第8回　共変性の理解に向けて

特殊相対性理論は

特殊相対性原理：どの慣性系においても物理法則は同一である

を最初に仮定することで構築されてきた。物理現象は対象とする物理的実体（点粒子、場など）が従う運動方程式によって記述されるので、この原理は

運動方程式が任意の慣性系で同じ　⇔　運動方程式がローレンツ変換で「不変」

ということを意味しそうである。これをどのようにすれば実現できるのか、順を追って理解してみる。

向こうしばらくの間の目標として、**相対性理論における運動方程式（点粒子の運動方程式、波動方程式、マクスウェル方程式など）を構築する**というのを掲げておく。今回は、そのための準備に相当する内容を解説する。

8.1　ニュートンの運動方程式の共変性

相対論的における運動方程式はどのような性質を持っていないといけないか、というのを考えるために、まずはニュートン力学に立ち返って運動方程式がどのような性質を持っていたかを再確認する。

質量 m で外力 $\mathbf{F}(t)$ のかかる粒子の軌道 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ についてのニュートンの運動方程式は

$$m\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(t) \tag{8.1}$$

で与えられる。この方程式は、以下の「不変性」を持つ。

- **ガリレイ不変性**：静止系 $(t, \mathbf{x})$ から運動系 $(t, \mathbf{x}')$ へ移る座標変換 $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{V}t$ (時間座標 t は変換しない) を式 (8.1) に適用すると

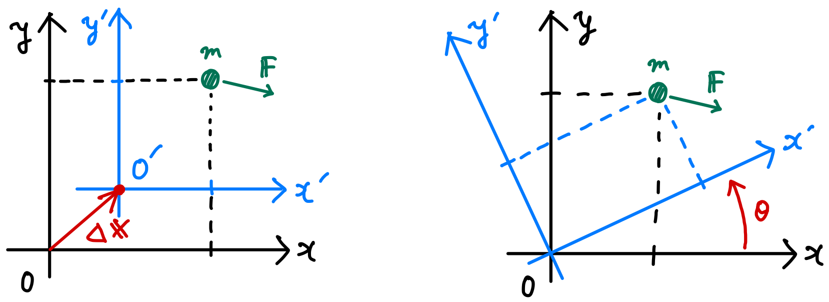
  $$m\frac{d^2\mathbf{x}'(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(t) \tag{8.2}$$

  となる。元の方程式 (8.1) と比べて、空間座標が $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$ と静止系から運動系の座標に書き換えられている以外は**全く同じ形をしている**。すなわち、**ニュートンの運動方程式はガリレイ変換に対して不変**である。

  方程式が同じ形をしているということは、同じ初期条件を与えて方程式を解いた際の解も $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$ の置き換えだけすれば互いに一致する。物理的には、静止系と運動系における粒子の運動の性質にまったく差がなく、実験によって静止系・運動系のどちらにいるかを区別することはできない、ということを意味する。**粒子の運動に関する物理法則はどの慣性系でも同じである**、と言うこともできるだろう。

- **並進・回転に対する共変性**：今度は、式 (8.1) を書き表すときに使う座標を次のように取り換えると何が起こるか見てみよう。

  – **並進**：座標系 $\mathbf{x}$ の原点を定数ベクトル Δx だけずらした座標系 $\mathbf{x}'$ は、$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \Delta\mathbf{x}$ という座標変換で関係づいている。この座標変換に基づいて $\mathbf{x}'$ 座標系における運動方程式を書き下すと $m\frac{d^2\mathbf{x}'(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(t)$ となり、元の式 (8.1) と同じ形の方程式となる。これを**運動方程式 (8.1) は並進不変性を持つ**と言い、物体の運動法則は空間のどの点を基準点にして位置を測っても同じ、という（当然の）物理的性質と対応している。



(a) 並進　　(b) 回転

図 34: 並進・回転変換された座標系における粒子の運動の記述。粒子の位置や外力 $\mathbf{F}$ の向きは変化せず、座標系の方が変化している。

– **回転**：簡単のため、空間の 2 次元部分 (x, y) だけ考える。元の座標系を角度 θ だけ回転させた座標系 (x', y') を考えたとき、運動方程式 (8.1) はどのような形になるだろうか。
まず、図 34(b) も参考にしつつ調べると、新旧座標は次のように関係づくことがわかる：

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}\ . \tag{8.3}$$

座標同士の関係に加えて、外力ベクトル $\mathbf{F}$ の成分も同様に変換される。点粒子の位置座標は原点からの位置ベクトルを使って表せるが、$\mathbf{F}$ の成分も位置ベクトルと同じ変換に従う。

$$\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}' = \mathbf{R}\mathbf{F}\ . \tag{8.4}$$

逆に $\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}'$, $\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}'$ が成立するので、式 (8.1) は次のように書き換えられる：

$$m\frac{d^2\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}'\right)}{dt^2} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}' \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R}^{-1}\left(m\frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2}\right) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}'\ . \tag{8.5}$$

もちろん、この式の左側から $\mathbf{R}$ を作用させれば $\mathbf{x}'$ 座標系における運動方程式が

$$m\frac{d^2\mathbf{x}'(t)}{dt^2} = \mathbf{F}'(t) \tag{8.6}$$

と得られる。方程式の形自体は、回転変換を課す前の式 (8.1) と同じである。回転された座標系 $\mathbf{x}'$ でも物体の運動についての力学法則は同じ、ということを意味する。

ガリレイ変換や並進の場合には、方程式の各項の値が変換前後で変化せず、そのために元と同じ形の運動方程式がそのまま成立していた。一方で、回転変換の場合は方程式の各項に $\mathbf{R}^{-1}$ がかかった形の方程式 (8.5) が出てきた。もちろん最終的には元と同じ形の方程式 (8.6) に書き換えられた訳だが、そうできた理由は方程式の各項が変化しなかったからではなく、全ての項がちょうど同じ分 $(\mathbf{R}^{-1})$ だけ変換したからである。

このように、ある方程式に何らかの変換をかけたときに、個々の項は変化するものの、**全ての項が同じ分だけ変化するために変換前と同じ形の方程式が成立する**場合、その方程式は**共変性**を持つという。

物理学における運動方程式が共変的であれば、変換の前後で運動方程式が同じ形をとるので、その運動方程式が記述する物理法則も変換の前後で変化しない。今回の例でいうと、もともとの座標系と回転された座標系のどちらから見ても物理法則は同じである、ということになる。

8.2 相対論的運動方程式を作るには

冒頭で述べた通り、特殊相対性原理が成り立つということは、相対性理論における運動方程式がローレンツ変換に対して「不変」である、ということを意味する。そのような運動方程式をどのようにしたら作れるかを考えてみよう。

8.2.1 ニュートン力学がローレンツ不変でないこと

まず、準備として**ニュートン力学の方程式がローレンツ変換で不変でないこと**と、そのために相対論においてはニュートン力学の方程式は全ての慣性系で成立する方程式とはなっていないことを本節で確認する。

ニュートンの運動方程式 (8.1) について考えてもよいのだが、説明がやや煩雑になる[35]。そこで、ニュートンの運動方程式を時間積分したものに相当する**運動量保存則**に注目してみる。質量 $m_0 = m_1 + m_2$, 速度 $\mathbf{v}_0$ の粒子が質量 m_1, m_2, 速度 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の 2 粒子に分裂するとき、分裂前後での運動量保存則は

$$m_0\mathbf{v}_0 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \ . \tag{8.11}$$

ニュートンの運動方程式がガリレイ不変だったことに対応して、この**運動量保存則もガリレイ不変**となる。したがって、**ニュートン力学において運動量保存則 (8.11) は任意の慣性系で成立する。**

ガリレイ変換 $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{V}t$ によって速度は $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$ と書き変えられるので、式 (8.11) は

$$m_0(\mathbf{v}_0' + \mathbf{V}) = m_1(\mathbf{v}_1' + \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{v}_2' + \mathbf{V}) \quad \Leftrightarrow \quad m_0\mathbf{v}_0' = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' \tag{8.12}$$

と変形される。この式は元の運動量保存則 (8.11) について $\mathbf{v} \to \mathbf{v}'$ と置き換えた式になっており、式の形自体はガリレイ変換前後で変化していない。

---

[35] ニュートンの運動方程式 (8.1) が元とは別の慣性系ではどのような方程式に見えるか確かめてみよう。この式の左辺は位置座標 $\mathbf{x}$ と時間微分 d/dt でできているが、この時間・空間微分はローレンツ変換 (8.17) に従う。この変換前の粒子の軌道が $x = X(t)$, 変換後の軌道が $x' = X'(t')$ で与えられるとする。まず、粒子の軌道の式にローレンツ変換を適用すると

$$x = X(t) \quad \Rightarrow \quad \gamma\left(\beta ct' + X'(t')\right) = X\left(\gamma(ct' + \beta x')\right) \ . \tag{8.7}$$

この式の両辺を変換後の時間座標 t' で微分し、式を整理して $\frac{dX'(t')}{dt'}$ を求めると

$$\frac{dX'(t')}{dt'} = \frac{\frac{dX(t)}{dt} - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c}\frac{dX(t)}{dt}} \ . \tag{8.8}$$

これは、元の系での粒子速度 $\frac{dX'(t')}{dt'}$ から速度 $V = \beta c$ を引いたときの相対論的な速度の合成則の式そのものである。この式を t' でもう一度微分し、式を整理すると

$$\frac{d^2X'(t')}{dt'^2} = \frac{1}{\left[\gamma(\beta)\left(1 - \frac{\beta}{c}\frac{dX(t)}{dt}\right)\right]^3}\frac{d^2X(t)}{dt^2} \tag{8.9}$$

となることを示せる。したがって、ローレンツ変換後にニュートンの運動方程式が成立するとき ($m\frac{d^2X'(t')}{dt'^2} = F'$)、変換前の慣性系では次のような式が成立することになる：

$$m\frac{d^2X'(t')}{dt'^2} = F' \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{\left[\gamma(\beta)\left(1 - \frac{\beta}{c}\frac{dX(t)}{dt}\right)\right]^3}\frac{d^2X(t)}{dt^2} = F \ . \tag{8.10}$$

右辺に現れる力 F' を逆ローレンツ変換したものが F であるが、これは逆変換前の力の値 F' とローレンツ変換に現れる速度 $V = \beta c$ だけに依存し、粒子の速度 $\frac{dX(t)}{dt}$ には依存しないと考えるのが自然である。したがって、式 (8.10) は、少なくとも粒子速度 $\frac{dX(t)}{dt}$ に依存した係数が左辺に現れている分、本来のニュートンの運動方程式 $m\frac{d^2X(t)}{dt^2} = F$ とは異なる式となっている。ニュートンの運動方程式がローレンツ変換に対して共変的でない、と言ってもよい。

なお、粒子の運動量をあえて $\mathbf{p} = \gamma(v)m\mathbf{v}$ と修正して得られる運動方程式 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ は、ローレンツ変換に対して不変となることが示せる。このようなローレンツ不変な方程式を自然な形で導出するのが今後の目標である。

では、運動量保存則 (8.11) が相対論でも通用するかを確認してみる。相対論においてはガリレイ変換の代わりにローレンツ変換を使う必要があり、それに従うと**相対論的な速度の合成則**

$$v \to \frac{v+V}{1+\frac{vV}{c^2}} \equiv v' \tag{8.13}$$

によって変換後の速度 v' が得られるのであった。ただし、簡単のため速度 $\mathbf{v}$ と $\mathbf{V}$ が同じ向きを向いていることを仮定して、その方向の速度の成分をそれぞれ v, V と書いた。この変換則を運動量保存則の両辺それぞれに適用すると

$$(\text{左辺}) = m_0\frac{v_0+V}{1+\frac{v_0V}{c^2}}\ , \qquad (\text{右辺}) = m_1\frac{v_1+V}{1+\frac{v_1V}{c^2}} + m_2\frac{v_2+V}{1+\frac{v_2V}{c^2}}\ . \tag{8.14}$$

各項の分母は速度 v, v_1, v_2 に依存しているため、各項ごとに値が異なる。したがって、ローレンツ変換前の慣性系で運動量保存則 $m_0v_0 = m_1v_1 + m_2v_2$ が成立していたとすると、**ローレンツ変換で移った先の慣性系では運動量保存則が成立しない**。また、各項ごとに別の係数が現れてしまうということで、**運動量保存則がローレンツ変換に対して共変的でない**ことも見て取れる。これが全ての慣性系で運動量保存則が成立してくれない数学的な原因である。

8.2.2 ローレンツ不変な方程式の構築法

ニュートン力学に出てくる方程式はローレンツ変換に対して不変ではなく、そのためにニュートン力学における法則がある慣性系で成立していたとすると別の慣性系では成立しなくなってしまうことが前節で示された。ここで、もし**ローレンツ変換に対して共変的な運動方程式**を作ることができれば、ローレンツ変換で移り合える全ての慣性系で同じ形の方程式が成立するため、物理法則もすべての慣性系で同じとなる。本節では、そのような**ローレンツ不変な運動方程式の構築法**を考えていく。

そのために、ニュートン力学の回転変換に対する共変性について説明した 8.1 の内容を改めて注意深く見てみる。回転変換に対してニュートンの運動方程式 (8.1) が同じ形をとる（共変）という性質が出てきたのは、その式の全ての項が回転行列 $\mathbf{R}^{-1}$ がかかる形で変換されたからであった。特に、運動方程式の左辺は

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}\cdot\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{m\frac{d^2}{dt^2}}_{\text{不変}}\cdot\underbrace{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}'}_{\mathbf{x}\text{ から変換}} \tag{8.15}$$

のように、回転変換で変化しない部分 $(m\frac{d^2}{dt^2})$ と、回転行列がかかる形で変換する部分 $(\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}')$ で構成されている。右辺の $\mathbf{F}$ はベクトルとしての変換 $(\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}')$ をするわけだが、これがちょうど位置ベクトル $\mathbf{x}$ と同じ変換性を持つので、方程式に現れる全ての項が同じ分だけ変換する（共変）という性質が現れたのであった。

以上を踏まえると、以下のような教訓が得られるであろう。

- ある運動方程式に何らかの変換（上記の例では回転、今後考える例ではローレンツ変換）を適用するときに、**同じ変換性を持つ項だけで方程式を構成**すれば（定義より）方程式は共変的となる。

- それを実現するためには、方程式の各項を構成する各パーツ（上の例では $m, \frac{d}{dt}, \mathbf{x}$ など）の変換性を調べておき、項全体として正しい変換性を示すようにそれらの各パーツを適切に組み合わせる必要がある。

  上記の例で言うと、右辺に現れる $\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}'$ と同じ変換性を示す項を作るためには、位置ベクトル $\mathbf{x}(= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}')$ を一つと、回転変換で変化しない量 $(m, \frac{d}{dt})$ を組み合わせればよい。方程式

に出てくる $m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}$ 以外にも、例えば $m, \frac{d}{dt}$ を複数個と $\mathbf{x}$ を一つだけ使って作られた $m^2\frac{d^3}{dt^3}\mathbf{x}$ のような項を方程式に足した場合でも回転変換に対する共変性は保たれる。

この教訓に基づいて、**ローレンツ変換に対して共変的に振る舞う運動方程式**を構築するための準備を次の節から始めていく。

8.3 ローレンツ変換に対するスカラー・ベクトル・テンソル

回転変換の例では、回転変換に対して変化しない量 $(m, \frac{d}{dt})$ と、ベクトルのように回転行列がかかる形で変化する量 $(\mathbf{x}, \mathbf{F})$ が方程式の構成要素として使われていた。相対論においてある慣性系から別の慣性系に移るためにはローレンツ変換を使う必要があるが、単純に考えると回転変換の例で見たような方程式の作り方がこの場合でもできそうである。そのためには、運動方程式に現れそうな種々の物理量の**ローレンツ変換に対する変換性**を整理しておくと便利である。本節では、ローレンツ変換に対する変換性で分類された量である**スカラー・ベクトル・テンソル**と、そのために必要となる数学的道具立てを順次導入する。

8.3.1 準備：テンソル表記

これまでも考えてきたローレンツ変換は 4 次元時空の座標についての変換であるが、これを描き表す際に便利な記法をいくつか導入しておく。

- 時空点の座標を
$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{8.16}$$
と表す。μ は $0, 1, 2, 3$ の値を取る添え字であり、μ に特定の値を入れた場合には座標の特定の成分を表すものとする（例：$x^2 = y$）。添え字としてはギリシャ文字 $(\mu, \nu, \rho, \sigma, \ldots)$ を用いる。

- x^μ のように、4 次元座標 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ に対応する 4 成分を持つベクトル量を **4 元ベクトル**と呼ぶ。4 次元的な位置ベクトル x^μ は 4 元ベクトルの一例。

- **テンソル表記 / アインシュタインの規約：**
座標 x^μ についてのローレンツ変換は
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{8.17}$$
と表せる。毎回このように行列表示していると大変なので、以下のような表記法を導入する[36]。まず、式 8.17 を
$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3). \tag{8.18}$$
と書き表す。ただし、式中に現れる $\Lambda^\mu{}_\nu$ はローレンツ変換行列の成分を表したもので、以下の式で与えられる。例えば $\Lambda^1{}_0 = -\gamma\beta$. 第 1 添え字 μ を上の位置、第 2 添え字 ν を下の位置に書いてある意味は後で説明する。
$$\left.\mu=0,1,2,3\right\{ \overbrace{\begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix}}^{\nu=0,1,2,3} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.19}$$

[36] 第 4 回のノートで使っていた表記法と少しだけ異なるので注意。

さらに、式 (8.18) に出てくる和記号 $\sum_{\nu=0}^{3}$ を省略して以下のように書くことにする：

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad \left(= \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \right) \tag{8.20}$$

すなわち、**上・下の添え字で同じ文字のペアがある場合、その添え字に $0,1,2,3$ を順次代入して和をとる**ものとする。このような式の書き方のことを**アインシュタインの規約**と呼んでいる。式 (8.20) はあくまで行列表記で書かれた式 (8.17) を別の書き方で書いたものに過ぎないので注意。

例）$x'^{0} = \Lambda^{0}{}_{\mu} x^{\mu} = \Lambda^{0}{}_{0} x^{0} + \Lambda^{0}{}_{1} x^{1} + \Lambda^{0}{}_{2} x^{2} + \Lambda^{0}{}_{3} x^{3} = \gamma x^{1} - \gamma\beta x^{2} + 0 \times x^{2} + 0 \times x^{3} = \gamma\,(ct - \beta x)$.

行列表記で書かれている式 (8.17) の $x'^{0} = ct'$ 成分を書き下したものに相当する。

8.3.2　スカラー・ベクトル・テンソル

式 (8.20) のとおり、4 次元的な位置ベクトル x^{μ} はローレンツ変換行列 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ がかかる形で変換することが分かった。回転変換の場合の式 (8.3) と式の形自体は同様である。この x^{μ} と同じ変換性を示す物理量以外にも、例えばローレンツ変換に対して不変な量（世界間隔 ds^2 など）も存在する。そこで、ローレンツ変換に対する変換性で分類された量（スカラー・ベクトル・テンソル）を以下で順次導入する。

- **スカラー**：4 次元座標 x^{μ} の関数 $\phi(x^{\mu})$ があり、それがローレンツ変換に対して

$$\phi'(x'^{\mu}) = \phi(x^{\mu}) \tag{8.21}$$

　のように値が変化しない場合、その関数 $\phi(x^{\mu})$ をローレンツ変換についての**スカラー**と呼ぶ。ただし、x'^{μ} は元の座標 x^{μ} と同じ点を表す座標で、x^{μ} をローレンツ変換したもの ($x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$)。

　例）世界間隔 $ds^2 = -(cdt)^2 + d\mathbf{x}^2$ はローレンツ変換に対して

$$ds^2 = -(cdt)^2 + d\mathbf{x}^2 = -(cdt')^2 + d\mathbf{x}'^2 = ds'^2$$

　となり、その値が変化しない。したがって、ローレンツ変換に対して**世界間隔 ds^2 はスカラー**として振る舞う。また、世界間隔から定義される**固有時間** $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}$ **もスカラー**である。

　粒子の静止状態での質量 m や、完全流体の静止系における密度 $\rho(x^{\mu})$・圧力 $P(x^{\mu})$ なども、定義によりスカラー量となる。

- **反変ベクトル**：位置ベクトル x^{μ} のローレンツ変換 (8.20) と同じ形で変換する量、すなわち 4 成分を持つベクトル量 $V^{\mu}(x^{\nu})$ $(\mu = 0,1,2,3)$ で、ローレンツ変換を適用した際に

$$V'^{\mu}(x'^{\rho}) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} V^{\mu}(x^{\rho}) \tag{8.22}$$

　のように振る舞う量を**反変ベクトル**と呼ぶ。「反変」という文言が名前についている理由は、後ほどこれとは異なる変換性を示すベクトル量をもう一種類導入するためである。

　反変ベクトルの添え字は上の位置に書くのがルール。x^{μ} **自身も反変ベクトルの一例**である。

　ちなみに、ローレンツ変換の式 (8.20) の両辺の微分を取ると

$$\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} = \right) \; dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} dx^{\nu} \tag{8.23}$$

　となる。最左辺の青字部分は、x'^{μ} を変換前の座標 x^{μ} の関数 $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$ だと思って微分のチェインルールを適用した式。したがって、ローレンツ変換を考える際、変換行列 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ は

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \tag{8.24}$$

　のように座標間の変換行列として書くこともできる。

- **共変ベクトル**：4 成分を持つベクトル量 U_μ で、ローレンツ変換に対して

$$U'_\mu(x'^\rho) = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu U_\nu(x^\rho) \tag{8.25}$$

と振る舞うものを**共変ベクトル**と呼ぶ[37]。ただし、$\left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu$ は $\Lambda^\mu{}_\nu$ (式 (8.19)) の逆行列で

$$\begin{pmatrix} (\Lambda^{-1})^0{}_0 & (\Lambda^{-1})^0{}_1 \\ (\Lambda^{-1})^1{}_0 & (\Lambda^{-1})^1{}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} , \quad \left(\Lambda^{-1}\right)^2{}_2 = \left(\Lambda^{-1}\right)^3{}_3 = 1 \tag{8.26}$$

と、$\Lambda^\mu{}_\nu$ について速度を反転 $(\beta \to -\beta)$ した式で与えられる。

共変ベクトルの添え字は下の位置に書くのがルール。
重要な例としては、**微分演算子 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ は共変ベクトル**として振る舞う。

$\left[\begin{array}{l} (\because)\ \ \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \text{ について変数変換 } x'^\mu \to x^\mu \text{ を行うと、微分のチェインルールより} \\ \qquad \dfrac{\partial}{\partial x'^\mu} = \dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\dfrac{\partial}{\partial x^\nu} = \left(\dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right)^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x^\nu} = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu \dfrac{\partial}{\partial x^\nu} . \\ \text{ただし、座標変換行列と } \Lambda \text{ との関係式 (8.24) を使った。} \end{array} \right]$

- **テンソル**：ベクトルは添え字を一つだけ持つ 4 成分の量だったが、行列のように複数の添え字・成分を持つ量も存在する。その一例として、ローレンツ変換に対して以下のように変換する量

$$T'^{\mu\nu}(x'^\rho) = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}(x^\rho) \tag{8.27}$$

が存在したとき、$T^{\mu\nu}$ を **（2 階反変）テンソル**と呼ぶ。反変ベクトルの成分が行列に拡張されたものである。このほかに、

$$T'_{\mu\nu}(x'^\rho) = \left(\Lambda^{-1}\right)^\alpha{}_\mu \left(\Lambda^{-1}\right)^\beta{}_\nu T_{\alpha\beta}(x^\rho) , \tag{8.28}$$

は **2 階共変テンソル**と呼ばれる[38]。名前はさておき、**添え字の位置 (上下) に応じて用いるべきローレンツ変換行列 Λ, Λ^{-1} が決まる**のが重要な点である。

$\left[\begin{array}{l} \text{例）反変ベクトル 2 つの積 } (V^\mu V^\nu, x^\mu x^\nu \text{ など) は 2 階反変テンソル、共変ベクトル 2 つの積} \\ (\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} \text{ など) は 2 階共変テンソルである。他の重要な例もあるが、今後随時導入する。} \end{array} \right]$

【今後の方針】以上で述べたスカラーやベクトルなどを組み合わせることで、普通の運動方程式に現れるような物理量で、なおかつローレンツ変換に対してスカラーないしベクトルとして振る舞う量を作ることができる。その一例は、運動する粒子の位置座標 $x^\mu = x^\mu(t)$（ベクトル）と、その軌道に沿って測った粒子の固有時間 τ（スカラー）を組わせて作った **4 元速度** u^μ:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \tag{8.30}$$

で、これは反変ベクトルとして振る舞う $(u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu)$。このような物理量を作っておき、同じ変換性を持つ量だけを使って式を組めば、ローレンツ変換に対して共変的に振る舞う運動方程式を容易に構築できる。次回以降の講義で、そのような方針に基づき**相対論的力学**などの構築を進める。

---

[37]「共変」という言葉の由来は、座標を張る際に用いた基底ベクトルが式 (8.25) と同じ変換をするため、式 (8.25) に従うベクトル U_μ のことを「基底ベクトルと共通の変換をする」という意味を込めて「共変ベクトル」と呼ぶことにした、というものである。これをはじめとして、基底ベクトルを導入して説明したほうがすっきりする箇所もあるが、本講義では割愛する。

[38]これらのほかに

$$T'^\mu{}_\nu(x'^\rho) = \Lambda^\mu{}_\alpha \left(\Lambda^{-1}\right)^\beta{}_\nu T^\alpha{}_\beta(x^\rho) , \quad T'_\mu{}^\nu(x'^\rho) = \left(\Lambda^{-1}\right)^\alpha{}_\mu \Lambda^\nu{}_\beta T_\alpha{}^\beta(x^\rho) \tag{8.29}$$

のようなテンソルも存在し、2 階混合テンソルと呼ばれる。