m_0 \gamma(v) v = \frac{m_0 v(t)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}} = m_0 a t \quad \therefore v(t) = \frac{a t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a t}{c}\right)^2}}. \quad (10.11)$$

この $v(t)$ に対しては $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{a t}{c}\right)^2}$ となる。粒子の位置は、 $v = dx/dt$ を積分して

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \frac{a t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a t}{c}\right)^2}} dt = \frac{c^2}{2a} \int \frac{d\left[\left(\frac{a t}{c}\right)^2\right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{a t}{c}\right)^2}} = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{a t}{c}\right)^2}. \quad (10.12)$$

ただし、初期時刻 $t = 0$ におけるロケットの位置を $x = 0$ とした。この軌道を時空図上に書いたのが図37bである。

- $v(t) < c$: この運動の特徴の一つは、 $v(t)$ の式(10.11)からもわかる通り、ロケットの静止系から見て一定の力 $F = m_0 a$ で加速し続けているにもかかわらず速度は $v(t) = a t / \sqrt{1 + (a t / c)^2} \rightarrow c$ と光速 c で頭打ちになる点である。6.1節でも解説した**物体の速度 v は光速 c を越えない**という事実と対応している。
- **相対論的質量 $m_0 \gamma(v)$** : 光速に近づくにつれて速度 v の増大が止まってしまう理由は、式(10.10)を少し書き換えた式

$$\frac{dp^x}{dt} = \frac{d}{dt} (m_0 \gamma(v) v) = m_0 a \quad (10.13)$$

の中で、静止質量 m_0 にかかっている係数 $\gamma(v)$ が $v \rightarrow c$ となるにつれて無限に増大し、その分 v の増加が小さくなってしまいうためである。この式をニュートン力学における運動方程式と見比べると、**粒子の質量が $m_0 \gamma(v)$ となり、 $v \rightarrow c$ となるにつれて質量 $m_0 \gamma(v)$ が増大するために粒子が加速しにくくなった**と解釈できなくもない。このことを以って $m_0 \gamma(v)$ のことを**相対論的質量**と呼ぶこともある⁴⁷。

相対論的なエネルギーの式 $E = m_0 \gamma(v) c^2$ にもこの相対論的質量は現れるが、有名な公式 $E = m c^2$ はこの式のことと、および静止質量エネルギーの式 $E = m_0 c^2$ のことを指したものと解釈できる。

⁴⁶この F^μ の表式は4元加速度 $a^\mu \equiv du^\mu/d\tau$ を用いて求めることもできる。運動方程式(10.1)は $m_0 a^\mu = F^\mu$ と書かれるが、これと式(10.9)を用いて4元加速度の2乗 $a^\mu a_\mu$ を計算すると

$$a^\mu a_\mu = \frac{1}{m_0^2} F^\mu F_\mu = \frac{1}{m_0^2} (m_0 a \gamma(v))^2 \left(-\frac{v^2}{c^2} + 1 \right) = a^2$$

と定数 a^2 になることが分かる。 $a^\mu a_\mu$ はスカラーなのでどの慣性系で評価しても同じ値となる。ロケットの静止系でも同様で、かつこの静止系では $a^\mu = (0, dv/dt)$, $a^\mu a_\mu = |dv/dt|^2$ となることから $dv/dt = a$, $F^x = m_0 dv/dt = m_0 a$ と求まる。また、 $a^\mu a_\mu = a^2$ が時間に依らない定数となることが、この運動がロケットの乗客にとっての等加速度運動であることと対応している。

⁴⁷ニュートン力学における質量 m を相対論的質量 $m_0 \gamma(v)$ に単純に置き換えれば常に相対論的力学の結果が再現されるというわけでもない。相対論における運動方程式(10.1)はもちろん常に成立するので、実際に問題を解く際や物理的考察を行う際は素直にこの式を使うことにして、相対論的質量をわざわざ用いるのは避けたほうが混乱しなくて済む。

10.3 最小作用の原理による導出

ニュートン力学における運動方程式が最小作用の原理から求められたのと同様に、相対論的力学における運動方程式 (10.1) もそれに対応する作用積分から導出することができる。今後の解説のためにも導入しておく。

ニュートン力学における質量 m の粒子の運動経路が $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ と与えられるとき、それに対応する作用積分 S は

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int (K(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - V(\mathbf{x})) dt, \quad K(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}|^2. \quad (10.14)$$

K, V はそれぞれ粒子の運動エネルギーとポテンシャルエネルギー、 $L = K - V$ は点粒子のラグランジアンであり、どれも粒子の軌道 $\mathbf{x}(t)$ の汎関数である。この作用 S が変分に対して極小値をとる、という最小作用の原理から運動方程式であるオイラー・ラグランジュ方程式を求めることができる。粒子の経路を $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ とずらした際の作用 (10.14) の変分は

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}|^2 - V(\mathbf{x}) \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(m \dot{\mathbf{x}} \cdot (\delta \dot{\mathbf{x}}) - \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(-m \ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} - \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} \right) dt + \underbrace{[m \dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x}]_{t_0}^{t_1}}_{=0} = - \int_{t_0}^{t_1} \left(m \ddot{\mathbf{x}} + \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right) \cdot \delta \mathbf{x} dt. \end{aligned} \quad (10.15)$$

ただし、積分区間の両端 $t = t_0, t_1$ で $\delta\mathbf{x} = 0$ という境界条件を使って表面項 $[m \dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x}]_{t_0}^{t_1}$ をゼロとおいた。任意の変分 $\delta\mathbf{x}$ に対して作用 S が極値を取るためには、式 (10.15) の最右辺のかっこの中身が恒等的にゼロである必要がある。すなわち

$$m \ddot{\mathbf{x}} + \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = 0 \quad (10.16)$$

となるが、これが式 (10.14) に対するオイラー・ラグランジュ方程式であり、ニュートン力学における運動方程式となっている。また、粒子のエネルギーに相当するハミルトニアン H は

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L = m |\dot{\mathbf{x}}|^2 - \left(\frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}|^2 - V(\mathbf{x}) \right) = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}|^2 + V(\mathbf{x}). \quad (10.17)$$

相対論で同様の運動方程式の導出を行うためには、まずラグランジアンを用意する必要がある。相対論における運動方程式はローレンツ変換に対して共変である必要があるが、そのためには**作用 S はローレンツ変換で不変**、すなわち **S はローレンツ変換に対するスカラー**でなければならない⁴⁸。相対論において運動する粒子の軌道の特徴づけるスカラー量としては、粒子の静止質量 m_0 や粒子の経路に沿って測った固有時間 $d\tau = \sqrt{1 - |\dot{\mathbf{x}}(t)/c|^2} dt$ が挙げられる⁴⁹。そこで、作用積分 S を以下のように取ってみる⁵⁰：

$$S = - \int_{t_0}^{t_1} m_0 c^2 d\tau(t) = -m_0 c^2 \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2} dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (10.18)$$

実際、非相対論的極限 $\frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2 \rightarrow 0$ で、上式で定義されるラグランジアン L は

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2} = -m_0 c^2 + \frac{m_0 c^2}{2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2 + \dots \quad (10.19)$$

⁴⁸ ニュートンの運動方程式 (10.16) は回転変換およびガリレイ変換に対して共変ないし不変だが、この性質の起源は作用積分 (10.14) もそれらの変換に対して不変であったことである。同様に、ローレンツ変換に対して共変的な運動方程式を得たい場合は、ローレンツ変換に対して不変、すなわちスカラーとして振る舞う作用を用意すればよい。

⁴⁹ 他にも 4 元速度の 2 乗 $u^\mu u_\mu$ も考えられるが、これは単に粒子の軌道に依存しない定数 ($u^\mu u_\mu = -c^2$) となる。

⁵⁰ $d\tau$ の係数 $m_0 c^2$ は、作用 S が無次元量となるように決めたものである。

となり、右辺第二項がニュートン力学の作用 (10.14) でポテンシャルをゼロ ($V(\mathbf{x}) = 0$) としたものと同じである。右辺第 1 項は定数なので運動方程式には寄与しない。

式 (10.18) で与えられる作用について変分を取り、最小作用の原理を適用すると

$$0 = \delta S = -m_0 c^2 \int_{t_0}^{t_1} \delta \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2} dt = -m_0 c^2 \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{-\frac{1}{c^2} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \cdot \frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2}} \right) dt \quad (10.20)$$

$$\simeq -m_0 c^2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c^2} \gamma(v) \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right) \cdot \delta\mathbf{x}(t) dt = -m_0 \int_{t_0}^{t_1} \frac{d(\gamma(v)\mathbf{v}(t))}{dt} \cdot \delta\mathbf{x}(t) dt .$$

ただし、2 行目の最初の等号 (\simeq) では部分積分を行い、全微分項を積分して生じる表面項をゼロとおいた。この式が任意の変分 $\delta\mathbf{x}(t)$ に対して成立するためには

$$m_0 \frac{d(\gamma(v)\mathbf{v}(t))}{dt} = 0 \quad (10.21)$$

が要請される。この式は相対論的運動方程式 (10.1) の空間成分 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$ ($\mathbf{p} = m_0 \gamma(v)\mathbf{v}$) で右辺の 4 元力ベクトル F^μ をゼロとした場合に相当する^{51,52}。以上より、ラグランジアン L および作用積分 S として式 (10.18) を取れば、相対論的運動方程式 (10.1) が最小作用原理より正しく導出されることが分かった。

ラグランジアン (10.18) から運動量 \mathbf{p} を求めると

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} |\dot{\mathbf{x}}|^2} \right) = m_0 c^2 \frac{\frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} |\dot{\mathbf{x}}|^2}} = m_0 \gamma(v) \dot{\mathbf{x}} . \quad (10.24)$$

これを用いてラグランジアン (10.18) に対応するハミルトニアン H を求めると

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L = m_0 \gamma(v) \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} |\dot{\mathbf{x}}|^2} = m_0 \frac{|\dot{\mathbf{x}}|^2 + c^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 \right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} |\dot{\mathbf{x}}|^2}} = m_0 \gamma(v) c^2 . \quad (10.25)$$

式 (10.24) の \mathbf{p} 、式 (10.25) の E は、それぞれ相対論的運動量 p^μ の空間部分、相対論的エネルギー $E = m_0 \gamma(v) c^2$ と一致している。

⁵¹ポテンシャル項などのような、粒子と相互作用する物質や場の作用を式 (10.18) の作用に加えれば、 $F^\mu \neq 0$ となる運動方程式も導出できる。

⁵²4 元ベクトルで書かれた方程式 (10.1) (で $F^\mu = 0$ としたもの) を直接得るためには、作用を

$$S = m_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} u^\mu u_\mu d\tau = m_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} d\tau \quad (10.22)$$

と書きなおして、4 次元的な軌道 $x^\mu(\tau)$ についての変分 δS をゼロとおく式を導出すればよい：

$$0 = \delta S = 2m_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\delta x_\mu}{d\tau} d\tau \simeq -2m_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \delta x_\mu d\tau \quad \therefore \quad m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{dp^\mu}{d\tau} = 0 . \quad (10.23)$$

ただし、 $p^\mu = m_0 u^\mu = m_0 dx^\mu / d\tau$ であることを用いた。

第 11 回 相対論における諸現象（波動・光）

今回は特殊相対性理論において起こる特徴的な現象について紹介する。粒子の運動にまつわる諸現象については第 7 回で扱ったが、本節では波動と光について注目する。

11.1 波動

11.1.1 正弦波

波動（電磁波や音波など）の中で、もっとも単純なものは角振動数 ω 、波数 \mathbf{k} の正弦波である。

$$\phi(x^\mu, k^\mu) = \sin\left(-\omega t + \underbrace{k^x x + k^y y + k^z z}_{=\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right) \equiv \sin(k_\mu x^\mu). \quad (11.1)$$

$\phi(x^\mu, k^\mu)$ は波動の振幅である。この式で、4 元波数ベクトル k^μ を

$$k^\mu \equiv (\omega/c, \mathbf{k}) \quad (11.2)$$

のとおり導入して、波動の位相を以下のように書き表した：

$$-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \eta_{\mu\nu} k^\mu x^\nu = k_\mu x^\mu. \quad (11.3)$$

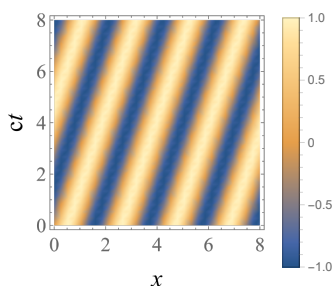


図 38: $\omega/c = 1, k^x = 3$ の場合の正弦波 $\phi(ct, x)$ (式 (11.1))。波動伝搬面は $x = \frac{1}{3}ct + (\text{定数})$ となる。

位相 $k_\mu x^\mu$ が一定となる (4 次元時空中の) 等位相面に沿って波動の振幅 $\phi(x^\mu)$ は同じ値をとるが、これは波動が等位相面に沿って伝搬することを意味する。 \mathbf{x} を 3 次元波数ベクトル \mathbf{k} と水平な成分 \mathbf{x}_\parallel と垂直な成分 \mathbf{x}_\perp に分解して $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\parallel + \mathbf{x}_\perp$ とすると、位相 (11.3) が一定であるという式は

$$-\omega t + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_\parallel + \mathbf{x}_\perp) = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_\parallel = (\text{一定}) \quad (11.4)$$

と書かれる。時間が Δt だけ進むとき、位相 (11.4) の値を変化させないためには

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{\omega \Delta t}{|\mathbf{k}|} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \equiv c_s \Delta t \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (11.5)$$

だけ位置を $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$ とずらせばよい。言い換えると、時間が Δt 経過する間に波動は $\Delta \mathbf{x} = c_s \Delta t \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ だけ移動する。この式に現れる係数

$$c_s = \omega/|\mathbf{k}| \quad (11.6)$$

は波動の (位相) 速度で、 $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ は波動の伝搬方向を向いている単位ベクトルである。波動は 3 次元波数ベクトル \mathbf{k} の方向に伝搬するということを表している。

11.1.2 分散関係

式 (11.1) の段階では、角振動数 ω と 3 次元波数ベクトル \mathbf{k} は互いに独立な定数である。ここで、振幅 $\phi(x^\mu, k^\mu)$ が何らかの運動方程式に従うことを要請すると ω, \mathbf{k} の間に関係式が成立する。その関係式 $\omega = \omega(\mathbf{k})$ のことを分散関係と呼ぶ。

簡単な例として、スカラー場 $\phi(x^\mu)$ についての**クライン・ゴールドン方程式**

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x^\mu) = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\right)\phi(x^\mu) = 0 \quad (11.7)$$

を考える。この式の解を求めるため、式(11.1)の $\phi(x^\mu)$ をこの式に代入してみると

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\right)\sin(-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{c^2}\omega^2 - |\mathbf{k}|^2\right)\sin(-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = 0. \quad (11.8)$$

この式が満たされるためには⁵³

$$\underbrace{-\frac{1}{c^2}\omega^2 + |\mathbf{k}|^2}_{=\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = k_\mu k^\mu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \pm c|\mathbf{k}|. \quad (11.9)$$

したがって、クライン・ゴールドン方程式(11.7)に従うスカラー場の波動(11.1)については分散関係 $\omega = \pm c|\mathbf{k}|$ が成立する。位相速度が $c_s = \omega/|\mathbf{k}| = \pm c$ と光速に一致する場合に相当する。

11.1.3 4元波数ベクトル

波動の位相は単なる数値で、なおかつ波動の山・谷やその間にある節の位置と対応している。どの慣性系から見ても山・谷は山・谷、節は節に見えるはずだが、そのため位相の値はどの慣性系から見ても同じ値となる。すなわち、**波動の位相 $k_\mu x^\mu$ はスカラー**として振る舞う。 x^μ は4元ベクトルなので、 $k_\mu x^\mu$ がスカラーとなるためには式(11.2)で定義される4元波数ベクトル k^μ も4元ベクトルとして振る舞う。

k^μ は4元反変ベクトルとして振る舞うのだから、ローレンツ変換に対しては

$$k^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu k'^\nu \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \omega/c \\ k^x \\ k^y \\ k^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'/c \\ k'^x \\ k'^y \\ k'^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\omega' + \beta ck'^x)/c \\ \gamma(k'^x + \beta\omega'/c) \\ k'^y \\ k'^z \end{pmatrix} \quad (11.10)$$

と変換する。この式の各成分の物理的解釈については次節で説明する。

また、 k^μ の2乗 ($k_\mu k^\mu$) は

$$k_\mu k^\mu = -\frac{1}{c^2}\omega^2 + |\mathbf{k}|^2 = \left(1 - \frac{c_s^2}{c^2}\right)|\mathbf{k}|^2 \begin{cases} < 0 & (c_s < c : k^\mu \text{ は時間的}) \\ = 0 & (c_s = c : k^\mu \text{ は光的 (ヌル)}) \\ > 0 & (c_s > c : k^\mu \text{ は空間的}) \end{cases} \quad (11.11)$$

のように振る舞う。また、 $k^\mu k_\mu$ の符号に応じて k^μ のことを**時間的 / 光的 (ヌル) / 空間的ベクトル**と呼ぶ。特に、**位相速度 c_s が光速を越えない場合は k^μ は時間的ベクトル、光速と一致する場合は k^μ は光的ベクトル**となる。今回は波動とその伝搬速度に注目したが、点粒子の4元速度 u^μ についても同様のことが言える。

⁵³同じ結果をテンソル形式で導出する場合は以下ようになる。クライン・ゴールドン方程式(11.7)をテンソル表記で書くと

$$0 = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x^\mu) = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\phi(x^\mu).$$

この式に正弦波の式(11.1)を代入すると

$$\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\sin(k_\mu x^\mu) = -\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu \sin(k_\mu x^\mu) = 0.$$

ただし、 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}f(k_\mu x^\mu) = k_\mu f'(k_\mu x^\mu)$ となることを使った。この式から $\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = k_\mu k^\mu = 0$ 、すなわち式(11.9)の分散関係が得られる。

11.1.4 光の4元運動量

光子のエネルギー E と運動量 \mathbf{p} は

$$E = \hbar\omega = \hbar c|\mathbf{k}|, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (11.12)$$

と与えられることが知られている。これに対応する4元運動量 p^μ は

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}) = \hbar(\omega/c, \mathbf{k}) = \hbar k^\mu \quad (11.13)$$

と、4元波数ベクトル k^μ に比例する⁵⁴。また、 $\omega = |\mathbf{k}|c$ であることに対応して、波数ベクトル k^μ と4元運動量 p^μ は光的ベクトル ($k^\mu k_\mu = 0 = p^\mu p_\mu$) となる。

11.2 ドップラー効果・光行差

11.2.1 光のローレンツ変換

式(11.10)は、速度 $\beta = v/c$ で x 軸方向に運動する運動系 O' に波数 k'^μ を持つ光があった時に、それを静止系 O から見たときにはどのような波数 k^μ を持つ光として観測されるかを示すものである。速度 v で運動する光源が発する光を静止系で見たものと思ってもよい。

運動系(光源の静止系) O' における光線の伝搬方向と O' 系の運動方向との間の角度を θ' とすると

$$k'^x = k' \cos \theta', \quad k'^y = k' \sin \theta', \quad \omega' = ck' . \quad (11.14)$$

これが、静止系 O では $(k^x, k^y) = (k \cos \theta, k \sin \theta)$ を持つ光として見える。これらの量の間の対応関係は、式(11.10)より

$$\omega = \gamma(\omega' + \beta ck' \cos \theta'), \quad k \cos \theta = \gamma(k' \cos \theta' + \beta \omega'/c), \quad k \sin \theta = k' \sin \theta' \quad (11.15)$$

この第1式から

$$\omega = \gamma(1 + \beta \cos \theta') \omega' \equiv D\omega' \quad (D \equiv \gamma(1 + \beta \cos \theta')) . \quad (11.16)$$

この式で定義した D を今回は**ドップラー因子**と呼ぶことにする。また、(11.15)の第2式から

$$k \cos \theta = \frac{\omega}{c} \cos \theta = \gamma(k' \cos \theta' + \beta \omega'/c) = \gamma(\cos \theta' + \beta) \frac{\omega'}{c} = \frac{\gamma(\cos \theta' + \beta)}{D} \frac{\omega}{c} \quad (11.17)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\gamma(\cos \theta' + \beta)}{D} = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'} . \quad (11.18)$$

ただし、計算の途中で $\omega' = |\mathbf{k}'|c$ であることと式(11.16)を用いた。式(11.16), (11.18)がそれぞれ周波数 ω , 光の進行方向 θ の変換則を与える。式(11.15)の第3式は、式(11.16), (11.18)を使えば常に満たされることが示せる。

11.2.2 光行差

式(11.18)は、光源が静止して見える系 O' で x 軸から角度 θ' の方向に出る光線が、静止系 O から見ると角度 θ の方向に見える、ということを意味する式である。これを静止系 O に対する運動系 O' の速度が $v = 0.8c$ の場合に図示したのが図39bであり、運動する光源については**進行方向に放射光が集中する**ことが分かる。式(11.18)の式からも、 $\beta = v/c$ の値が大きいほど $\cos \theta$ の値は元の角度に対応する $\cos \theta'$ の値よりも大きくなるため、光の進行方向の角度 θ も小さくなるが見て取れる。この現象は**相対論的ビーミング効果**とも呼ばれる。

⁵⁴ $m_0 \neq 0$ の場合の4元運動量の表式 $p^\mu = m_0 \gamma(v)(c, \mathbf{v})$ で、 $m_0 \gamma(v)$ を有限値に保ったまま $|\mathbf{v}| \rightarrow c$ ($\gamma(v) \rightarrow \infty$) とした場合に対応する。 $E = m_0 \gamma(v) c^2 = \hbar\omega = \hbar c|\mathbf{k}|$ という関係が成り立っている。

逆に、一様に分布する光源に対して自分がある速度で運動している場合、静止時と比べて光はより前方から飛んでくるように見える。雨や雪が上空からまっすぐ降っている中を自分がある速度で運動しているとき、自分からは雨の速度が本来の速度に自身の速度の逆向きを合成したものであるように見える（図 40 参照）。その結果、雨は自分に対して進行方向前方から降り注いでくるように見える。光についても同様の現象が起こり、その場合の角度は式 (11.18) に従って求められる。この現象は**光行差**と呼ばれており、例えば地球の公転のために星の位置が季節ごとに異なって見えるという現象がこの効果で引き起こされることが知られている。

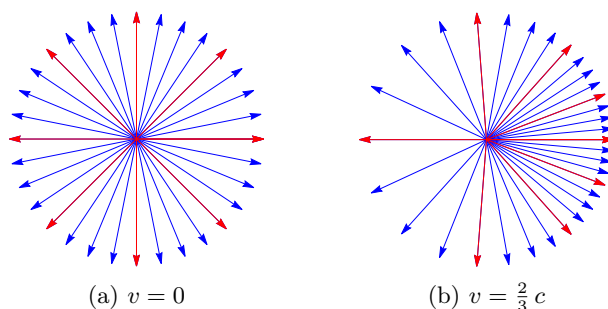


図 39: (a) 静止している光源の光の放射。等方的に光線が出るものとする。(b) 同じ光源が右方向に速度 $v = \frac{2}{3}c$ で運動している場合の光の放射。進行方向に放射が集中する。

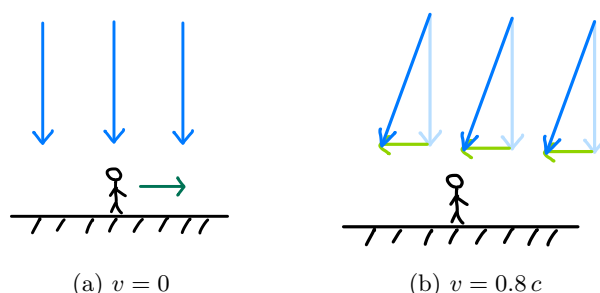


図 40: (a) 静止時に鉛直下方雨や雪が降っている中を自分が右方向に運動しているものとする。(b) 自分から見ると雨や雪が進行方向にずれた向きから飛んでくるように見える。

- **非相対論的な場合との比較:** 以上で述べた現象は相対論に特有のものかのように思われたかもしれないが、実際には**光行差などの現象は相対論的效果を入れなくても起きる**ことに注意する必要がある。実際、図 40 を見てもわかる通り、光行差自体は非相対論的な速度の合成を考えた場合でも発生する。運動系 O' で速度 $(c' \cos \theta', c' \sin \theta')$ で運動する粒子が静止系 O から見るとどう見えるかを非相対論的な場合に解析すると

$$\begin{pmatrix} c \cos \theta \\ c \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' \cos \theta' + v \\ c' \sin \theta' \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\cos \theta' + v/c'} \quad (11.19)$$

ただし、運動系 O' は静止系 O に対して x 軸方向に速度 v で運動しているものとした。一方、相対論的な場合の角度の変換則は、式 (11.18) をもとに計算すると

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(\beta + \cos \theta')} \quad (11.20)$$

となることが示せる。 $\beta = v/c$ であることを思い出すと、非相対論的な場合の式 (11.19) と相対論的な場合の式 (11.20) はある程度似た形をしており、**相違点は分母に $\gamma(v)$ が入るか否か**であ

ることがわかる。この係数の有無の差により、相対論/非相対論的な場合で角度の変化量が変わることになる。例えば、 $v \sim c$ (式 (11.19) では $v \sim c'$) の場合に進行方向に対して垂直に放射された光 ($\theta' = \pi/2$) を静止系から見た場合、非相対論的な場合は $\tan \theta \sim 1$ となって $\theta \sim 45^\circ$ の向きに飛ぶように見える一方、相対論的な場合は $\tan \theta \sim \frac{1}{\gamma(v \sim c)} \sim 0$ となってほぼ進行方向の向きに飛ぶことが分かる。相対論的な場合には、係数 γ の分だけ図 39 で見たビーミング効果がより激しく起こることになる。

- **放射輝度の変化:** 光源の単位面積 A からある方向の単位立体角 Ω あたりに放射される光で $E \sim E + dE$ の範囲のエネルギーを持つものに注目する。この光がもたらすエネルギー流量 Φ は

$$L_E(\theta, \phi) = \frac{d\Phi}{dEdA d\Omega} \quad (11.21)$$

と表される。この $L_E(\theta, \phi)$ は **(分光) 放射輝度** と呼ばれ、その光を観測した際の明るさを決める量となっている。詳しい導出は省略するが、観測時の明るさに対応する放射輝度 $\int L_E dE$ は D^4 に比例することが示される⁵⁵。例えば、光源の進行方向から見た光はこの係数の分増光することになる。

11.2.3 相対論的ドップラー効果

式 (11.16) は光の角振動数 ω' がローレンツ変換すると $\omega = D\omega'$ ($D = \gamma(1 + \beta \cos \theta')$) に変化するという式だが、これは**相対論的ドップラー効果**を表す。

- **可視光線の波長:** 図 41 は可視光の波長 $\lambda = c/\nu = 2\pi c/\omega$ (ν は振動数) と実際に見える色の対応図である⁵⁶。可視光線の波長は 380 ~ 780 nm 程度で、おおよそ波長が 2 倍ないし 1/2 になると可視光は目に見えない赤外線ないし紫外線に変化してしまう。

例えば、光源が光速の 60% ($v = 0.6c$) で運動している場合、式 (11.16) に出てきたドップラー因子は $D = \gamma(1 + \beta \cos \theta') = \frac{1}{4}(5 + 3 \cos \theta')$ となり、特に進行方向 ($\cos \theta' = 1$) に飛ぶ光については $D = 2$ となる。この場合、光源静止系で光源が可視光を出していたとすると、静止系からそれを見たときには可視領域外の紫外線が観測されることになる。



図 41: 波長 $\lambda = c/\nu = 2\pi c/\omega$ [nm] に対する可視光のスペクトル。ドップラー効果によって振動数は $\lambda = \lambda'/D$ と変化する。

- **非相対論的ドップラー効果との比較:** 光行差について説明したのと同様に、**ドップラー効果自体は相対論に特有の現象ではない**。非相対論的な波動（音波など）についてのドップラー効果では、波動の伝搬速度が c 、波源から角度 θ だけ離れた方向に観測者が速度 v で運動している場合、観測者が見る波動の周波数は以下で与えられる：

$$\omega = \left(1 + \frac{v \cos \theta}{c}\right) \omega' . \quad (11.22)$$

相対論的な場合の式 (11.16) との差は、ドップラー因子 D に係数 γ が入るか否かだけである。この係数の分、相対論では周波数の変化がより大きく現れる。

⁵⁵以下の論文などを参照のこと：Weiskopf et al., “Searchlight and Doppler effects in the visualization of special relativity: a corrected derivation of the transformation of radiance,” ACM Trans. Graph. 18, 3 (1999), 278-292; Van Acoleyen et al., “Captain Einstein: a VR experience of relativity”, arXiv:1806.11085 (2018).

⁵⁶出典：<https://ja.wikipedia.org/wiki/可視光線>

- **横ドップラー効果:** 相対論特有の現象としては、進行方向に対して真横の方向に飛ぶ光について波長が長くなるという**横ドップラー効果**が挙げられる。式 (11.18) からして、静止系 O で進行方向に対して真横に飛ぶように見える光 ($\cos \theta = 0$) は、光源静止系 O' では $\cos \theta' + \beta = 0$ の方向に飛んでいる。この関係式を ω の式 (11.16) に代入すると

$$\omega = \gamma (1 + \beta \cos \theta') \omega' = \gamma (1 - \beta^2) \omega' = \frac{\omega'}{\gamma} \quad (11.23)$$

となり、光源静止系における振動数 ω' と比べて静止系で見える振動数 ω は $1/\gamma$ 倍に小さくなる。一方、非相対論的なドップラー効果 (11.22) では、観測者の進行方向に対して真横の方向から届く波動については振動数は変化しない。これは、観測者の速度の音源方向の成分がゼロになるためである。したがって、真横方向から届く波動についてのドップラー効果は相対論特有の現象となっている。

「動く時計は γ 倍に遅く進むように見える」という現象を以前紹介したが、この効果によって動く光源から出る光の振動も遅くなって見える。ある意味、光源から出る光の振動が時計の刻みと同じ役割を果たしており、動く時計の遅れは今回の場合周波数の減少（波長の増大）となって見えている。

11.3 シミュレーションによる再現

以前も使った特殊相対論のシミュレーターを再度用いる。今回は“Color” ボタンを押してドップラー効果による色の変化を有効にする。

- **道路と球体:** <https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~norihiro.tanahashi/webgl/city>
- **電車:** <https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~norihiro.tanahashi/webgl/railway>

なお、このシミュレーターでは簡単のため物体や空などから生じる光のスペクトルが単純化されている。より現実的な場合見え方については [YouTube 動画 “Captain Einstein”](#)などを参照のこと。

11.3.1 光行差

図 42 に光行差による景色の見え方の変化を示す。相対論的な場合 ($v \sim c$) には光がより前方から飛んでくるため (図 39 参照)、物体の見込み角が小さくなる。そのため、光行差がない場合と比べて物体があたかも遠くなったかのように見える。ビルが歪んで見えるのは、ビルの最上階部分は地上階部分よりも観測者から離れており、その分より過去の時点で放射された光が目が届くことで、ビルの最上階部分がより過去の時点での位置（奥の方）にずれて見えるため。

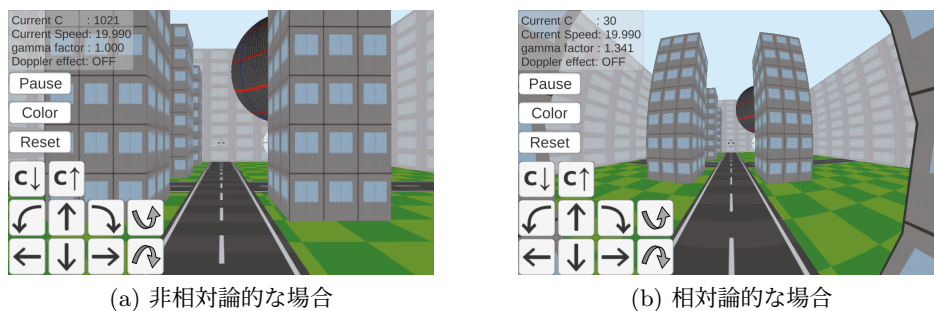


図 42: 自分が前方に運動している場合の光行差の見え方。(a) 非相対論的な場合 ($v = 0.02c$), (b) 相対論的な場合 ($v = \frac{2}{3}c$)。この図ではドップラー効果による色の変化を取り除いている。

11.3.2 相対論的ドップラー効果

図 43, 44 に相対論的ドップラー効果による色の変化を示す。図 43 は比較的速度が遅い場合 ($v = 0.05c$, $D \sim 1 + 0.05 \cos \theta$) で、進行方向から来る光はより短波長になるので青色に (図 43a)、進行方向と逆向きから来る光はより長波長になるので赤色に見える (図 43b)。同様に、自分に対して近づいてくる物体はより青色に、遠ざかる物体はより赤色に色が変化して見える (図 43c)。

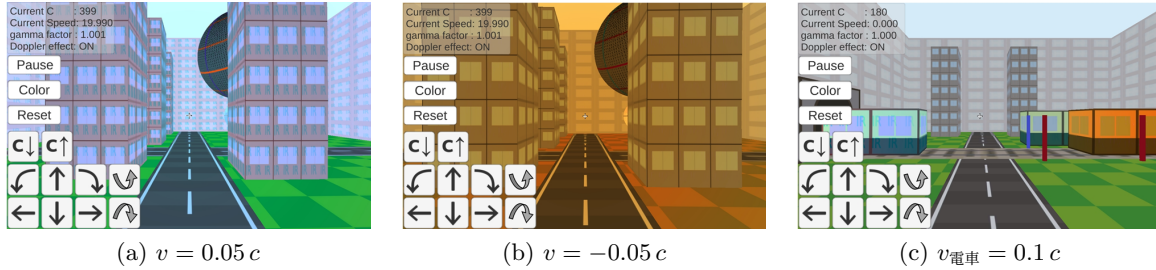


図 43: 相対論的なドップラー効果による色の変化。(a),(b) 自分が前方・後方に $v = 0.05c$ で運動している場合。(c) 電車が $v = 0.1c$ で運動している場合。

図 44 は比較的速度が速い場合 ($v = \frac{2}{3}c$, $D \sim 1.3 + 0.9 \cos \theta$) である。このシミュレーションにおけるビルや壁には、赤外線で見える塗料で“IR”、紫外線で見える塗料で“UV”と書いてある。進行方向 (図 44a) については、赤外線の成分がドップラー効果により可視光として見えている。前方が暗くなっているのは、光の強度自体は強くなっているものの、可視光だった光がドップラー効果により紫外線に変化して見えなくなっているため。なお、進行方向を中心とする円環状の領域には虹色のようなパターンが生じる (図 44b)⁵⁷。また、横ドップラー効果により進行方向に対して真横方向 (画面中央) の光が赤く変化しているほか、進行方向側は明るく、その逆側は暗くなっている (図 44c)。

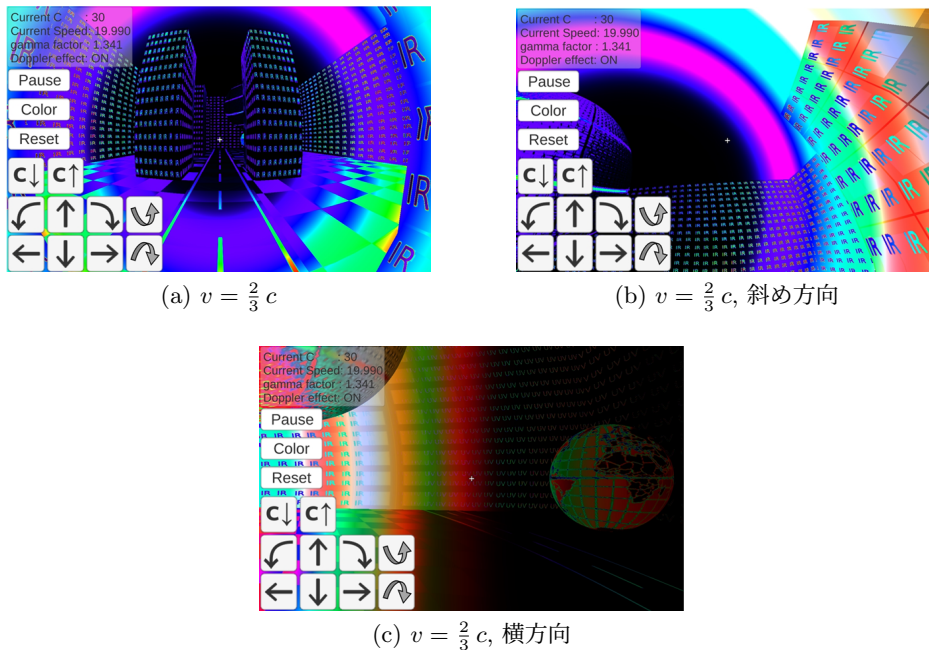


図 44: 相対論的なドップラー効果による色の変化。(a) 前方に $v = \frac{2}{3}c$ で運動している場合。(b) 進行方向に対して斜めの方向の様子。(c) 進行方向に対して真横方向の様子。

⁵⁷宇宙空間を光速近くで飛んでいる宇宙線から見ると、星々からくる光について同様の色の変化が生じる。この現象は星虹 (スターボウ) と呼ばれることがある。ただし、星々の光のスペクトルは星ごとに異なるうえ複雑な構造を持つため、きれいな虹色のパターンが見えるわけではない。<https://ja.wikipedia.org/wiki/虹#星虹>などを参照のこと。

第12回 相対論的電磁気学

12.1 これまでの経緯と今回の目標

これまでの講義で、粒子や波動の相対論における運動方程式やそれに基づいて予言される諸現象について説明してきた。電磁場のふるまいを記述する（真空中の）マクスウェル方程式⁵⁸

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (12.1)$$

（ただし、 ϵ_0, μ_0 は真空の誘電率・透磁率で、 $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ を満たす）についても、相対論と整合的になっているかを検証し、もしなっていないのであれば何らかの修正を施す必要が生じる。

ここで、相対論で使われるローレンツ変換は、マクスウェル方程式から得られる光速度が一定のままとなることを要請して作られたという経緯があった。そのため、（少なくとも光速に関与する部分について）マクスウェル方程式はローレンツ変換に対して不変なのは、という期待が持てる⁵⁹。一方、図45のような思考実験を考えると、静止系における静磁場を運動系から見たときには、時間変化する磁場と誘導電場が生じるように見える。すなわち、運動によって電場・磁場は相互に変換することが示唆される。

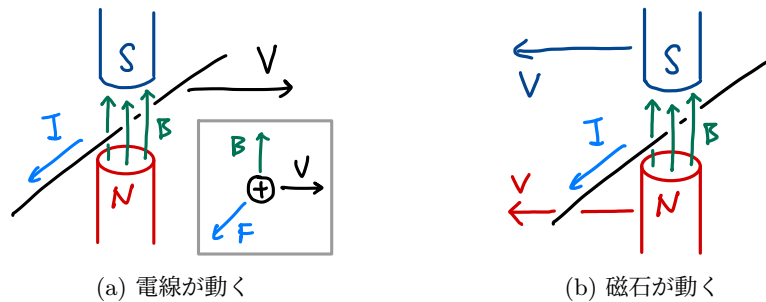


図45: 第3回の講義でも紹介した、アインシュタインの特殊相対性理論の論文冒頭で紹介されている思考実験。(a) 静磁場中を電線が動く場合と (b) 電線が静止している代わりに磁石が逆向きに動く場合とで、電線にかかる起電力は同一である。

結論としては、マクスウェル方程式(12.1)にローレンツ変換を施した際に電場 \mathbf{E} 、磁場 \mathbf{B} が

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{E}\right), \end{aligned} \quad (12.3)$$

と変換すると仮定すれば、マクスウェル方程式の形は変化しない。すなわち、電場・磁場の変換則さえ適切に設定すれば、マクスウェル方程式はそのままの形で相対論的な（特殊相対性原理を満たす）方程式となっている。なお、この際に電荷密度 ρ 、電流 \mathbf{j} も適切に変換（後述）する必要がある。今回の講義では、この結論に至るまでの導出について解説する。

⁵⁸ $\nabla \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ 等の表記法を用いる。また、これまでと同様に $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ 。

⁵⁹ 第2回の講義ノートでも見た通り、マクスウェル方程式を組み合わせることで電場・磁場の満たす波動方程式

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right) \mathbf{E} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{E} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{B} = 0 \quad (12.2)$$

が導出され、その解は光速で伝搬する波動 ($\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x} - \mathbf{V}t)$, $|\mathbf{V}| = c$ など) となる。ただし、 $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ は3次元空間におけるラプラシアンである。この波動方程式に現れる微分演算子 $\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ はローレンツ変換で変化しないスカラーとして振る舞うことが示せるが、この性質により光速がローレンツ変換で不変となっている。なお、 \mathbf{E}, \mathbf{B} はローレンツ変換で互いに混合するのだが、変換後の方程式の線型結合を適切にとることで再び式(12.2)の形に戻すことができるため、結局ローレンツ変換前後で全く同じ形の方程式が成立する。

12.2 マクスウェル方程式の4次元表記

マクスウェル方程式 (12.1) は3次元ベクトル \mathbf{E}, \mathbf{B} を用いて記述されているため、相対論における4次元的な取り扱いが難しい。そこで、マクスウェル方程式を整理して4次元的な量 (4次元ベクトルとその微分) で書き直すことを試みる。このためには、スカラー・ベクトルポテンシャル ϕ, \mathbf{A} を用いて式を書きなおすことが有用となる。電磁気学の復習も兼ねて以下で議論する。

12.2.1 マクスウェル方程式の第1, 2式

まず、マクスウェル方程式 (12.1) の第1, 2式に注目する。第1式 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は、磁場 \mathbf{B} がある3次元ベクトル \mathbf{A} の回転 (rot) で表せることを示唆する⁶⁰:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (12.4)$$

これをマクスウェル方程式の第2式に代入して整理すると

$$0 = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\nabla \phi . \quad (12.5)$$

ここで、rot を取って消えるベクトルはスカラー関数 ϕ の勾配 $\nabla \phi$ で表せるという性質を用いた。最右辺にマイナス符号をつけたのは単に慣習のため。以上の式から、電場・磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} をスカラー・ベクトルポテンシャル ϕ, \mathbf{A} によって

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A} , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (12.6)$$

と表せることが分かった。逆に、これらの表式を代入すればマクスウェル方程式 (12.1) の第1, 2式は自明に満たされる。

12.2.2 マクスウェル方程式の第3, 4式

マクスウェル方程式 (12.1) に含まれる残りの方程式についても順次見ていく。まず、第3式は

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}) = c \nabla \cdot \left[\nabla \left(-\frac{\phi}{c} \right) - \frac{\partial}{c \partial t} \mathbf{A} \right] \quad (12.7)$$

と書ける。式変形の仕方がやや恣意的だが、その意図は以下ですぐに説明する。同様に、第4式は

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{j} &= \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2} \partial_t (-\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}) \\ &= \frac{\partial}{c \partial t} \left[-\nabla \left(-\frac{\phi}{c} \right) + \frac{\partial}{c \partial t} \mathbf{A} \right] + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} . \end{aligned} \quad (12.8)$$

ただし、ベクトル解析の公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A}$ を使った。このままだと若干見通しがよくないので、空間成分の添字 $i, j = 1, 2, 3$ を用いてテンソル表記で書き直すと

$$\begin{aligned} \mu_0 j_i &= \partial_0 \left[-\partial_i \left(-\frac{\phi}{c} \right) + \partial_0 A_i \right] + \partial_i \partial^j A_j - \partial^j \partial_j A_i \\ &= \partial_0 \left[\partial_0 A_i - \partial_i \left(-\frac{\phi}{c} \right) \right] + \partial^j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) . \end{aligned} \quad (12.9)$$

ただし $\partial^j = \partial_j = \partial / \partial x^j$ で、また $\frac{\partial}{c \partial t} = \frac{\partial}{\partial x^0} = \partial_0$ と書き換えた。

⁶⁰第2式についての $\nabla \times \mathcal{E} = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = \nabla^3 \Phi$ も含めて、ポアンカレの補題から従う性質である。

- **4元ベクトルポテンシャル** A_μ : マクスウェル方程式の第3式 (12.7) と第4式 (12.9) は、以下のように書き換えると互いに似た構造を持つことに気づく。まず、天下りの的ではあるが、**4元ベクトルポテンシャル** A_μ を

$$-\frac{\phi}{c} \equiv A_0, \quad A_\mu \equiv \left(-\frac{\phi}{c}, \mathbf{A}\right) \Leftrightarrow A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A}\right) \quad (12.10)$$

と定義する。これを用いて、テンソル表記で式 (12.7), (12.9) を改めて書き直す

$$\text{式 (12.7)} \Rightarrow \frac{\rho}{c\epsilon_0} = \partial^i (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i), \quad (12.11)$$

$$\begin{aligned} \text{式 (12.9)} \Rightarrow \mu_0 j_i &= \partial_0 (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) + \partial^j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \\ &= -\partial^0 (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) - \partial^j (\partial_j A_i - \partial_i A_j). \end{aligned} \quad (12.12)$$

ただし、 $\partial^0 = \eta^{0\mu} \partial_\mu = \eta^{00} \partial_0 = -\partial_0$ となることを使った。

- **電磁場テンソル** $F_{\mu\nu}$: 式 (12.11), (12.12) には $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ のような量が繰り返し現れるのが見て取れるが、この特徴に基づいて**電磁場テンソル**と呼ばれる2階テンソルを

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (12.13)$$

と定義する。この定義からして $F_{\mu\nu}$ は**反対称テンソル**となる。すなわち、

$$F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}, \quad F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0. \quad (12.14)$$

すると、まず式 (12.11) は

$$\frac{\rho}{c\epsilon_0} = \partial^i F_{i0} = \partial^\mu F_{\mu 0}. \quad (12.15)$$

ただし、 $F_{00} = 0$ となることを使った。同様に、式 (12.12) は

$$-\mu_0 j_i = \partial^\mu F_{\mu i}. \quad (12.16)$$

- **マクスウェル方程式の4次元表記**: 式 (12.15), (12.16) は、 $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ より $\frac{1}{c\epsilon_0} = \frac{\mu_0}{c\epsilon_0 \mu_0} = c\mu_0$ となることを使うと、以下のように一本のテンソル式にまとめることができる:

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = -\mu_0 j_\mu. \quad (12.17)$$

ただし、この式の右辺に出てくる j^μ は以下のように定義される**4元電流ベクトル**である:

$$j_\mu = (-\rho c, \mathbf{j}) \Leftrightarrow j^\mu = \eta^{\mu\nu} j_\nu = (\rho c, \mathbf{j}). \quad (12.18)$$

式 (12.17) の $\mu = 0$ 成分が式 (12.15), $\mu = i$ 成分が式 (12.16) である。

以上より、マクスウェル方程式をスカラー・ベクトルポテンシャル ϕ, \mathbf{A} で表したものはただ一本の方程式 (12.17) として与えられることが分かった。また、式 (12.17) は4次元的なテンソル量で書かれているため、**特殊相対論におけるマクスウェル方程式**と呼んでも差し支えないものとなっている。ただし、現段階においては式 (12.17) は単に通常のマクスウェル方程式を $A_\mu, F_{\mu\nu}$ を使って書き換えたものに過ぎない。

12.2.3 マクスウェル方程式の共変性

$A_\mu, F_{\mu\nu}$ を使って書き換えたマクスウェル方程式 (12.17) が共变的となり特殊相対性原理を満たすためには、 A_μ, j_μ が**4元ベクトル**として振る舞うことを要請する必要がある。すなわち、

$$A'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu A_\nu, \quad j'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu j_\nu \quad (12.19)$$

を仮定しなければならない。この仮定をおくと、共変ベクトル ∂_μ, A_μ で作られている**電磁場テンソル** $F_{\mu\nu}$ は**2階共変テンソル**となる。また、式 (12.17) はテンソル量だけで作られた方程式となるため、自動的に共变的な方程式となる:

$$\partial^\nu F'_{\nu\mu} = -\mu_0 j'_\mu = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \partial^\nu F_{\nu\rho} = -(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \mu_0 j_\rho \Leftrightarrow \partial^\nu F_{\nu\mu} = -\mu_0 j_\mu. \quad (12.20)$$

12.3 電磁場のローレンツ変換

以上ではマクスウェル方程式の具体的な表式だけを見て議論し、その結果として $A_\mu, F_{\mu\nu}$ がテンソルとして振る舞えばマクスウェル方程式が共変的となることを見た。本節では、この仮定の物理的な意味について解説する。特に、電場・磁場がローレンツ変換でどのように変化するかについて調べる。

12.3.1 $F_{\mu\nu}$ の成分

電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ の定義は式 (12.13) の通りなのだが、このままでは物理的な意味が見て取りづらい。そこで、 $F_{\mu\nu}$ の成分を具体的に書き下してみる。 $F_{\mu\nu}$ が反対称テンソルであることから、 $(\mu, \nu) = (0, i), (i, j)$ (ただし、 $i, j = 1, 2, 3$ は空間成分の添字) の2通りについて考えれば十分である。以下で個別に見ていく。

- $(\mu, \nu) = (0, i)$: 以下の通り、 F_{0i} は電場 E_i を与える。

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = \frac{\partial}{c \partial t} A_i - \partial_i \left(-\frac{\phi}{c} \right) = -\frac{1}{c} \left(-\frac{\partial}{\partial t} A_i - \partial_i \phi \right) = -\frac{E_i}{c}. \quad (12.21)$$

- $(\mu, \nu) = (i, j)$: F_{ij} は磁場 B_k を与える。ただし、 k は ij 面に直行する方向 ($(i$ 軸) \times (j 軸) という外積で作られるベクトルが向いている方向) の添字。

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = (\nabla \times \mathbf{A})_k = B_k. \quad (12.22)$$

添字 i, j, k に具体的な値を入れた場合の表式は以下の通り。

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = (\nabla \times \mathbf{A})_3 = B_3, \quad F_{23} = B_1, \quad F_{31} = B_2. \quad (12.23)$$

$F_{\mu\nu}$ の反対称性から、以上の表式で添字を入れ替えたものは符号を反転した表式で与えられる (例: $F_{i0} = +E_i/c$) ほか、対角成分 (F_{00} など) はゼロとなる。したがって、 $F_{\mu\nu}$ の成分を行列表示すると

$$F_{\mu\nu} = \begin{matrix} & \overset{\nu=0}{\underbrace{\quad}} & \overset{1}{\underbrace{\quad}} & \overset{2}{\underbrace{\quad}} & \overset{3}{\underbrace{\quad}} \\ \overset{\mu=0}{\underbrace{\quad}} & 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ 1) & E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ 2) & E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ 3) & E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{matrix}. \quad (12.24)$$

この通り、電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ の成分は電場・磁場そのものである。3次元ベクトルである電場 \mathbf{E} 、磁場 \mathbf{B} を1つのテンソル $F_{\mu\nu}$ として表しなおしたもの、と思ってもよい。実際、4次元時空における2階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ の独立な成分の個数は6で、これは電場・磁場の成分数である6と一致している。

12.3.2 $F_{\mu\nu}$ のローレンツ変換

$F_{\mu\nu}$ は共変テンソルとして振る舞うので、別の慣性系における成分 $F'_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu}$ をローレンツ変換すれば得られる。ここで、式 (12.24) のとおり $F_{\mu\nu}$ の成分は電場・磁場なので、 $F_{\mu\nu}$ をローレンツ変換したものの表式を書き下せば電場・磁場のローレンツ変換則を明らかにできる。これを以下で見てみる。

静止系における $F_{\mu\nu}$ を x 軸方向に速度 V で運動する運動系から見た際の成分 $F'_{\mu\nu}$ は

$$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu F_{\alpha\beta} = (\Lambda^{-1,T})_\mu{}^\alpha F_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu \quad (12.25)$$

と表せる。ただし、 $(\Lambda^{-1,T})_{\mu}^{\alpha}$ は $(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\mu}$ の転置行列である。ただし、 $(\Lambda^{-1,T})_{\mu}^{\alpha}$ は対称行列なので、転置しても成分の値自体は変わらない。以上を踏まえて式 (12.25) を行列表示すると

$$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1,T})_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^{\beta}_{\nu} \quad (12.26)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & \vdots & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & \vdots & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} \quad (12.27)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma\beta E_1/c & -\gamma E_1/c & \gamma(-\frac{E_2}{c} + \beta B_3) & \gamma(-\frac{E_3}{c} - \beta B_2) \\ \gamma E_1/c & -\gamma\beta E_1/c & \gamma(-\beta\frac{E_2}{c} + B_3) & \gamma(-\beta\frac{E_3}{c} - B_2) \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & \vdots & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} \quad (12.28)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & F_{01}=-F_{10} & F_{02}=-F_{20} & F_{03}=-F_{30} \\ \cancel{\gamma^2(1-\beta^2)E_1/c} & 0 & F_{12}=-F_{21} & F_{13}=-F_{31} \\ \gamma(\frac{E_2}{c} - \beta B_3) & \gamma(\beta\frac{E_2}{c} - B_3) & 0 & F_{23}=-F_{32} \\ \gamma(\frac{E_3}{c} + \beta B_2) & \gamma(\beta\frac{E_3}{c} + B_2) & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E'_1}{c} & -\frac{E'_2}{c} & -\frac{E'_3}{c} \\ \frac{E'_1}{c} & 0 & B'_3 & -B'_2 \\ \frac{E'_1}{c} & -B'_3 & 0 & B'_1 \\ \frac{E'_1}{c} & B'_2 & -B'_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.29)$$

式 (12.29) で、行列の右上部分は左下部分の各成分の符号を反転したもので与えられるので省略した。この式から、電磁場の変換則は以下で与えられることが分かる⁶¹：

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta c B_3), & E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta c B_2), \\ B'_1 &= B_1, & B'_2 &= \gamma\left(B_2 + \frac{\beta}{c} E_3\right), & B'_3 &= \gamma\left(B_3 - \frac{\beta}{c} E_2\right). \end{aligned} \quad (12.30)$$

以上を少しだけまとめて書いたのが

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{E}\right). \quad (12.31)$$

ただし、 $\mathbf{E}_{\parallel}, \mathbf{B}_{\parallel}, \mathbf{E}_{\perp}, \mathbf{B}_{\perp}$ はそれぞれ \mathbf{E}, \mathbf{B} の速度 \mathbf{V} に平行・垂直な成分。以上より、式 (12.30) ないし (12.31) に従ってローレンツ変換により電場・磁場は混合することが示された⁶²。

例えば、図 45a のように静磁場 \mathbf{B} がある場合、これを運動系から眺めれば式 (12.31) の \mathbf{E}_{\perp} の式に従って電場 $\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \mathbf{V} \times \mathbf{B}$ が生じる (図 45b)。静止系においては静磁場による電線中の電子についてのローレンツ力が、運動系においては電場 \mathbf{E}'_{\perp} による起電力が、電線中に流れる電流の起源となっている。

12.4 4元電流ベクトル j^{μ} のローレンツ変換

4元電流ベクトルの定義は式 (12.18) で与えた通り $j^{\mu} = (\rho c, \mathbf{j})$ なのだが、この式の意味について少し解説を加えておく。電流がゼロではない ($\mathbf{j} \neq 0$) とき、電荷の流速と同じ速度で運動する慣性系 (これを運動系 O' とする) からその電流を見れば電荷が静止しているように見える。この運動系 O' における4元電流ベクトル j'^{μ} の成分は

$$j'^{\mu} = (\rho_0 c, \mathbf{0}). \quad (12.32)$$

⁶¹今回は式 (12.30) の変換則を $F_{\mu\nu}$ にローレンツ変換をかけることで求めたが、同じ変換則を4元ベクトルポテンシャルの変換則 (12.19) と \mathbf{E}, \mathbf{B} の定義式 (12.19) から導出することももちろん可能である。前者のやり方の方が計算が少しだけ楽なので今回はそちらの方法を使って説明した。

⁶²電場・磁場が式 (12.31) のように変換すると仮定すれば、 \mathbf{E}, \mathbf{B} で書かれた元の形のマクスウェル方程式 (12.1) がローレンツ変換前後で同じ形をとる (共変性を持つ) ことを示せる。ただ、 ∂_t, ∇ がローレンツ変換でどのように変化するかについての計算などが複雑になるので、マクスウェル方程式の共変性を示すには $F_{\mu\nu}$ を用いて書かれた方程式について式 (12.20) のような解析をやる方がシンプルで済む。

ただし、 ρ_0 は電荷が静止している状態で測った電荷密度（静止電荷密度）である。一方、電荷が x 軸方向に速度 V で運動している場合の j^μ は、 j'^μ にローレンツ変換をかけることで得られる：

$$j^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu j'^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & | & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \\ \hline & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0 c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\rho_0 c \\ \gamma\rho_0 c\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12.33)$$

$\beta = V/c$ であることに注意すると、結局

$$\underbrace{j^\mu}_{=(\rho c, \mathbf{j})} = \rho_0 \gamma (c, \mathbf{V}) = \rho_0 u^\mu \quad (12.34)$$

と書けることがわかる。ただし、 u^μ は電荷の 4 元速度 $u^\mu = \gamma (c, \mathbf{V})$ である⁶³。

式 (12.34) は、電荷 ρ 、電流 \mathbf{j} が一般に

$$\rho = \gamma\rho_0, \quad \mathbf{j} = \gamma\rho_0 \mathbf{V} \quad (12.35)$$

と与えられることを示している。電荷が運動している場合にはローレンツ収縮により電荷密度が静止時の値 ρ_0 と比べて γ 倍に増大し、電流 \mathbf{j} は増大した電荷密度 $\gamma\rho_0$ が速度 \mathbf{V} で運動しているという式 ($\mathbf{j} = \gamma\rho_0 \mathbf{V}$) で与えられる、というのがこの式の物理的な解釈である。

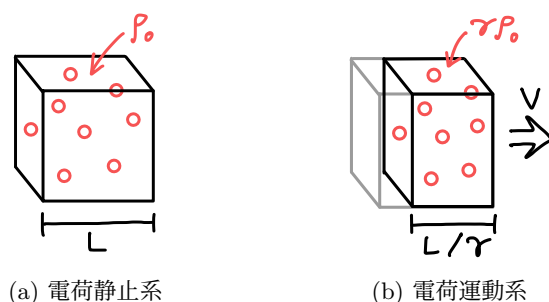


図 46: (a) 電荷静止系で密度 ρ_0 の電荷分布を見たもの。(b) 同じ電荷分布を電荷が速度 \mathbf{V} で運動して見える慣性系で見たもの。電荷の分布領域の進行方向の長さが $1/\gamma$ 倍にローレンツ収縮する分、電荷密度は $\gamma\rho_0$ に増大する。この電荷密度が速度 \mathbf{V} で運動するので電流は $\mathbf{j} = \gamma\rho_0 \mathbf{V}$ となる。

12.5 $F_{\mu\nu}$ で表したマクスウェル方程式

式 (12.24) で与えた電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ の具体的表式を踏まえて、改めてマクスウェル方程式 (12.1) が $F_{\mu\nu}$ を用いてどのように表されるかを見ておく。

- **マクスウェル方程式の第 3, 4 式:** 式 (12.17) は $F_{\mu\nu}$ の発散として表されている。実際、式 (12.24) について発散 $\partial^\mu F_{\mu\nu}$ を取ると、マクスウェル方程式 (12.1) の第 3, 4 式の左辺に比例する式が得られる。例として、 $\partial^\mu F_{\mu\nu}$ の $\nu = 0, 1$ の成分をそれぞれ計算すると

$$\partial^\mu F_{\mu 0} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu 0} = -\partial_0 \underbrace{F_{00}}_{=0} + \partial_i \underbrace{F_{i0}}_{=-E_i/c} = -\frac{1}{c} \partial_i E_i = -\frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad (12.36)$$

⁶³ j^μ の表式 (12.34) は、電流を構成する成分が全て同じ速度 \mathbf{V} を持つ場合だけ有効である。式 (12.35) についても同様。複数の異なる速度を持った成分がある場合の j^μ は、各成分ごとの j^μ (12.34) の線型結合で与えられる。

$$\begin{aligned}
\partial^\mu F_{\mu 1} &= \eta^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu 1} = -\partial_0 \underbrace{F_{01}}_{=-E_1/c} + \partial_1 \underbrace{F_{11}}_{=0} + \partial_2 \underbrace{F_{21}}_{=-B_3} + \partial_3 \underbrace{F_{31}}_{=B_2} \\
&= \frac{\partial}{c \partial t} \frac{E_1}{c} + \underbrace{-\partial_2 B_3 + \partial_3 B_2}_{=-\underbrace{(\nabla \times \mathbf{B})_1}} = - \left[(\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} \right]_1 . \quad (12.37)
\end{aligned}$$

式 (12.37) の右辺は、 $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ を使うとマクスウェル方程式 (12.1) の第 4 式 $\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}]$ に比例することが分かる。 $\nu = 2, 3$ についての方程式も同様に計算できる。

- **マクスウェル方程式の第 1, 2 式:** マクスウェル方程式 (12.1) の第 1, 2 式に相当するものは式 (12.17) からは出てこない。12.2.1 節でも説明した通り、第 1, 2 式は電場・磁場をポテンシャル ϕ, \mathbf{A} で表す式を代入すると自動的に満たされてしまうので特に考えなくても良いのだが、一応 $F_{\mu\nu}$ を使ってこれらを表す式を書くこともできるので紹介しておく。

天下りのだが、以下の式を考えてみる⁶⁴：

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 . \quad (12.38)$$

左辺の各項は $\partial_\mu F_{\nu\rho}$ の添字を巡回置換したものである。 $(\mu\nu\rho) = (012), (123)$ の場合にこの式がどのような式になるかを見てみよう。まず、 $(\mu\nu\rho) = (012)$ の場合は

$$0 = \partial_0 \underbrace{F_{12}}_{=B_3} + \partial_1 \underbrace{F_{20}}_{=E_2/c} + \partial_2 \underbrace{F_{01}}_{=-E_1/c} = \frac{\partial}{c \partial t} B_3 + \frac{1}{c} (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) = \frac{1}{c} [\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E}]_3 . \quad (12.39)$$

同様に、 $(\mu\nu\rho) = (123)$ の場合は

$$0 = \partial_1 \underbrace{F_{23}}_{=B_1} + \partial_2 \underbrace{F_{31}}_{=B_2} + \partial_3 \underbrace{F_{12}}_{=B_3} = \partial_i B_i = \nabla \cdot \mathbf{B} . \quad (12.40)$$

添え字 $(\mu\nu\rho)$ をほかの値に取った場合は、マクスウェル方程式 (12.1) の第 1, 2 式の成分のどれかが出てくるか、もしくは自明な式 ($0 = 0$) が出てくる。それらをまとめると、式 (12.38) は

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (12.41)$$

すなわちマクスウェル方程式 (12.1) の第 1, 2 式と等価であることがわかる。

以上をまとめると、マクスウェル方程式 (12.1) を電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ で表したものは

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = -\mu_0 j_\mu , \quad \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \quad (12.42)$$

と表されることが分かる。

⁶⁴式 (12.38) は $F_{\mu\nu}$ の定義式 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ を代入すると自動的に満たされる恒等式である。実際、 $F_{\mu\nu}$ を代入して式 (12.38) の左辺を評価すると

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} &= \partial_\mu (\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) + \partial_\nu (\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho) + \partial_\rho (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&= (\partial_\mu \partial_\nu A_\rho - \partial_\nu \partial_\mu A_\rho) + (\partial_\nu \partial_\rho A_\mu - \partial_\rho \partial_\nu A_\mu) + (\partial_\rho \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu \partial_\rho A_\nu) = 0 .
\end{aligned}$$

最後の等号は、偏微分が可換 ($\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$) であるために括弧でくくった各項がそれぞれゼロとなることから従う。というわけで、マクスウェル方程式 (12.1) に \mathbf{E}, \mathbf{B} を ϕ, \mathbf{A} で書いた式 (12.6) を代入すると恒等的に満たされたように、 $F_{\mu\nu}$ で書き表した式 (12.38) も自動的に満たされる恒等式に過ぎない。式 (12.38) はビアンキの恒等式と呼ばれている。

第13回 相対論的電磁気学 (続き)

前回の講義で、電磁場の時間発展を記述するマクスウェル方程式が特殊相対論ではどのように記述されるかを説明した。これに、荷電粒子が電磁場とどのように相互作用するかを記述する方程式を付け加えれば電磁気学の諸現象を一通り記述できるようになる。今回はこの荷電粒子の運動方程式を中心に解説する。

13.1 復習：マクスウェル方程式

- (電場 \mathbf{E} , 磁場 \mathbf{B} についての) マクスウェル方程式:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (13.1)$$

- 4元ベクトルポテンシャル A^μ :

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right) \quad (\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}) \quad (13.2)$$

A^μ はローレンツ変換に対して反変ベクトルとして振る舞うと仮定する。なお、共変成分 A_μ は

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu = \left(-\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right). \quad (13.3)$$

- 4元電流ベクトル j^μ : ρ_0 は静止電荷密度 (スカラー), u^μ は電荷密度の4元速度。

$$\underbrace{j^\mu}_{=(\rho c, \mathbf{j})} = \rho_0 \gamma(c, \mathbf{V}) = \rho_0 u^\mu \quad (\rho = \gamma \rho_0, \quad \mathbf{j} = \gamma \rho_0 \mathbf{V}) \quad (13.4)$$

j^μ は4元共変ベクトルとして振る舞う。電流を担う物質が複数種類存在するときは、 j^μ は各成分の j^μ の和になる。

- 電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{matrix} & \overset{\nu=0}{\underbrace{\quad}} & \overset{1}{\underbrace{\quad}} & \overset{2}{\underbrace{\quad}} & \overset{3}{\underbrace{\quad}} \\ \underset{\mu=0}{\underbrace{\quad}} & 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ 1) & E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ 2) & E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ 3) & E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{matrix} \quad (13.5)$$

今回は、この式にローレンツ変換をかけることで \mathbf{E}, \mathbf{B} のローレンツ変換則を導出した:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{E}\right). \quad (13.6)$$

$\mathbf{E}_{\parallel}, \mathbf{E}_{\perp}$ は \mathbf{E} の \mathbf{V} に対して平行・垂直な成分である。 \mathbf{B} についても同様。

- ($A^\mu, F_{\mu\nu}$ で表した) マクスウェル方程式:

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = -\mu_0 j_\mu. \quad (13.7)$$

この式で表されるのは元のマクスウェル方程式(13.1)の第3, 4式である。第1, 2式は \mathbf{E}, \mathbf{B} を ϕ, \mathbf{A} で表すと自動的に満たされる。第1, 2式も $F_{\mu\nu}$ で表すことも可能で $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$ となる。

13.2 荷電粒子の運動方程式

マクスウェル方程式(13.7)は電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} の時間発展を記述するが、電荷密度 ρ , 電流 \mathbf{j} が従う方程式は別途与える必要がある。以下では簡単のため、荷電粒子の場合について説明する。

13.2.1 ローレンツ力

まずニュートン力学の場合について考えると、電荷 q の荷電粒子が電磁場の作用で感じる力 \mathbf{F} は

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (13.8)$$

で与えられるのであった。右辺はローレンツ力と呼ばれており、第1項は電場による力、第2項は磁場中を荷電粒子が運動している場合に発生する力である。

特殊相対論においても、粒子の速度が十分に遅い ($V \ll c$) 場合にはローレンツ力の式 (13.8) の式がそのまま成立する。また、この式をテンソル量で書き下せれば、ローレンツ変換することにより任意の慣性系における表式が得られる。そこで、式 (13.8) をこれまでに出てきたテンソル量で書き表すことを試みる。

- **構成要素の候補は $F_{\mu\nu}$ と u^μ :** 式 (13.8) をよく見ると、右辺に出てくるのは電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} および粒子の速度 \mathbf{V} だけである。したがって、テンソル量を組み合わせてこの式を書くときも、電磁場および粒子の速度に関するテンソル量を使えばよいと期待される。そのようなテンソル量で我々が知っているのは電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ と荷電粒子の4元速度 u^μ なので、それらが構成要素の候補となる。
- **4元力は F^μ は反変ベクトル:** 式 (13.8) は力を表す3次元ベクトル \mathbf{F} を書き下したもののだが、これに対応するものは4元力 f^μ で⁶⁵、これは4元反変ベクトルである。そのため、上で見つけた構成要素 $F_{\mu\nu}, u^\mu$ を組み合わせる際も、その結果が4元反変ベクトルになるようにする必要がある。

上記の要請を満たす $F_{\mu\nu}, u^\mu$ の組み合わせを考えるにあたり、もっとも単純な組み合わせ方である

$$f_\mu = F_{\mu\nu} u^\nu \quad (13.9)$$

がどのような成分を持つベクトルになるかをまず調べてみる。式 (13.5) と $u^\mu = \gamma(c, \mathbf{V})$ を使って f_μ の成分を具体的に書き下してみると

$$f_\mu = F_{\mu\nu} u^\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_1}{c} & -\frac{E_2}{c} & -\frac{E_3}{c} \\ \frac{E_1}{c} & 0 & B_3 & -B_2 \\ \frac{E_2}{c} & -B_3 & 0 & B_1 \\ \frac{E_3}{c} & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma V^1 \\ \gamma V^2 \\ \gamma V^3 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} \\ E_1 + V^2 B_3 - V^3 B_2 \\ E_2 + V^3 B_1 - V^1 B_3 \\ E_3 + V^1 B_2 - V^2 B_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (13.10)$$

さらに、このベクトルは下付き添字を持つ共変ベクトルなので、上付き添字を持つ反変ベクトルに直すと

$$f^\mu = \eta^{\mu\nu} f_\nu = \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (13.11)$$

この f^μ はテンソル量だけから作られているので、ローレンツ変換に対して4元反変ベクトルとして振る舞う。また、 f^μ の空間成分 $f^i = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$ は、係数 γ がかかっている以外はニュートン力学におけるローレンツ力 (13.8) と一致している。

⁶⁵以前は4元力ベクトルを大文字の F^μ と書いていたが、電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ と紛らわしいので、今回は4元力ベクトルの方を小文字の f^μ と表記することにする。13.2.2節で粒子のエネルギーの文字を $E \rightarrow \mathcal{E}$ と変更しているのも、電場 \mathbf{E} と紛らわしいため。

13.2.2 荷電粒子の運動方程式

ここで、第9回、第10回で解説した相対論的力学の運動方程式を思い出してみると

$$\underbrace{\frac{dp^\mu}{d\tau}}_{=\gamma dp^\mu/dt} = f^\mu, \quad p^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right), \quad f^\mu = \gamma \left(\frac{1}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{f}, \mathbf{f} \right). \quad (13.12)$$

ただし、 $\mathcal{E} = m_0 \gamma c^2$ は荷電粒子のエネルギー、 $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{V}$ は運動量である。ここで、式(13.11)に荷電粒子の電荷 q をかけたものを改めて f^μ と定義しなおすと、この式は

$$\gamma \frac{dp^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathcal{E}/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = f^\mu = \gamma q \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (13.13)$$

$$\therefore \frac{d\mathcal{E}}{dt} = q \mathbf{V} \cdot \mathbf{E}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (13.14)$$

式(13.14)の2つの式の物理的な意味は下記の通り。

- $d\mathbf{p}/dt$ の式は、ローレンツ力(13.8)による粒子の運動量の時間変化を決める式である。
- $d\mathcal{E}/dt$ の式は、ローレンツ力(13.8)による粒子のエネルギー変化を表している。ローレンツ力のうち $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ は速度 \mathbf{V} と直交しているため粒子に対する仕事量はゼロとなり、電場による力からくる仕事 $\mathbf{V} \cdot (q\mathbf{E})$ だけが寄与している。

式(13.14)は、4次元的な式(13.12)の時間・空間成分をそれぞれ個別に書いたものである。逆に、式(13.12)のように4次元的な表式でこれを表すと

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu = q F^\mu{}_\nu u^\nu. \quad (13.15)$$

これとマクスウェル方程式 $\partial^\nu F_{\nu\mu} = -\mu_0 j_\mu$ (式13.7) を組み合わせると、電磁場と荷電粒子の時間発展を記述する運動方程式となる。ただし、点粒子を考える場合は、 j^μ に出てくる電荷密度 ρ 、電流 \mathbf{j} は⁶⁶

$$\rho = q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{j} = q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \quad (13.17)$$

と与えられる。ただし、粒子の軌道は $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ で、 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t))$ は粒子の位置で非ゼロの値をとる3次元的なデルタ関数である。

13.3 具体例：平行電流間の引力

2本の平行な電線に同じ向きに電流を流すと引力が生じる。一方の電線の電流が磁場を作り、その磁場中をもう一方の電線の電流が流れることで発生するローレンツ力 $F = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ がこの引力の起源である、と考えるのが普通の解釈の仕方である。一方、この系を電線に沿って一定の速度で動きながら見ると、ローレンツ力とは異なる事情により電線間の引力が発生したように見える。電磁場・電流についてのローレンツ変換の具体例として、この平行電流間の引力について解析してみる⁶⁷。

⁶⁶マクスウェル方程式(13.7)の発散を取ると、4元電流ベクトル j^μ が満たすべき方程式を以下の通り導出できる：

$$0 = \partial^\mu \partial^\nu F_{\nu\mu} = -\mu_0 \partial^\mu j_\mu \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \partial_\mu j^\mu = -\frac{\partial j^0}{c dt} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = -\frac{\partial \rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (13.16)$$

これは4元電流ベクトル j^μ の保存則を表す式である。例えば、式(13.17)の電荷密度 ρ 、電流 \mathbf{j} はこの保存則を満たすことを計算で示せる。

⁶⁷参考: <https://www2.hamajima.co.jp/~tenjin/labo/parallelcurrent.pdf> 等。

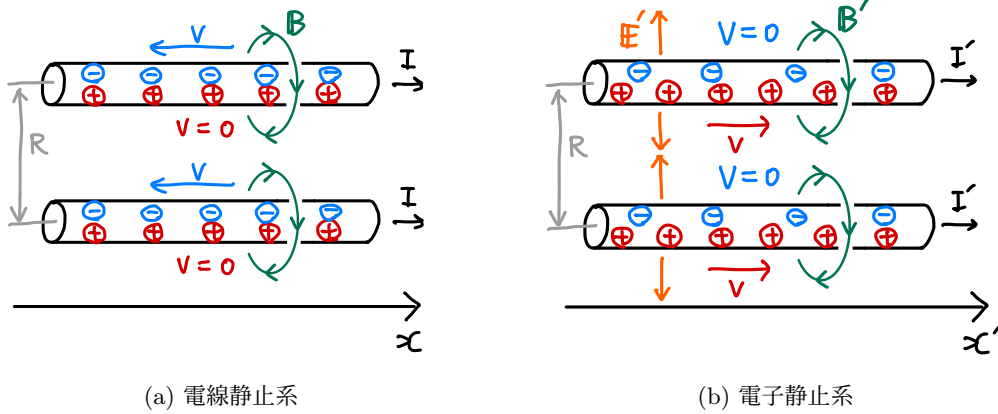


図 47: 平行な電線を流れる電流。電流が流れることにより 2 本の電線間には引力が働く。(a) 電線静止系における電荷の分布と運動の様子。(b) 電子の静止系における様子。

13.3.1 電線静止系

電線は正の電荷をもつ金属イオンとその周辺を運動する自由電子からなる。電流が流れる様子を電線（を構成している金属イオン）の静止系で見ると、金属イオンが静止しており、電子が電流と逆方向に一定の速度で運動して見える。簡単のためこの電線は電氣的に中性だとして、この電流が作る電磁場を解析してみる。

- **4元電流:** x 軸方向に電線が伸びており、 x 軸の正の方向に電流が流れているものとする。この場合、金属イオンは静止しており、自由電子が x 軸負の方向に流れる。自由電子と金属イオンの 4元電流ベクトルをそれぞれ $j_{(e)}^\mu, j_{(i)}^\mu$ とすると、それぞれ

$$j_{(e)}^\mu = \gamma(V)\rho_e(c, -V)\delta(y)\delta(z), \quad j_{(i)}^\mu = \rho_i(c, 0)\delta(y)\delta(z). \quad (13.18)$$

ただし、 $V > 0$ は電子の（平均的な）速さ、 $\rho_e < 0, \rho_i > 0$ は自由電子、金属イオンの静止状態における線密度である。電線の静止系で電線は電氣的に中性であると仮定したので、電荷の合計はゼロでなくてはならない。そのためには

$$\gamma\rho_e + \rho_i = 0 \quad \therefore \rho_i = -\gamma\rho_e \quad (13.19)$$

であればよい。この時、4元電流ベクトルの合計 j^μ は

$$j^\mu = j_{(e)}^\mu + j_{(i)}^\mu = (0, -\gamma\rho_e V)\delta(y)\delta(z). \quad (13.20)$$

- **電流が作る磁場:** 式 (13.20) の j^μ について、合計の電荷はゼロであるために電線周辺には電場が生じない。磁場については、マクスウェル方程式の $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ から計算できる。電線から R だけ離れた地点における磁場の大きさ $B(R)$ は

$$\int_{r < R} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{r=R} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi R B(R) = \int_{r < R} \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\mu_0 \gamma \rho_e V \quad (13.21)$$

$$\therefore B(R) = \frac{-\mu_0 \gamma \rho_e V}{2\pi R}. \quad (13.22)$$

磁場の向きは電流に右ネジの法則を適用して決まる向き（ x 軸の正の向きについて右巻き）である。

- **もう一方の電線にかかる力:** もう一方の電線についても式 (13.20) と同じ (y, z 座標だけ異なる) 電流が流れているものとする。この電流の単位長さ当たりにかかる力は、電場がゼロであることからローレンツ力の式 $\mathbf{F} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ から計算できる。その大きさは

$$F = -\gamma\rho_e V B(R) = \frac{\mu_0 \gamma^2 \rho_e^2 V^2}{2\pi R}. \quad (13.23)$$

$q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ の向きからして、力 \mathbf{F} の向きは電線同士を近づける向きとなる。

この系において電線間の引力は自由電子にかかるローレンツ力だけから生じていることに注意したい。金属イオンの速度はゼロなのでローレンツ力は発生せず、まだ電場がゼロなので電氣的な力もかからない。

13.3.2 電子静止系

次に、同じ系を電線中を流れる自由電子と同じ速さで動きながら見てみよう。自由電子は x 軸の負の方向に速さ V で運動していたが、それと同じ速さの慣性系（電子静止系）をとり、その系に乗っている観測者から見たときにどのような電流や力が見えるかを考えることになる。

- **4元電流:** 電子静止系における電子と金属イオンの4元電流をローレンツ変換で求めてみる。

$$\begin{aligned} j'_{(e)}{}^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu(-V)j^\mu = \gamma(-V) \begin{pmatrix} 1 & -(-V)/c \\ -(-V)/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(V)\rho_e c \\ -\gamma(V)\rho_e V \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z) \\ &= \gamma^2 \rho_e c \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z) = \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2)\rho_e c \\ 0 \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z) \end{aligned} \quad (13.24)$$

$$j'_{(i)}{}^\mu = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_i c \\ 0 \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z) = \gamma \rho_i c \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z) = -\gamma^2 \rho_e c \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z) \quad (13.25)$$

速度 V で運動していた電子がこの慣性系では止まっているので、ローレンツ収縮がかからなくなる分電荷密度は下がる($\rho = \gamma\rho_e \rightarrow \rho_e$)。一方、静止していた金属イオンが x 軸の正の向きに速度 V で運動するので、ローレンツ収縮のために電荷密度が大きくなる($\rho = \rho_i \rightarrow \gamma\rho_i$)。以上より、電子静止系における電線の4元電流ベクトルを求めると

$$j'^\mu = j'_{(e)}{}^\mu + j'_{(i)}{}^\mu = \gamma^2 \rho_e c \begin{pmatrix} -\beta^2 \\ -\beta \end{pmatrix} \delta(y)\delta(z). \quad (13.26)$$

この式の $\mu = 0$ 成分から

$$\rho' = -\gamma^2 \beta^2 \rho_e \delta(y)\delta(z) \quad (13.27)$$

となり、**電子静止系では電線が帯電する**ことがわかる。上でも説明した通り、電子静止系に移る際に自由電子間の間隔は大きくなり、金属イオン間の間隔は小さくなるために、電子の負電荷よりも金属イオンの正電荷の方が多くなったのが原因である。

- **電流が作る電場・磁場:** 4元電流 j'^μ が分かっているので、それをマクスウェル方程式に代入することで j'^μ が作る電場・磁場を求められる。一方、13.3.1の解析から電線周りの磁場が既に得られているので、これにローレンツ変換をかけることで電子静止系における電場・磁場を求めすることもできる。今回はこの手法を使ってみよう。

元の電線静止系では、電線の周りを回転する向きに磁場がかかっており、磁場のその他の成分や電場は全てゼロであった。この電場・磁場を式(13.6)に従って変換する。まず、速度（および電線）に平行な成分は変換前後ともにゼロなので、 $\mathbf{E}'_{\perp}, \mathbf{B}'_{\perp}$ についてだけ考える。ローレンツ変換に使う \mathbf{V} が x 軸の負の向きに向いていることに留意すると、変換後の電磁場の値は

$$|\mathbf{E}'_{\perp}| = \gamma|\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}| = \gamma|\mathbf{V} \times \mathbf{B}| = \gamma V \frac{\mu_0 \gamma |\rho_e| V}{2\pi R} = \frac{\mu_0 |\rho_e| \gamma^2 V^2}{2\pi R}, \quad (13.28)$$

$$|\mathbf{B}'_{\perp}| = \gamma \left| \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{E} \right| = \gamma |\mathbf{B}_{\perp}| = \frac{\mu_0 \gamma^2 |\rho_e| V}{2\pi R}. \quad (13.29)$$

\mathbf{E}' の向きは電線から外向き、 \mathbf{B}' の向きは x 軸について右巻きの方向である。

- **もう一方の電線にかかる力:** もう一方の電線にも静止する自由電子 $j_{(e)}^{\mu}$ と金属イオン流 $j_{(i)}^{\mu}$ が乗っていて、これらが上で求めた \mathbf{E}' , \mathbf{B}' を感じることで力がかかる。以下では、**電子と金属イオンにかかる力を個別に求める**。結論としては、**電子は静電気力によりもう一方の電線に引かれ、金属イオンには力はかからない**ことが示される。

[電子にかかる力] 式 (13.24) からわかる通り、電子の線密度は ρ_e で速度はゼロである。そのため、ローレンツ力はかからず電場によるクーロン力だけが発生する。電子静止系における単位長さ中に含まれる電子にかかる力は

$$F' = |\rho_e \mathbf{E}'| = \frac{\mu_0 \rho_e^2 \gamma^2 V^2}{2\pi R} . \quad (13.30)$$

[金属イオンにかかる力] 金属イオンは速度 V で x 軸の正の方向に運動しているため、 \mathbf{E}' によるクーロン力と \mathbf{B}' によるローレンツ力の両方がかかる。 $j_{(i)}^{\mu}$ の表式 (13.25) も使ってそれぞれを求めると

$$F_{\mathbf{E}'} = |-\gamma^2 \rho_e \mathbf{E}'| = \gamma^2 \rho_e \cdot \frac{\mu_0 |\rho_e| \gamma^2 V^2}{2\pi R} = \frac{\mu_0 \rho_e^2 \gamma^4 V^2}{2\pi R} , \quad (13.31)$$

$$F_{\mathbf{B}'} = |\mathbf{j}' \times \mathbf{B}'| = \left| \gamma^2 \rho_e V \cdot \frac{\mu_0 \gamma^2 \rho_e V}{2\pi R} \right| = \frac{\mu_0 \rho_e^2 \gamma^4 V^2}{2\pi R} . \quad (13.32)$$

すなわち、クーロン力とローレンツ力は大きさが等しい。今回の場合クーロン力は斥力、ローレンツ力は引力となるので、合計すると互いにちょうど打ち消し合い、**金属イオンには力がかからない**ことになる。電線静止系で金属イオンには力がかかっていなかったが、それをローレンツ変換して得られる電子静止系でもやはり力がかからない、というだけの結果ではある。

13.3.3 考察

以上の結果をまとめると、平行電流間にかかる引力の起源は

- **電線静止系** (電線が電氣的に中性となる系): 運動する電子にかかるローレンツ力
- **電子静止系:** 静止している電子にかかるクーロン力

となり、どちらの慣性系で見るとかによって全く異なる。特に、後者は**ローレンツ収縮の効果**で電子・金属イオンの電荷密度に差が生じたことで生まれたものである。

ここで、電線の中を流れる電子の平均的な速さは意外と遅く、例えば太さ数 mm の導線に数 A の電流を流す場合には 1 mm/sec 程度である。したがって、上記の実験を電子とその程度の速さで移動しながら見ると、電線間の引力はローレンツ収縮で現れた電荷によるクーロン力から生じていることになり、その意味で**ローレンツ収縮の効果を観測できる**ことになる。通常は光に近い速さで動かなければ観測しがたい相対論的效果を、日常的なスケールで比較的容易に見ることができる実験と言える。

[力の比較について] 電線静止系で電線の単位長さあたりにかかる力 (13.23) と電子静止系での単位長さ当たりの力 (13.30) は、一見すると同じ表式をしている。これらの式が一致していることをもって、どちらの系で見ても電線にかかる力は同じと結論したくなるかもしれない。しかし、ローレンツ収縮のためにそれぞれの系の単位長さあたりに含まれる電子の個数は異なるため、それにかかる力についても若干気をつけて解析する必要がある。

混乱を避けるために、同じ個数の電子 (同じ量の電荷) にかかる力に注目する。まず、電線静止系で単位長さあたりに含まれる電荷は $\gamma \rho_e$ で、これに (13.23) だけの力がかかっていることになる。一方、電子静止系における電荷密度は ρ_e なので、 $\gamma \rho_e$ だけの電荷を確保するのは電線の長さ γ の部分を切り取ってくる必要がある。単位長さあたりにかかる力は先ほどと同じ値 (式 (13.30)) なので、長

さ γ の部分にかかる力はその γ 倍となる。すなわち、電線静止系と比べて、電子静止系の電子には γ 倍の力がかかっていることになる。

詳細は割愛するが、粒子にかかる力 \mathbf{F} もローレンツ変換に従って変換し (4元力 $F^\mu = \gamma(\frac{1}{c}\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{F})$ がベクトルとして振る舞う)、速度に垂直な方向の力 \mathbf{F} の成分は静止系から運動系に移ると $\frac{1}{\gamma}$ 倍される。これはちょうど上で示した静止系の電子にかかる力が γ 倍になっているという結果と同じ性質で、したがって電線静止系・電子静止系のどちらで見ても電子にかかる力は同じ (ローレンツ変換に基づいて正しく変換されている) ということが分かる。

第 14 回 一般相対性理論に向けて

これまで行ってきた特殊相対性理論についての講義の締めくくりに代えて、重力の理論である一般相対性理論の概要について解説する。一回の講義で一般相対性理論の全ては解説できないので、一般相対論を構築するための基礎と、一般相対論における物理現象の簡単な例に限って紹介する。

14.1 一般相対論の基礎

14.1.1 特殊相対論の限界

特殊相対性理論は、ニュートン力学と電磁気学（特に光速度が一定という性質）との不整合性を解消するために導入された理論と考えることもできる。実際、光速度が一定であるという性質に関連する諸現象を特殊相対論はうまく再現してくれる。その一方で、以下のような点は特殊相対論ではカバーされない。そのため、特殊相対論には改善の余地があると示唆される。

- 重力が取り扱えない。
- 慣性系における運動方程式や、異なる慣性系同士における物理量・運動方程式の関係（ローレンツ変換）は取り扱えるが、慣性系ではない系（速度が一定ではない**加速度系**など）における物理現象の記述が単純にはできない。

また、特殊相対論では時空はいたるところ平坦かつ一様⁶⁸と仮定されていた。一方、非慣性系を考えると**曲がった時空**を考える必要が生じる⁶⁹。このような場合（計量が $\eta_{\mu\nu}$ からずれる場合）、特殊相対性理論では単純には取り扱えない。

14.1.2 等価原理 / 一般相対性原理

特殊相対論を構築するために必要だった物理的な仮定は、**任意の慣性系で物理法則は同じである**という**特殊相対性原理**と、それを電磁気学に適用すると得られる**光速度一定の原理**であった。上で挙げた特殊相対論の問題点を解決するために、アインシュタイン自身が導入した新たな仮定は以下の通りであった。

- **等価原理**：十分小さな領域の内部では、**加速度による慣性力と重力は物理的に等価である**。

この原理は、物体の慣性質量（運動方程式の加速度項の係数）と重力質量（物体が感じる重力の強さの比例係数）が互いに等しいという実験事実がまずあり、それを物理理論（一般相対論）が従うべき原理に格上げしたものである。図 48 を参照。

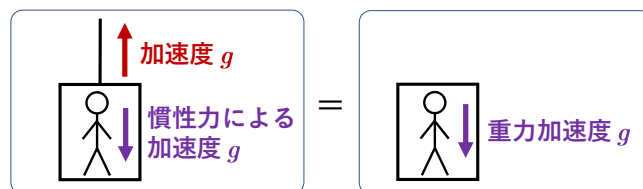


図 48: 等価原理: 重力 $m_{\text{重力}}g$ と加速度 g による慣性力 $m_{\text{慣性}}g$ は互いに区別できない。

⁶⁸世界間隔 $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(cdt)^2 + dx^2$ に出てくる係数が定数の単位行列（について時間部分の符号を反転させたもの）になっている、ということが時空が平坦かつ一様になっていることと対応している。

⁶⁹[非慣性系と曲がった空間の例] ある静止した円盤上に半径 R の円を描いたとき、その円周 L は $2\pi R$ となる。一方、この円盤を回転させると、回転方向にはローレンツ収縮が起こるので、同じ半径 R に対する円周は $2\pi R$ よりも短くなる。このような面は平面ではあり得ず、球面のように曲がった表面と対応している。また、空間が曲がっていることで世界間隔も $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(cdt)^2 + dx^2$ とは異なった表式となる。

慣性力と重力が互いに等価なので、重力がかかっている慣性系が存在する場合、その重力加速度 \mathbf{g} と同じ方向に加速する系（自由落下系）に移ることで、逆向きの慣性力を発生させて重力を打ち消すことができる。慣性質量 $m_{\text{慣性}}$ 、重力質量 $m_{\text{重力}}$ の粒子の運動方程式でこれを表すと

$$m_{\text{慣性}}\mathbf{a} = m_{\text{重力}}\mathbf{g} - m_{\text{慣性}}\mathbf{g} = 0. \quad (14.1)$$

右辺に出てくる $m_{\text{重力}}\mathbf{g}$ が粒子にかかる重力、 $-m_{\text{慣性}}\mathbf{g}$ が系の加速度 \mathbf{g} のために生じた慣性力で、これらがちょうど打ち消し合っている。

重力を打ち消した後の自由落下系では、粒子は重力・慣性力を感じないため、元から重力場も加速度もかかっていない慣性系に粒子がある場合と全く同じ状況となる。等価原理は、自由落下系が慣性系と単に類似しているだけではなく、物理的に全く同等であるという仮定である。ただし、この同等性は注目する系が十分小さい場合に限られる。

ここで、重力場が存在しない慣性系については特殊相対論が成立する。等価原理によれば、自由落下系も慣性系と同等なので、自由落下系でも特殊相対論が成立することになる。なので、重力場が存在する領域における運動方程式を得るには以下の手順を踏めばよい：

$$\left[\begin{array}{l} \text{自由落下系に座標変換} \rightarrow \text{自由落下系で特殊相対論における運動方程式が成立すると仮定} \\ \rightarrow \text{元の座標系に座標変換し直す} \end{array} \right]$$

- 一般相対性原理： 任意の座標系で物理法則は同じ形で与えられる。

特殊相対性原理で「任意の慣性系で」となっていたところを「任意の座標系（加速度系）で」と拡張したものである。座標というものは物理量を数値化するために我々が勝手に導入したものに過ぎないので、物理現象の性質自体は座標の選び方に依らないはずである。この考え方を原理に格上げしたものがこれである。

数学的には、任意の座標系で運動方程式が同じ形をとるとというのが要請事項となる。これを実現するためには、種々の物理量や運動方程式が一般的な座標変換に対するテンソル量で構成されていけばよい。一般相対性理論を構築していく上での前提となる原理である。

14.2 重力と時空の歪み

14.2.1 重力場中の時計の遅れ

等価原理によると、重力場がある系と加速度系における物理現象は全く同じになる。加速度系における物理現象はニュートン力学などに基づいて比較的容易に取り扱えるが、これをもとに重力場がある場合に起こる物理現象を予言できる。その一例として、重力場中の時計は遅く進むことを示す。

図 49a のように、上方に加速度 g で運動するエレベーターの床から高さ h の位置にある天井に向けて周波数 ω の光を飛ばす。ただし、初期時刻 $t = 0$ でエレベーターは静止しているとする。光が床から放射されて天井に届くまでの時間は $t \sim h/c$ で、このとき天井の速度は上向きに $v = gt = gh/c$ となっている。簡単のため $v/c \ll 1$ を仮定すると、天井にたどり着いた光の周波数 ω' はドップラー効果により小さくなって

$$\omega' = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\omega = \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)\omega. \quad (14.2)$$

等価原理によれば、重力場中で静止するエレベーターの中でも全く同じ現象が起こるので、重力に逆らって飛ぶ光の周波数は式 (14.2) に従って小さくなることがまずわかる。特に、天井の位置を基準とすると床の位置における重力ポテンシャルは $\Phi = -gh$ となるので、式 (14.2) を Φ で書き直すと

$$\omega' = \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)\omega \quad (\Phi < 0). \quad (14.3)$$

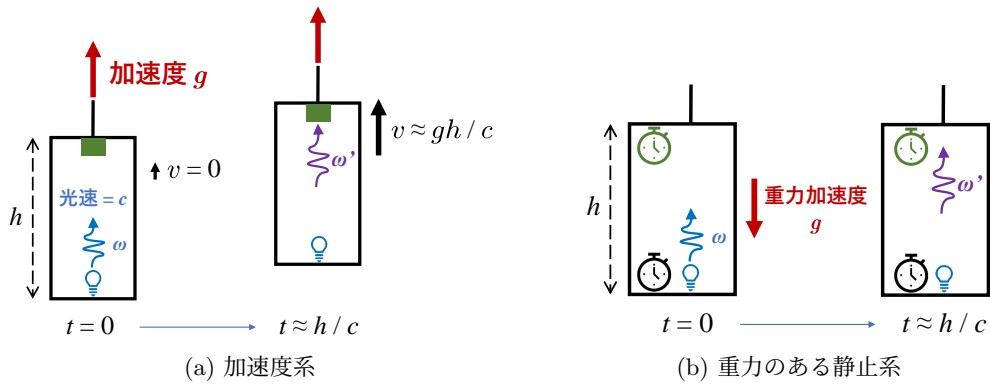


図 49: (a) 加速度 g で上昇するエレベーターと、その中を飛ぶ光。(b) 重力加速度 g の重力場中で静止するエレベーターと、その中を飛ぶ光。

さらに、この光の振動にシンクロして秒針が進む時計をエレベーターの床に置いておき、それと同等な時計を天井にも一つ設置しておく。天井の位置から床に置いてある時計を見るとき、その秒針の進み方は光の振動とシンクロしているので、式 (14.3) に従って時計の進みも遅くなって見える。

- 床に置かれた時計の刻み間隔 (固有時間) を $d\tau$ 、
- 床の時計の刻みを天井の時計で計ったときの時間間隔を dt

とすると、 $d\tau \sim 1/\omega$ 、 $dt \sim 1/\omega'$ となるので

$$d\tau = \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) dt < dt. \quad (14.4)$$

これは、重力ポテンシャル中の時計はゆっくり進む (重力場のない遠方で計った時間 dt と比べて、重力場中の時計の固有時間 $d\tau$ が小さく、少ししか進んでいない) ことを意味する。

14.2.2 重力場 = 時空計量の歪み

式 (14.4) は、重力場 Φ 中の時計の固有時間 $d\tau$ と十分遠方の地点の時間 dt とを関係づける式である。固有時間は $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}$ のように世界間隔 ds^2 と関係しているため、式 (14.4) は世界間隔が $ds^2 = -(c dt)^2 + dx^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ からずれることを示唆する。 $\eta_{\mu\nu}$ は (曲がっていない) 時空の計量であるが、以上より重力場は計量の $\eta_{\mu\nu}$ からの変化で表されると予想される。

重力場が存在する場合に計量がどのように変化するかは、物質の質量 (エネルギー) 分布に基づいて重力場を定めるアインシュタイン方程式を解くことでわかる。例えば、質量 M の質点を作る重力場に対応する世界間隔 ds^2 は、重力場が弱い領域では

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Big|_{|\Phi| \ll 1} \approx - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) (c dt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dx^2 \quad (14.5)$$

となることが示される。ただし、 $g_{\mu\nu}$ は時空計量で、

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (14.6)$$

は質点を作る重力ポテンシャルである。 G はニュートン定数。

重力場がないとき、計量 $g_{\mu\nu}$ はこれまで使っていた曲がっていない時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ に帰着する。逆に言えば、計量を $\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu}$ と変更すれば重力場の効果を取り入れたことになる。実際、等価原理

の説明で自由落下系（局所慣性系）から加速度系に移る座標変換 $x^\mu \mapsto x'^\mu$ を行う必要があったが、これを行うと

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx'^\alpha \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\beta \right) \equiv g_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \quad \left(g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \eta_{\mu\nu} \right) \quad (14.7)$$

と、計量が $\eta_{\mu\nu}$ から $g_{\mu\nu}$ に変化する。したがって、等価原理からも一般的な成分を持った計量 $g_{\mu\nu}$ が自然と出てくることになる⁷⁰。

14.3 重力場中の粒子の運動

14.3.1 粒子の運動方程式

重力場中の粒子の運動を定める運動方程式を導出してみる。前節の内容に基づくと、計量を $\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu}$ を置き換えれば重力の効果を取り入れたことになるので、特殊相対論における粒子の運動方程式について $\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu}$ と置き換えて得られる式を立ててみることにする。

10.3 で、特殊相対論における質量 m の粒子の運動方程式は

$$S = - \int m_0 c^2 d\tau(t) = -m_0 c^2 \int \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2} dt = -m_0 c \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt \quad (14.8)$$

で与えられることを説明した。この作用（特に青字部分）について、 $\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu}$ という置き換えを行い、また時間パラメタを dt から固有時間 $d\tau$:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (14.9)$$

に切り替える。ただし、 $g_{\mu\nu}$ の成分は座標 x^μ の関数 ($g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\rho)$)。すると

$$S = -m_0 c \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \equiv -m_0 c \int L(x^\mu, \dot{x}^\mu) d\tau \quad \left(\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \right). \quad (14.10)$$

このラグランジアン L から運動方程式であるオイラー・ラグランジュ方程式を導出してみる。

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{-g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}} \left(-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) = -\frac{1}{2c} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (14.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} &= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2\sqrt{-g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}} \underbrace{\left(-g_{\mu\nu} \delta^\mu_\alpha \dot{x}^\nu - g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \delta^\nu_\alpha \right)}_{=g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu + g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu = 2g_{\alpha\mu} \dot{x}^\mu} \right] \\ &= -\frac{d}{cd\tau} (g_{\alpha\mu} \dot{x}^\mu) = -\frac{1}{c} \left(\frac{dg_{\alpha\mu}}{d\tau} \dot{x}^\mu + g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\mu \right) = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu + g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\mu \right). \end{aligned} \quad (14.12)$$

ただし、どちらの式についても 2 番目の等号で式 (14.9) の両辺を $d\tau$ で割り 2 乗すると得られる関係式

$$-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2 \quad (14.13)$$

を用いている。これらの計算結果からオイラー・ラグランジュ方程式を立てると

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{1}{c} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu + g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\mu \right). \quad (14.14)$$

さらに、 $\alpha \rightarrow \beta$ と置き換えてから計量の逆行列 $g^{\alpha\beta}$ を縮約し、式を整理すると

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (14.15)$$

⁷⁰計量 $\eta_{\mu\nu}$ の座標変換で生成される計量はいくまで曲がっていない（重力場のない）時空に対応する。 $\eta_{\mu\nu}$ の座標変換では作れないような成分を持った $g_{\mu\nu}$ も別に存在し、そちらが真に重力場を伴った時空に対応する。

この式が重力場中の粒子の運動方程式（測地線方程式と呼ばれる）である。ここで、

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) \quad (14.16)$$

はクリストッフェル記号と呼ばれる量で、時空計量の一階微分で与えられるという意味で時空の曲がり具合と関連した量である。特殊相対論で使っていた計量 $\eta_{\mu\nu}$ は曲がっていない時空に相当し、 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ のとき式 (14.15) は、 $\partial_{\rho}\eta_{\mu\nu} = 0$ より

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2} = 0 \quad (14.17)$$

となる。重力がかかっていない粒子は等速直線運動をすることを表す式である。

14.3.2 弱重力場による軌道の曲がり

測地線方程式 (14.15) を解けば、計量 $g_{\mu\nu}$ で表される重力場中を運動する粒子の軌道が分かる。点粒子の重力場を表す計量 (14.5) を使ってこれを具体的に書き下してみよう。

まず、クリストッフェル記号 (14.16) の成分は、定義通り計算して弱重力極限 $|\Phi/c^2| \ll 1$ をとると

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{c^2}\partial_i\Phi, \quad \Gamma_{00}^i = \frac{1}{c^2}\partial_i\Phi, \quad \Gamma_{jk}^i = -\frac{1}{c^2}(\delta_{ik}\partial_j\Phi + \delta_{ij}\partial_k\Phi - \delta_{jk}\partial_i\Phi). \quad (14.18)$$

ただし、 $i, j, k = 1, 2, 3$ で、 $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ の上記以外の成分はすべてゼロとなる。

- 非相対論的粒子 ($v/c \ll 1$)

粒子の速度が十分遅い場合には、固有時間は普通の時間とほぼ一致する ($\tau \sim t$) ので

$$\dot{x}^{\mu} = (c, \mathbf{v}) \quad (14.19)$$

となる。これを使って式 (14.15) の $\alpha = i$ 成分を書き下し、極限 $v/c \ll 1$ をとると

$$0 = \ddot{x}^i + \Gamma_{\mu\nu}^i \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \sim \ddot{x}^i + \underbrace{\Gamma_{00}^i \dot{x}^0 \dot{x}^0}_{\frac{1}{c^2}\partial_i\Phi \cdot c^2} + \underbrace{\Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k}_{O(v^2/c^2)} \sim \ddot{x}^i + \partial_i\Phi. \quad (14.20)$$

この式は重力ポテンシャル Φ による重力を感じて運動する粒子の運動方程式そのものである。

- 相対論的粒子・光 ($v \sim c$)

粒子の速度が光速に近くなる場合には、式 (14.20) の $O(v^2/c^2)$ 項の寄与が無視できなくなる。この寄与も取り入れて、粒子の軌道が重力場によってどれだけ曲げられるかを計算してみよう。

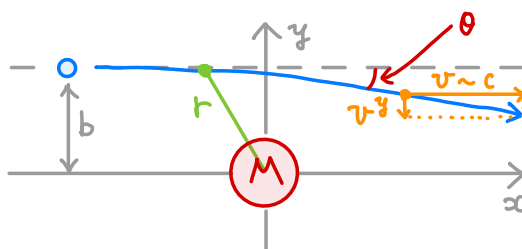


図 50: 質量 M の質点を作る重力場による相対論的粒子の軌道の曲がり。

図 50 のように、質量 M の重力源に対して x 軸向きで衝突係数 b の軌道を光速に近い速さ $v \sim c$ で飛ぶ粒子を考え、その軌道が直線からどれだけずれるかを評価する。重力場が弱く軌道のずれが小さい場合を考えると、粒子はほぼ直線軌道を描くので

$$d\tau \sim \frac{1}{\gamma} dt, \quad \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \sim \gamma \frac{dx^{\mu}}{dt} \sim \gamma(c, v, 0, 0) \sim \gamma(c, c, 0, 0). \quad (14.21)$$

これを使って式 (14.15) を書き換えると

$$\gamma^2 \left(\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right) = 0 \quad (14.22)$$

この式の両辺を γ^2 で割ったものについて、 $\alpha = 2$ 成分（すなわち $x^2 = y$ 成分）を書き下すと

$$0 = \frac{d^2 y}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^y \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} + \underbrace{\Gamma_{00}^y}_{\frac{1}{2}\partial_y\Phi} \underbrace{\frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt}}_{c^2} + \underbrace{\Gamma_{xx}^y}_{\frac{1}{2}\partial_y\Phi} \underbrace{\frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt}}_{c^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\partial_y\Phi. \quad (14.23)$$

式の青字部分が非相対論的な場合 (14.20) と比べて新たに付け加わった部分である。式全体を c で割ったものに $\Phi = -GM/r = -GM/\sqrt{x^2 + y^2}$ を代入して整理すると

$$0 = \frac{1}{c} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2}{c} \partial_y \Phi = \frac{d}{cdt} v^y + \frac{2}{c} \partial_y \left(-\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \Bigg|_{y=b} = \frac{d}{dx} v^y + \frac{2GMb}{c} \frac{1}{(x^2 + b^2)^{3/2}}. \quad (14.24)$$

ただし、今回考える粒子の軌道について $x \sim ct$ となることを用いた。初期状態で $v^y = 0$ であることに留意して、この式を軌道全体 ($x = -\infty \sim \infty$) にわたって積分すると

$$v^y|_{x=+\infty} = -\frac{2GMb}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = -\frac{2GMb}{c} \left[\frac{x}{b^2 \sqrt{x^2 + b^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{4GM}{cb}. \quad (14.25)$$

これが、粒子が重力源の横を通り過ぎた場合の速度の変化分を表す。以上では粒子の速度が光速に近い場合 ($v \sim c$) を考えたが、光 ($v = c$) の場合も結果は同じである⁷¹。

式 (14.25) から、光の軌道が重力によってどれだけの角度曲げられるかを算出することができる。例えば、太陽の表面ぎりぎりをかすめるように飛ぶ光については、 $GM_\odot/c^2 = 1.48 \text{ km}$ 、 $b = r_\odot = 6.96 \times 10^5 \text{ km}$ を代入して、軌道の曲がり角 $\theta \sim |v^y|/c$ を計算すると

$$\theta \sim \frac{|v^y|}{c} = \frac{4GM}{c^2 b} = 8.51 \times 10^{-6} [\text{rad}] = 1.75'' . \quad (14.26)$$

天球上で太陽表面付近に位置する星はこの角度分だけ位置がずれて見えることになる。1919年の日食の際にエディントンらによってこのずれが実際に観測され、**一般相対性理論の最初の実験的証拠**となった。また、手前の位置にある天体の重力によって遠方の天体の像がゆがめられる**重力レンズ効果**もこれと同じ原理によって生じる。

14.4 一般相対論についてのコメント

14.4.1 今回説明しなかった事項

本講義では一部しか解説しなかったが、一般相対論全体についての説明は例えば以下のように進んでいく。様々な教科書・講義ノートで解説されているので、必要に応じて参照されたい。

- 曲がった時空を記述するために必要となるリーマン幾何学
- 一般的な座標変換に対するテンソルの導入
- 曲がった時空における微分である共変微分
- 時空の歪みを記述する曲率テンソル

⁷¹光の軌道に沿って $ds^2 = 0$ となるため固有時間もゼロとなり、そのため固有時間 τ を使って書かれた式 (14.15) はそのままでは使えない。その代わりに、光の軌道に沿ってアフィンパラメーター λ と呼ばれる時間パラメータを取り直すと、式 (14.15) で $\tau \rightarrow \lambda$ と置き換えた式がそのまま成立する。

- 物質分布が与えられたときに時空計量（によって記述される時空のゆがみ、および重力場）を定める**アインシュタイン方程式**
- アインシュタイン方程式を解いて得られる時空の例（**ブラックホール、膨張宇宙**など）
- 一般相対論における諸現象（**粒子・天体の運動、ブラックホールの性質、重力波、宇宙論**など）

14.4.2 一般相対論に関連する研究

一般相対論は現代の物理学・天文学における様々なトピックに顔を出す。その例を以下にいくつか挙げる。もし、気になるテーマやキーワードがあれば調べてみると面白いかもしれない。

- **ブラックホールに関する研究**： 光をはじめとするどんな物理的信号を使っても外部に信号を送れない時空領域のことを**ブラックホール**と呼んでおり、単純には光すら脱出できなくなるほどの強い重力場を伴った天体と考えることができる。このブラックホールの性質に関する研究が進められている。また、量子論と組み合わせることで**ホーキング放射**と呼ばれる放射がブラックホールから出てくると予言されており、様々な見地から研究が進められている。
- **天文学への応用**： 強い重力場を伴うコンパクト天体（ブラックホール、中性子等）や、それらを構成要素として持つ天体はこの宇宙に多く存在すると考えられている。銀河中心の大質量ブラックホールはその例である。また、例えばX線連星、パルサー（自転する中性子星）、超新星爆発、ガンマ線バースト、活動銀河核とジェットなどはコンパクト天体との関係が深い。相対論に基づいて解析される重力レンズ現象も天文学・宇宙論で重要な役割を果たす。
- **重力波天文学**： 時空のゆがみが光速で伝搬する**重力波**も、アインシュタイン方程式を解くと得られる解の一つである。マクスウェル方程式にとっての電磁波解に相当する。近年になってこの重力波が直接観測できるようになり、それをを用いて超遠方の天体（ブラックホールや中性子星など）を観測して様々な研究を行う**重力波天文学**についての研究が進展しつつある。
- **数値相対論**： アインシュタイン方程式は複雑な連立非線形偏微分方程式なので、一般には解くのが難しい。これを数値的に解く手法が**数値相対論**で、例えばブラックホールや中性子星の連星が合体する様子のシミュレーションなどが実現されており、様々な研究に応用されている。
- **宇宙論**： 現在の宇宙は加速膨張しているとされる。この膨張する宇宙（フリードマン宇宙）は、アインシュタイン方程式を解くと自然に得られる解の一つである。これをはじめ、宇宙論の研究には一般相対論の活用が不可欠である。
- **修正重力理論**： アインシュタインが作った重力理論である一般相対性理論のほかにも、重力を記述する様々な理論を作ることが実は可能である。一般相対論以外の重力理論は**修正重力理論**と呼ばれ、その性質や実験的検証法などについての研究が進められている。ある意味で**一般相対論の検証**を行う研究と見ることもできる。
- **相対論の数学的側面**： 相対性理論は幾何学や解析学と関係が深いので、数学分野でも研究されているほか、それらの分野における様々な数学的手法を活用した研究が進められている。2020年にR. ペンローズがノーベル物理学賞を受賞する理由となった特異点定理はその一例と言える。
- **素粒子論・物性理論への応用**： 素粒子の理論の一つである超弦理論に基づくと、重力理論と量子場の理論との間に対応関係があると予言される。この対応関係に基づいて、量子場の理論や物性理論における諸現象を重力理論の手法を活用して解析する研究などが進められている。