

第7回 相対論における諸現象

これまでの講義では、特殊相対性理論の構築とその基本的性質について説明してきた。その知識をもとに、相対性理論においてはどのような現象が起こると予言されるかについて何点か紹介したい。

7.1 固有時間

7.1.1 復習：世界間隔と固有時間

- 世界間隔

微小に離れた2点の座標が (cdt, dx, dy, dz) だけ離れていたとする。この時に、この2点間の世界間隔を

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (7.1)$$

と定義する。この量はどの慣性系で評価しても同じ値になるという特徴がある。数学的には、ローレンツ変換

$$cdt = \gamma(cdt' + \beta dx'), \quad dx = \gamma(dx' + \beta cdt'), \quad dy = dy', \quad dz = dz' \quad (7.2)$$

で世界間隔 (7.1) が不変、すなわち

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -(cdt')^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \quad (7.3)$$

となり、 ds^2 はローレンツ不変量であるということに対応している。

- 固有時間

速度 V で運動する粒子の軌道が $(ct, x) = (ct, Vt) = (ct, \beta ct)$ で与えられたとする (ただし $y = z = 0$)。この粒子が静止して見える慣性系 (速度 V の運動系) では、この粒子の軌道は $(ct', x') = (ct', 0)$ と表される。この時、静止系と運動系における粒子軌道に沿った世界間隔の関係は、式 (7.3) より

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(cdt)^2 + dx^2 = -(cdt)^2 + (\beta cdt)^2 = -(1 - \beta^2)(cdt)^2 = \frac{1}{\gamma^2}(cdt)^2 \\ &= -(cdt')^2 + dx'^2 = -(cdt')^2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

したがって、 $\frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}$ という量を計算すると

$$\frac{1}{c}\sqrt{-ds^2} = dt' = \frac{1}{\gamma}dt \equiv d\tau. \quad (7.5)$$

この式は以下の2つのことを意味する。

- 式 (7.5) に出てくる“ dt' ”は、粒子の静止系で計った経過時間 dt' そのものである。したがって、どの慣性系でもよいので粒子の軌道にそって世界間隔 ds^2 を計算して $\frac{1}{c}\sqrt{-ds^2} \equiv d\tau$ を求めると、その粒子に乗って計った経過時間が求まる。この時間 τ のことを**固有時間**と呼ぶ²⁸。

²⁸固有時間は、経路が曲線となるような一般の軌道 $(ct, \mathbf{x}) = (ct, \mathbf{x}(t))$ についても同様に計算できる。粒子の軌道に沿って $d\tau$ を積分すればよい。

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \int \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c} \int \sqrt{(cdt)^2 - dx^2} = \frac{1}{c} \int \sqrt{(cdt)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2(t)} \\ &= \frac{1}{c} \int \sqrt{1 - |\boldsymbol{\beta}(t)|^2} cdt = \int \sqrt{1 - |\boldsymbol{\beta}(t)|^2} dt \leq \Delta t. \end{aligned} \quad (7.6)$$

粒子 (にくっついている時計) が動いている ($|\boldsymbol{\beta}| \neq 0$) 限り、固有時間 $\Delta\tau$ は静止系における経過時間 Δt よりも必ず短くなる。

- 式(7.5)によると、静止系（粒子が速度 V に見える系）で計った経過時間 dt は、粒子の静止系で計った経過時間の γ 倍 ($dt = \gamma dt'$) である。これまでも導出してきた「速度 V で動く時計は γ 倍に遅く進む」という性質を表す。

7.1.2 双子の「パラドックス」

固有時間についての上記の計算結果に基づくと、以下の状況で何が起こるかは直ちにわかる。

- **双子の弟**：出発地点で静止して、弟の時計で $t = 0$ に兄がロケットで出発するのを見送り、兄が時刻 $t = T$ に帰ってくるまで待つ。
- **双子の兄**：弟の時計で $t = 0$ に速度 V で出発後、時刻 $\frac{1}{2}T$ に折り返し、速度 $-V$ で出発地点に帰ってくる。

兄が出発点に帰ってきた時刻 $t = T$ の時点でより歳を取っているのはどちらか、というのが問題である（図 26 参照）。

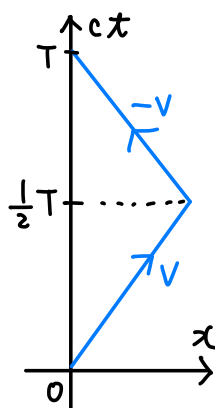


図 26: 双子のパラドックスで考える弟 (ct 軸)・兄 (青線) の移動経路。

上で述べた通り、兄・弟が持っている時計が刻む経過時間、すなわち固有時間はどの慣性系で計算しても同じ値となる。したがって、弟の立場から兄・弟の往復所要時間を計算すると以下の通り。

- **双子の弟**：上記の通り、兄は出発後に $\Delta t = T$ 後に帰ってくる。
- **双子の兄**：兄の経路に沿った固有時間 $\Delta\tau$ を弟の静止系で計算すると²⁹、兄の速度が V ないし $-V$ であることから

$$\Delta\tau = \int_0^{T/2} \frac{1}{\gamma(V)} dt + \int_{T/2}^T \frac{1}{\gamma(-V)} dt = \frac{1}{\gamma(V)} T \leq T . \quad (7.7)$$

したがって、速度 V で飛んでいた兄の方が感じる往復時間 $\Delta\tau$ の方が、弟の待つ時間 T よりも短い。すなわち、双子であってもこの宇宙旅行後には弟の方が兄よりも歳を取る。

さて、この問題が「双子のパラドックス」と呼ばれる所以は、兄からこの状況を見たときには逆に弟が速度 V で往路・復路を飛び、そのために逆に弟の感じる往復時間の方が短くなるのでは、という気がするためである。兄が折り返す際に進行方向逆向きの加速度運動をしている訳だが、それが原因で兄の座標系から見た弟の時計の進み方が一定ではなくなる。その効果も取り入れて兄の立場から往復時間を計算すると、結局上記の弟の立場から出した計算結果が再現され、特に矛盾はないことが分かる³⁰。

²⁹わざわざ固有時間の計算をせずとも、単に「速度 V で動く時計は γ 倍に遅く進む」という知識を使えばよい。

³⁰兄の立場から見た弟の運動の様子は案外複雑なので、本講義では割愛する。松田卓也・木下篤哉著「相対論の正しい間違え方」（丸善出版）などに詳しく解説されている。

7.1.3 地表に飛来する宇宙線（地表の立場から）

宇宙線が大気に衝突して生じる μ 中間子は、 β 崩壊

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (7.8)$$

によって寿命 $2.2 \mu\text{sec} = 2.2 \times 10^{-6} \text{ sec}$ で崩壊する。そのため、光速 $c \sim 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ で走っても相対論効果を考慮に入れなければ 600 m 程度しか飛ばず、上空約 10 km で生成された後に地表に届くことはない。しかし、地表からこの粒子を見た場合、相対論的效果の一つである「動く時計は遅く進む」ために寿命もその分伸びて見える。例えば、光速の 99% で μ 粒子が飛んでいるとすると、その寿命は

$$\gamma(V = 0.99c) = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.99)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0.99\sqrt{1 - 0.99}}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{0.01}} = 7.07\dots, \quad (7.9)$$

すなわち寿命は約 7 倍に伸び、そのために上空で μ 粒子が生成後崩壊するまでに飛ぶ距離もその分伸びる。7 倍程度だと 10 km を渡りきるにはやや足りないが、 μ 粒子の速度がもう少し早ければ地表まで届くほどに飛距離も伸びる。

7.2 ローレンツ収縮

7.2.1 地表に飛来する宇宙線（粒子の立場から）

動いている物体の長さは $\frac{1}{\gamma(V)}$ 倍に縮んで見える、というのがローレンツ収縮の基本的性質である。これを踏まえ、先ほどの μ 粒子の飛距離の話をも μ 粒子の静止系から見ると下記のようになる。

- μ 粒子の静止系では、 μ 粒子が崩壊するまでの寿命は本来の値である $2.2 \mu\text{sec}$ となる。
- μ 粒子の静止系から見ると、地球の大気層の方が速度 V で自分の方に移動してくるように見える。そのため、大気層の厚さが $\frac{1}{\gamma(V)}$ 倍に薄くなって見える。

以上より、 μ 粒子の立場からすると、大気層が $\frac{1}{\gamma(V)}$ 倍に薄くなっているために自分の寿命内に上空から地表まで渡りきれた、ということになる³¹。

7.2.2 車と車庫のパラドックス

静止状態における長さが L の車と車庫があったとする。車が速度 V で車庫に対して走っているとき、それらの長さは互いにどうなって見えるか、というのが（他の呼び方で呼ばれることも多いが）「車と車庫のパラドックス」の問題設定である。ひとまずローレンツ収縮の性質に基づいて考えると、以下の通りの結果が得られそうである。

- **車庫の静止系** (図 27a, 27b): 車庫の静止系から見た車の長さは、ローレンツ収縮により $\frac{L}{\gamma(V)} (\leq L)$ となる。そのため、車は車庫 (長さ L) に収まるはずである。
- **車の静止系** (図 27c): 車の静止系で計った車の長さは L である。一方で、車庫の方は速度 $-V$ で運動して見えるので、その長さは $\frac{L}{\gamma(-V)} = \frac{L}{\gamma(V)} (\leq L)$ となる。そのため、車の静止系から見ると、車は車庫より長くはみ出して見える。

上記 2 つの結果は一見逆になっており、そのため互いに矛盾していないだろうか、という疑問を覚えるのでこの問題は車と車庫の「パラドックス」と呼ばれている。

³¹寿命が延びる割合 ($\gamma(V)$ 倍) と大気層が薄くなる割合 ($1/\gamma(V)$) が同じ値 (の逆数) となっており、そのためどちらの描像でも μ 粒子が地表に届くのに必要となる速度は同じ値となる。

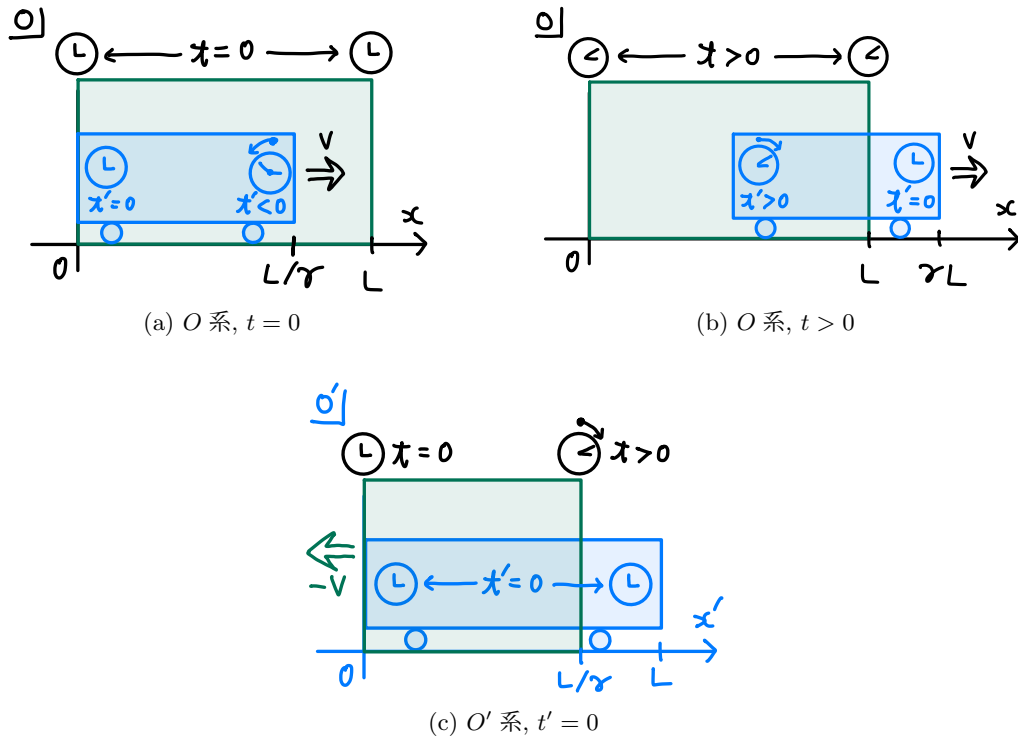


図 27: 「車と車庫のパラドックス」で考える系。それぞれ、(a) 静止系 O における時刻 $t = 0$ の瞬間、(b) 車両先端の時計が $t' = 0$ を示している瞬間を O 系で見たもの、(c) 運動系 O' における時刻 $t' = 0$ の瞬間の図である。

実際のところ、これら2つの結論はどちらも正しく、また互いに矛盾していないというのが正解である。ローレンツ変換のもう一つの帰結であった同時性のずれも考慮するとそうわかるのだが、これを見落としがちなために一見「パラドックス」に見えてしまう、というのがこの話の落ちである。以下で順を追って解析してみよう。

- 車庫の静止系 O , 時刻 $t = 0$ (図 27a): この瞬間に、車の後端 ($x' = 0$) が車庫の入り口 ($x = 0$) と一致し、なおかつその位置で車内の時計も $t' = 0$ を指しているとする。この時、車の先端の位置 ($x' = L, x = \frac{L}{\gamma}$) については

$$ct' = \gamma \left(\underbrace{ct}_{=0} - \beta \underbrace{x}_{=L/\gamma} \right) = -\gamma\beta \cdot \frac{L}{\gamma} = -\beta L (< 0) \quad (7.10)$$

という式 (ローレンツ変換の t 成分) が成立するため、車の先端に置かれた時計は少し過去の時刻 $ct' = -\beta L$ を指しているとわかる。

- 車庫の静止系 O , 時刻 $t > 0$ (図 27b): では次に、車両の先端に置かれた時計が時刻 $t' = 0$ を示す瞬間について考えてみる。先ほどの状況よりも少し後の時刻 ($t > 0$) に相当する。この時点での車両先端の位置は、ローレンツ変換の x 成分の式より

$$x = \gamma \left(-\beta \underbrace{ct'}_{=0} + \underbrace{x'}_{=L} \right) = \gamma L \quad (7.11)$$

となり、これは車庫の右端の位置 $x = L$ よりも右側にある。

- 車の静止系 O' , $t' = 0$ (図 27c): 車の静止系における時刻 $t' = 0$ では、車庫が速度 $-V$ で左向きに運動しており、この瞬間にその左端が $x = 0$ にちょうど重なる。この時、車庫の右端は $x' = \frac{L}{\gamma}$ にあり、車の先端 $x' = L$ の方が右側にある。

上記の O 系の解析結果 (1, 2 番目の場合) をよく見ると、車に乗っている時計で $t' = 0$ となる瞬間については、車の左端が車庫の左端 ($x = 0$) と一致し、また車の右端 ($x = \gamma L$) が車庫の右端 ($x = L$) よりも右側に来ている。この位置関係は、 O' 系から見たもの (3 番目の場合) と一致している。すなわち、 O' 系の $t' = 0$ の瞬間には、車の左端が車庫の左端 ($x' = 0$) と一致し、車の右端 ($x' = L$) は車庫の右端 ($x' = \frac{L}{\gamma}$) よりも右側に来ている。というわけで、 O, O' 系の各地点の時刻まで含めた比較を行うと、どちらの系でも同じ現象が起きていると確認することができた。

なお、車・車庫の長さの関係自体は、 O 系で見ると車庫の方が車よりも長く、 O' 系で見ると車の方が車庫よりも長い、とどちらの系から見るかで逆転している。図 28 のように時空図を書いて O 系における $t = 0$ の瞬間と O' 系における $t' = 0$ の瞬間の比較をしてみると分かりやすいかもしれない。この図からも読み取れるように、上記の実験は全く同じ物体系の互いに異なる部分を見ていることに相当している。

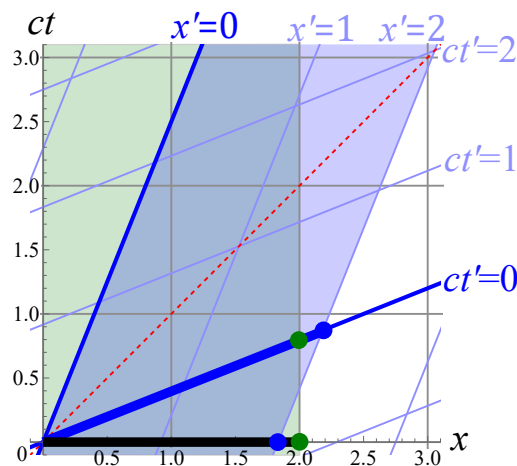


図 28: 「車と車庫のパラドックス」の系の時空図。図中で青・緑の塗りつぶし範囲はそれぞれ車・車庫の軌道に相当する。ただし、車・車庫の静止状態での長さを $L = 2$ とした。静止系 O の時刻 $t = 0$ の瞬間 (図 27a)、運動系 O' の時刻 $t' = 0$ の瞬間 (図 27c) はそれぞれ図中の黒・青の太線部分に対応する。青点・緑点は車・車庫の右端の位置を示している。

7.2.3 ローレンツ収縮の見え方：テレル回転

以上で紹介してきた話は、どれも O, O' 系に張った座標系 $(ct, x), (ct', x')$ を使って物体の運動や形状を調べた場合の話である。しかし、ある地点から運動する物体を眺めたときにどう見えるのかについては、光が物体表面から出て目に届くまでのタイムラグも考慮して改めて解析しないとわからない。そのような、**相対論的現象の実際の見え方**についての解析の一例を紹介しておく。

図 29a のように、眼前を幅 L 、奥行き D の箱が速度 V で移動しているとする。この箱が正面に来たように見えたとき、箱はどのような形状に見えるだろうか。ただし、十分小さな箱が十分遠くにある場合を考える。

まず、箱のこちらを向いている面については、ローレンツ収縮のため幅が $\frac{L}{\gamma(V)}$ に縮まるし、見え方としても実際にその幅に見える。一方、進行方向から見て後ろ側の面から出る光については以下のような見え方をする。解析の都合のため、箱の後端の手前側の角が時刻 $t = 0$ に位置 $x = 0$ にあったと仮定する。

- **手前側の後端角から出た光**: 位置 $x = 0$ から出た光を我々は見ることになるので、そのまま「手前側の角が位置 $x = 0$ にある」ように見える。

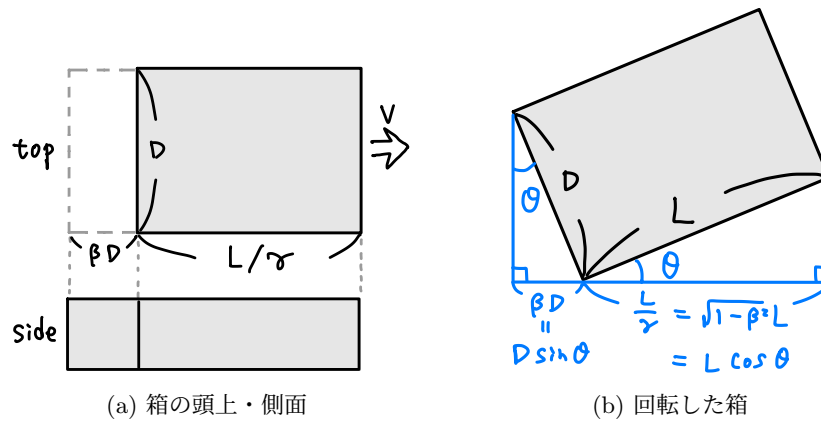


図 29: (a) 速度 V で移動する幅 L , 奥行き D の箱の俯瞰図、および側面の見え方。(b) 角度 θ (ただし $\beta = \sin \theta$) だけ回転した箱。側面から見ると、ちょうど (a) の場合と同じ見え方となる。

- **奥側の後端角から出た光**：箱の奥行きが D だけあるため、手前側の後端角から出た光よりも、奥側の後端角から出た光は目に届くまで D/c だけ余分に時間がかかる。そのため、 $\Delta t = D/c$ だけ過去の位置 $x = -V \times \frac{D}{c} = -\beta D$ から出た光が、手前側の角から出た光と同時に目に届く。見え方としては、奥側の角が位置 $x = -\beta D$ にあるように見える。

箱の後端奥側の角 ($x = -\beta D$) が手前の角 ($x = 0$) よりも左側にあるのだから、箱の奥側の面全体がこちらに見えることになる。こちらに見える形状は図 29a の通りとなるが、これはちょうど箱を $\beta = \sin \theta$ を満たす角度だけ回転させた時の見え方と同じである (図 29b 参照)。ローレンツ収縮した物体が見えるかと思いきや実は回転して見えるだけ、というこの現象は、発案者の名前を取って**テレル回転**と呼ばれる³²。

7.3 シミュレーションによる再現

光速は日常的な物理現象よりも非常に速いため、よほど精密な実験でもしない限りは相対論的效果を実際に見ることは難しい。しかし、シミュレーションを使って相対論的現象が実際にどう見えるかを再現することはできる。本節では、以下のシミュレーター³³を使って以上で説明した諸現象を確認してみることにする。パソコンやスマホ等のブラウザ上で動作する。

1. **道路と球体**: <https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~norihiro.tanahashi/webgl/city>
2. **電車**: <https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~norihiro.tanahashi/webgl/railway>

このシミュレーションの設定は下記の通り。

- 自分の最高速度は、シミュレーション内の単位で 19.99 である。
- 光速の初期値は $c = 30$ で、20 以上の任意の値に設定できる。

光速が自分や運動する物体の速さと同程度だった場合に周りの景色はどう見えるか、などを再現するものである。光速が大きい (もしくは自分の速さが遅い) 場合が非相対論的な場合に、光速が小さく自分や物体の速さに近い場合が相対論的な場合に相当する。

³²光速に近い速度で飛んでくるサッカーボールはどう見えるか、などといった問題もこの章の内容を踏まえるとわかる。

³³MIT Game Lab が制作した特殊相対性理論シミュレーション用ツールキットである [OpenRelativity](#) を修正・改造して作成した。

7.3.1 地表に飛来する宇宙線（地表の立場から）

7.2.1 節で説明した通り、「地表に飛来する宇宙線」の話を宇宙線の立場から見ると、大気層の厚さがローレンツ収縮するために地表までより短時間で到達できる、という状況になる。大気層の代わりに、シミュレーション 1 にある道路を反対側の壁まで走りきるのにかかる時間を見てみる。

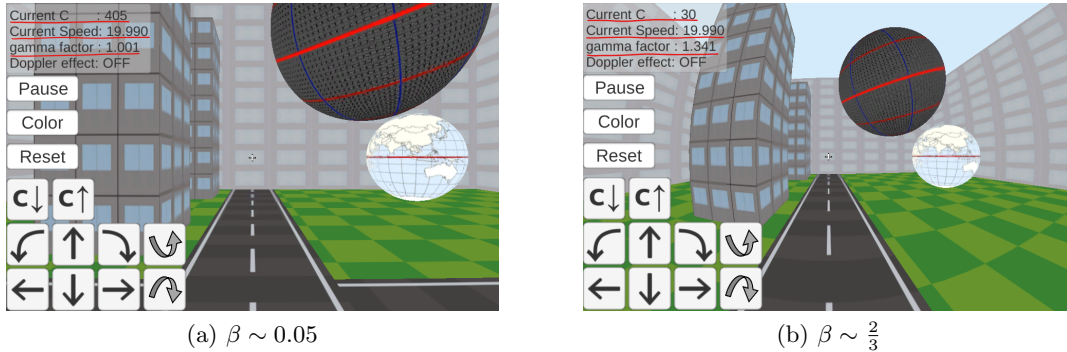


図 30: 速度を $V \sim 20$ に固定し、光速 c を変えて $\beta = \frac{V}{c} \sim 0.05$, $\beta \sim \frac{2}{3}$ とした場合の走行時間の比較。道路を端まで渡りきるのに、前者の方が 1.3 倍ほど時間がかかる。

自分の速度を $V \sim 20$ に固定し、光速 c を変えて $\beta = \frac{V}{c} \sim 0.05$, $\beta \sim \frac{2}{3}$ とした場合に、道路を向こう側の端まで走りきるのに必要な時間の比較を行った際の様子（画面からは所要時間が読み取れないが）図 30 である。速度 V が同じであるにもかかわらず、前者の方が 1.3 倍ほど時間がかかる。これは、後者の場合には $\gamma \sim 1.3$ となっており、その分道路の長さが $\frac{1}{1.3}$ 倍にローレンツ収縮しているのが原因である。先述した宇宙線の話を宇宙線の立場から見た場合に相当する。

7.3.2 車と車庫のパラドックス

7.2.2 節で説明した「車と車庫のパラドックス」は、同じ長さの 2 つの物体がありその片方だけが運動している場合、どちらの物体の方が長く見えるかは観測者の速度次第で入れ替わる、というのが結論だった。これをシミュレーション 2 で確認してみる（図 31）。

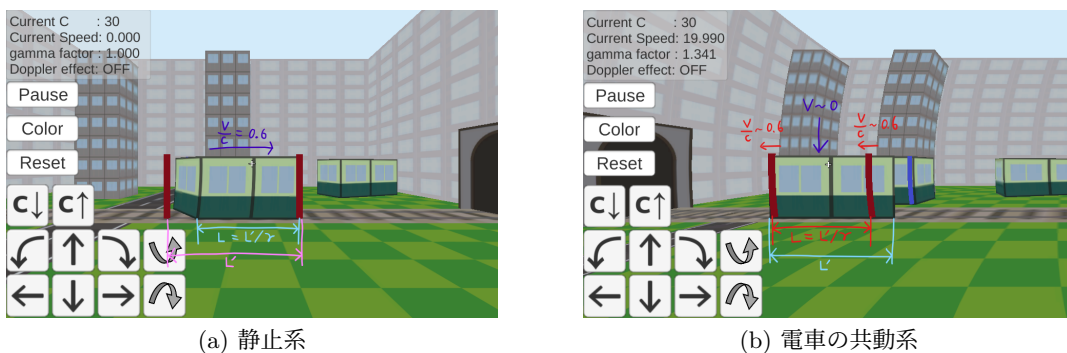


図 31: 速度 $\frac{V}{c} = 0.6$ で走る電車の見え方。(a) 静止系から電車を眺めた場合。この電車については $\gamma^{-1} \sim 0.75$ で、実際その程度長さが短くなって見える。(b) 電車とほぼ同じ速度で運動しながら眺めた場合。逆に、地面に固定してあるポール間の距離の方が短くなって見える。

このシミュレーションでは、電車の静止時の長さと同じ間隔で線路脇にポールが立ててある。電車は $V = 18$, すなわち $\frac{V}{c} = 0.6$ の速度で走っているのだが、静止状態でこの電車を見る場合には

$\frac{1}{\gamma(V)} \sim 0.75$ 倍に電車の側面が短縮して見える³⁴。一方で、電車をそれとほぼ同じ速度で追いかけて、自分の正面に電車とポールが来た瞬間に見ると、逆に地面に立てたポールの間隔の方がローレンツ収縮して電車より短く見える。7.2.2 節でも説明した通り、この2通りの見え方はどちらも物理的に正しい見え方であり、同時性のずれという現象があるおかげで互いに整合的になっている。

7.3.3 テレル回転

7.2.3 節で説明した通り、速度 V で運動する（微小で遠方にある）物体は $\theta = \sin^{-1} \frac{V}{c}$ だけ回転した物体が静止しているときとほぼ同じ見え方をする。

シミュレーション 1 に地球儀が置いてある。静止時にこちら側を向いて見える面を「正面」と呼ぶことにすると、光速が大きく非相対論的な場合は、地球儀が目の前の位置に来た時にはその正面が必ずこちらを向いて見える。一方、自分が光速に近い速度で運動している（もしくは地球儀が光速に近い速度で動く）場合には、地球儀が動いていく方向に対して後ろ側の面がこちらを向くように地球儀が回転して見える（図 32）。一方で、球体が運動していても一見ローレンツ収縮らしき現象は観察されず、単に回転した状態の球体があるように見えている。シミュレーション 2 では、速度 $\frac{V}{c} = 0.6$ の電車と、 $\theta \sim 37^\circ$ 傾けて設置してある電車がおおよそ同じ見え方をしている（図 33）。この場合にテレル回転の回転角が $\theta = \sin^{-1} 0.6 \sim 37^\circ$ となることが原因である。

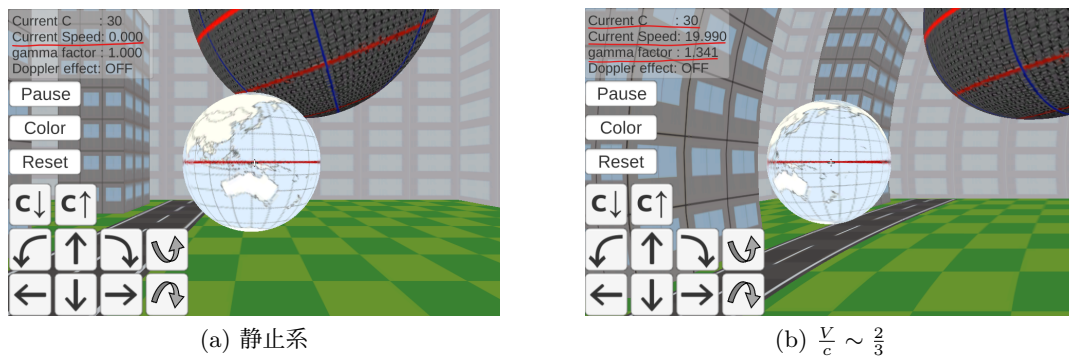


図 32: 地球儀を (a) 静止状態で眺めた場合と、(b) $\frac{V}{c} \sim \frac{2}{3}$ で右向きに走りながら、地球儀が正面に来た瞬間に見た場合。図 (b) では自分に対して地球儀が左向きに動いて見えるが、そのために地球儀が西方向へいくらか回転して見えている。

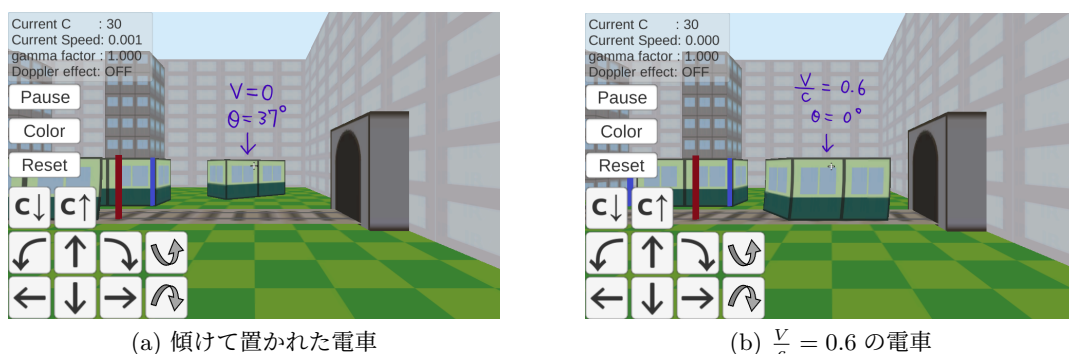


図 33: (a) 線路に対して 37° 傾けた状態で置かれた電車と (b) 速度 $\frac{V}{c} = 0.6$ で走る電車との比較。どちらも正面・側面の長さの比がほぼ同じなため、一見同じ角度だけ回転しているかのように見える。

³⁴7.2.3 節で説明した効果により電車の最後尾の面も同時に見えているので注意が必要。