

## 第4回 特殊相対性理論の構築（続き）

前回は下記について解説した。

- (特殊相対性原理  $\Rightarrow$ ) 光速度一定の原理
- 光速度一定の原理の帰結
  - 動く時計の遅れ
  - 同時性のずれ（運動系の「同時」 $\neq$  静止系の「同時」）

以上を示す際に、鏡と光線のできた**光時計**や、それを用いた**時刻の同期**の手続きを用いた。

上記の結果から読み取れるのは、どうやら**静止系と運動系の「時間」が異なるらしい**、という点である。一方、特殊相対論以前に考えられていた座標変換である**ガリレイ変換**：

$$t' = t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t \quad (4.1)$$

では静止系・運動系の時間座標が同じ ( $t = t'$ ) なので、上記のような性質は出てこない。そのため、**特殊相対論ではガリレイ変換が修正されることになる**。

今回の講義では、運動系と静止系との間で時間・空間座標がどのように変換されるかを表す**ローレンツ変換**を構築する。前回導出した時間の遅れや同時性のずれ（と、まだ説明していない**ローレンツ収縮**）をまとめて表したものに相当する。手順としては下記のとおり。

- 4.1 節： 相対論における時刻の同期を復習
- 4.2 節： 運動系における時刻の同期を静止系から見るとどう見えるかを整理
- 4.3 節： ローレンツ変換の構築を、前節で見た静止系と運動系の座標間の関係に基づいて行う。

導出のために必要となる計算の一部は前回以前の講義で行ったものと同様だが、復習も兼ねて今回改めて解説する。

表記：

今回の講義ノートでは、時間・空間の座標を表す記号として

$$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (4.2)$$

を用いる。 $t$ に光速  $c$  をかけたものをあえて使うのは、今回出てくる計算式などの表記がより単純化されるためである<sup>19</sup>。また、前回導入した運動系の速度  $V$  の関数<sup>20</sup>

$$\beta(V) \equiv \frac{V}{c}, \quad \gamma(V) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.3)$$

を今回も使う。速度  $V$  を  $V = \beta c$  と書き換える、といった計算を頻繁に行うので注意。

### 4.1 時刻の同期

まず、特殊相対論では異なる2点間の**時刻の同期**を行う際には図 14(a) のように光の信号をやりとりすることで行うのであった。 $x = 0$  と  $x = \ell$  のそれぞれに別個の時計が置いてあり、それらについて同期（時刻合わせ）を行うことにする。そのために、以下のように光のやり取りと時刻の記録を行う。

<sup>19</sup>時間座標  $t$  の次元は時間である一方、 $ct$  の次元は長さなので空間座標  $x, y, z$  と対等に取り扱うことができる、という事情もある。より単純に  $c = 1$  となるような**自然単位系**を取って考えることも多い。

<sup>20</sup>本当は速度  $\mathbf{V}$  の向きも考慮してベクトル量  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{V}/c$  を定義して用いるべきだが、今回は簡単のため  $\mathbf{V}$  と  $x$  軸が同じ向きの場合だけを考えるので式 (4.3) のようにしておく。

- $(ct, x) = (0, 0)$ :  $x = 0$  にある時計で  $t = 0$  の時に、 $x = 0$  から  $x = \ell$  に向けて光を飛ばす。
- $(ct, x) = (ct_1, \ell)$ : 光が  $x = \ell$  に届いたとき、 $x = \ell$  にある時計で  $t = t_1$  だったとする。
- $(ct, x) = (ct_2, 0)$ : 光を  $x = \ell$  から反射させて  $x = 0$  に到達した時刻が、 $x = 0$  の時計で  $t = t_2$  だったとする。

この時、静止している2点間を光が右向きに飛ぶ時と左向きに飛ぶ時とで伝搬時間は同じであることから、もし

$$t_1 = \frac{1}{2}t_2 \quad (4.4)$$

となるように時計の時刻が調整されていれば、 $x = 0$  と  $x = \ell$  との間で時計の同期ができてことになる。今行った時刻の同期を縦軸を  $ct$ 、横軸を  $x$  とするグラフ上を書くとき図 14(b) のようになる<sup>21</sup>。このようなグラフのことを時空図と呼ぶ。

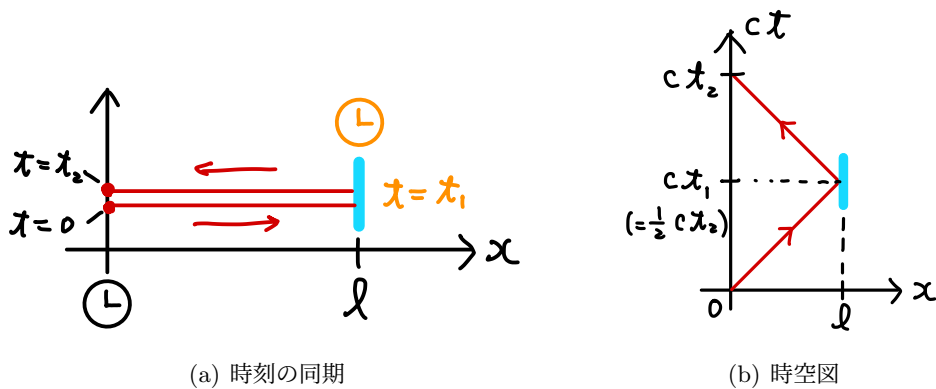


図 14: 原点と  $x = \ell$  に置かれた時計の同期。原点の時計で時刻  $t = 0$  に光が原点から出発し、 $x = \ell$  の時計で  $t = t_1$  に鏡で反射して、原点の時計で時刻  $t = t_2$  に帰ってくる。  $t_1 = \frac{1}{2}t_2$  ならば原点  $x = 0$  と位置  $x = \ell$  との間で時刻が同期できている、とする。図 14(b) は図 14(a) に対応する時空図。

## 4.2 運動系における時刻の同期

ある慣性系  $O$  (以下では「静止系」と呼ぶ) と、それに対して  $x$  軸の方向に速度  $V$  の速さで移動している慣性系  $O'$  (「運動系」と呼ぶ) を考える。運動系  $O'$  における時刻の同期を行った際に、静止系  $O$  からどのように見えるかを整理しておく。時刻の同期を  $O'$  系の速度の向きとその垂直方向に行う場合で大きく性質が異なるので、以下では別個に解析する。

### 4.2.1 進行方向の同期

**運動系  $O'$  での時刻の同期:**

まず、 $O'$  系で原点と位置  $x' = \ell'$  の位置との間で時刻の同期を行う (図 15(a) 参照)。前節の要領に従って、時刻  $t' = 0$  に原点から光を放射し、 $x' = \ell'$  に置かれた鏡で  $t' = t'_1$  に反射して、原点に時刻  $t' = t'_2$  に帰ってくるとする。時刻の同期ができていれば  $t'_1 = \frac{1}{2}t'_2$  となること、および  $O'$  系でも光速は  $c$  なので  $ct'_1 = \ell'$  となることから

$$ct'_1 = \frac{1}{2}ct'_2 = \ell' \quad (4.5)$$

<sup>21</sup> 縦軸として単に  $t$  ではなく  $ct$  を取ることで、光の経路  $x = \pm ct + x_0$  がちょうど斜め  $45^\circ$  の直線になっている。

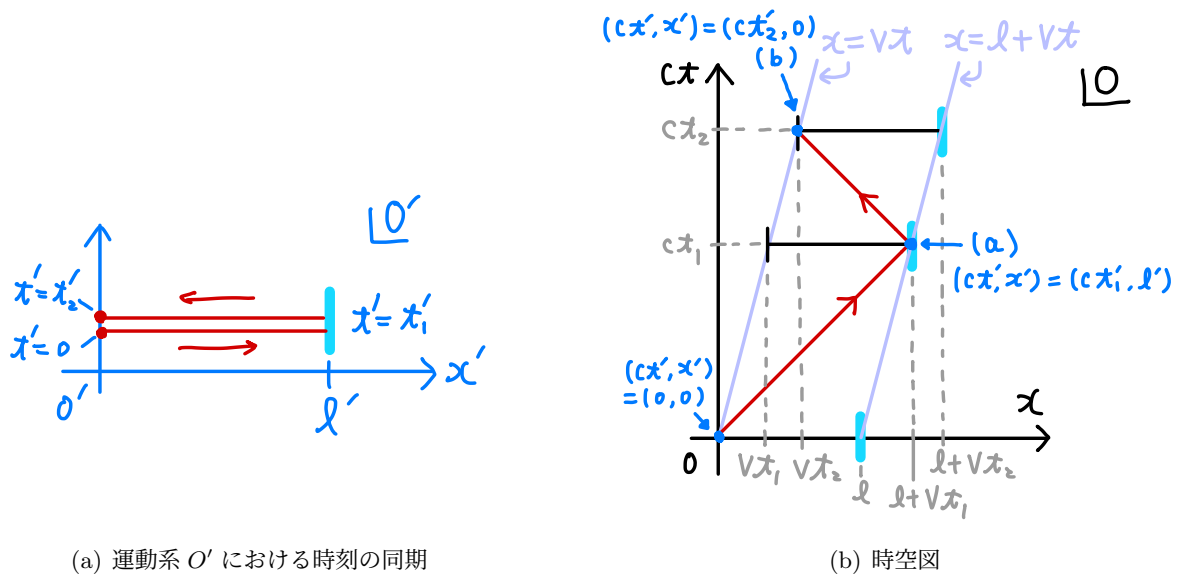


図 15: 運動系  $O'$  における  $x'$  方向の時刻の同期と、それを静止系  $O$  から見た場合についての時空図。

となる。

**静止系  $O$  から見た時刻の同期：**

次に、静止系  $O$  からは上記の  $O'$  系における時刻の同期がどのように見えるかを考える。以下のように設定する (図 15(b) 参照)。

- 運動系  $O'$  (に置かれた実験装置) は、静止系  $O$  に対して  $x$  方向に速度  $V$  で運動している。
- 初期時刻 ( $t = 0, t' = 0$ ) で  $O$  系と  $O'$  系の座標軸は一致している。
- $O'$  系の  $x' = l'$  に対応する地点は、 $O$  系では初期時刻  $t = 0$  に  $x = l$  の位置とする。  
 $\Rightarrow O'$  系の原点と  $x' = l$  の位置は、 $O$  系でそれぞれ経路  $x = Vt, x = l + Vt$  をたどる。

最後の項目で単純に  $x = l'$  としていないのは、静止している物体の長さが  $l'$  だった場合でも、それが運動している場合には異なる長さ  $l$  に見える可能性があるためである。実際、 $V \neq 0$  ならば  $l \neq l'$  となる (動く物体のローレンツ収縮) ことが後ほど確認できる。

$O'$  系全体が動いているため、静止系  $O$  から見た光の経路は図 15(b) のように非対称な形状となる。この経路について、光の発射・反射・帰着が起こる座標位置を以下で整理してみよう。なお、今回の光の経路は  $x$  方向に限定されているため、以下では座標のうち  $(ct, x)$  だけについて考える。

- **光の出発：** 光が発射される瞬間  $t' = 0$  に  $O$  系と  $O'$  系の原点はそろっているので

$$O: (ct, x) = (0, 0), \quad O': (ct', x') = (0, 0). \quad (4.6)$$

- **反射** (図 15(b) の点 (a))

$O$  系で光の反射が起こる時刻が  $t = t_1$  だったとする。この時、鏡 (光の反射点) の  $O$  系と  $O'$  系それぞれにおける時間・空間座標は

$$O: (ct, x) = (ct_1, l + Vt_1), \quad O': (ct', x') = (ct'_1, l'). \quad (4.7)$$

ここで、 $O$  系における光の往路について  $ct_1 = l + Vt_1 (= l + \beta ct_1)$  となるから

$$ct_1 = \frac{l}{1 - \beta}. \quad (4.8)$$

これと式 (4.5) を使って式 (4.7) を整理すると

$$O: (ct, x) = \left( \frac{l}{1 - \beta}, \frac{l}{1 - \beta} \right), \quad O': (ct', x') = (l', l'). \quad (4.9)$$

● 帰着 (図 15(b) の点 (b))

光が  $O'$  系の原点に帰着する時刻が、 $O$  系では  $t = t_2$  だったとする。この点の  $O, O'$  両系における座標は

$$O: (ct, x) = (ct_2, Vt_2), \quad O': (ct', x') = (ct'_2, 0). \quad (4.10)$$

ここで、 $O$  系における光の復路について  $c(t_2 - t_1) = \ell - V(t_2 - t_1)$  となるから

$$c(t_2 - t_1) = \frac{\ell}{1 + \beta} \Rightarrow ct_2 = \frac{\ell}{1 + \beta} + ct_1 = \frac{\ell}{1 + \beta} + \frac{\ell}{1 - \beta} = \frac{2\ell}{1 - \beta^2}. \quad (4.11)$$

これと式 (4.5) を使って式 (4.10) を整理すると

$$O: (ct, x) = \left( \frac{2\ell}{1 - \beta^2}, \frac{2\ell\beta}{1 - \beta^2} \right), \quad O': (ct', x') = (2\ell', 0). \quad (4.12)$$

#### 4.2.2 垂直方向の同期

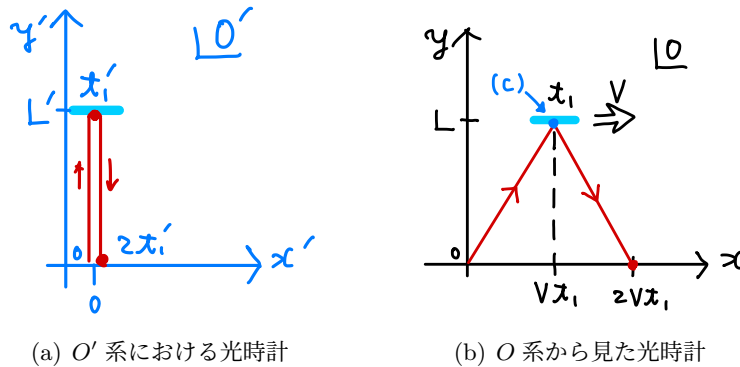


図 16: 運動系  $O'$  における  $x'$  方向の時刻の同期と、それを静止系  $O$  から見た場合の図。

#### 運動系 $O'$ での時刻の同期:

今度は、 $O'$  系で原点と位置  $y' = L'$  の位置との間で時刻の同期を行う (図 16(a) 参照)。時刻  $t' = 0$  に原点から光を飛ばし、 $t' = t'_1$  に反射して  $t' = t'_2$  に原点に帰ってくるとすると、前節と同様に

$$ct'_1 = \frac{1}{2}ct'_2 = L'. \quad (4.13)$$

なお、この光の経路については常に  $x' = 0$  である。

#### 静止系 $O$ から見た時刻の同期:

静止系  $O$  では、上記の  $O'$  系における光の経路は図 16(b) のようになる。鏡は初期時刻  $t = 0$  のとき  $(x, y) = (0, L)$  の位置にあり、速度  $V$  で  $x$  軸方向に移動しているように見える。時刻  $t = t_1$  に反射が起こったとすると (図 16(b) の点 (c))、光の反射が起こるまでの経路について

$$ct_1 = \sqrt{L^2 + (Vt_1)^2} = \sqrt{L^2 + (\beta ct_1)^2} \quad \therefore \quad ct_1 = \frac{L}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma L. \quad (4.14)$$

また、この瞬間に鏡は  $x = Vt_1 = \beta ct_1$  の位置にある。従って、光の反射点 (c) の  $O, O'$  両系における時間・空間座標は

$$\begin{aligned} O: (ct, x, y) &= (ct_1, Vt_1, L) = (\gamma L, \gamma\beta L, L), \\ O': (ct', x', y') &= (ct'_1, 0, L') = (L', 0, L'). \end{aligned} \quad (4.15)$$

以上で導出した、図 15, 16 の点 (a), (b), (c) の時間・空間座標をまとめると表 1 のようになる。

表 1: 図 15, 16 の点 (a), (b), (c) の  $O, O'$  各系における時間・空間座標。  $z$  は常にゼロである。

	$O : (ct, x, y)$	$O' : (ct', x', y')$
点 (a)	$\left(\frac{\ell}{1-\beta}, \frac{\ell}{1-\beta}, 0\right)$	$(\ell', \ell', 0)$
点 (b)	$\left(\frac{2\ell}{1-\beta^2}, \frac{2\ell\beta}{1-\beta^2}, 0\right)$	$(2\ell', 0, 0)$
点 (c)	$(\gamma L, \gamma\beta L, L)$	$(L', 0, L')$

### 4.3 ローレンツ変換の構築

前節では、時刻の同期を行う際の光の経路上の点 (a), (b), (c) 静止系  $O$  と運動系  $O'$  の時間・空間座標がどのように対応づいているかを調べた。その結果をまとめて、 $O, O'$  両系の座標がどのように対応づいているかを与えるローレンツ変換を本節で求める。

#### 4.3.1 変換の形を指定

まず、 $O$  系の座標  $(ct, x, y, z)$  と  $O'$  系の座標  $(ct', x', y', z')$  の対応関係は一般に

$$ct' = ct'(ct, x, y, z), \quad x' = x'(ct, x, y, z), \quad y' = \dots, \quad z' = \dots, \quad (4.16)$$

と書き表せる。関数  $ct'(ct, x, y, z), x'(ct, x, y, z), \dots$  は、少なくとも表 1 の対応関係がすべて満たされるようなものになっていなければならない。

ここで、前節で行った操作は、本質的には  $O, O'$  両系で物体とその運動について長さや時間を計測して比較するというものであった。これについて

- **線形性**：実験に用いる物体の長さを  $O'$  系で  $n$  倍にすれば、その長さを静止系  $O$  で計った際にも結果は  $n$  倍になる。光が飛ぶ所要時間についても同様。
- **一様性**：時間・空間は一様で特別な点などないので、実験をどの時刻・位置で行ったとしても同じ結果が得られるはず。

厳密な証明は省くが、上記 2 点を満たすような座標変換は**新・旧座標の一次関数**となることが示せる：

$$\begin{aligned} ct' &= \Lambda_{00}ct + \Lambda_{01}x + \Lambda_{02}y + \Lambda_{03}z \\ x' &= \Lambda_{10}ct + \Lambda_{11}x + \Lambda_{12}y + \Lambda_{13}z \\ y' &= \Lambda_{20}ct + \Lambda_{21}x + \Lambda_{22}y + \Lambda_{23}z \\ z' &= \Lambda_{30}ct + \Lambda_{31}x + \Lambda_{32}y + \Lambda_{33}z \end{aligned} \quad (4.17)$$

係数  $\Lambda_{ij}$  は速度  $c, V$  の関数である。なお、右辺に定数項を入れていないのは、 $O, O'$  両系の原点をそろえて

$$O : (ct, x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad O' : (ct', x', y', z') = (0, 0, 0, 0) \quad (4.18)$$

となるようにしたため。

#### 式 (4.17) が一次式であることの説明

例えば、式 (4.17) の右辺に 2 次関数が現れるような場合を考えよう。単純のため

$$x' = \alpha x^2 \quad (4.19)$$

という対応関係となったとする。ここで、 $O$  系  $E$  で長さ  $\ell$  の棒の左端を  $x = x_0$  に置いたとすると、 $O'$  系で計った長さ  $\Delta x$  は

$$\Delta x = \alpha [(x_0 + \ell)^2 - x_0^2] = \ell^2 + 2\ell x_0 \quad (4.20)$$

となり、どの位置  $x = x_0$  に棒を置くかで  $O'$  系で計った長さが変わってしまうことになる。一方、実際に実験をやってみるとそのような位置依存性は出てこないはずである。そうするためには式 (4.19) の段階で右辺を  $x$  の一次式にしておくほかない。

### 4.3.2 系の対称性を使う

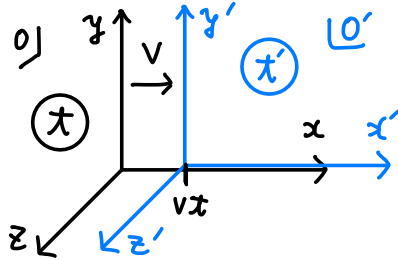


図 17: 今回考えている静止系  $O$  と運動系  $O'$ . 速度の方向である  $x$  軸方向以外に特別な向きはない。また、どの時刻  $t$  および位置  $(x, y, z)$  も対等で、特別な点は存在しない。

今回考えている実験系は図 17 の通りで、以下の性質がある。

- 速度の方向である  $x$  軸方向以外に特別な向きはない。そのため、
  - $y$  軸方向と  $z$  軸方向は対等。
  - $y$  軸,  $z$  軸をそれぞれ反転 ( $y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$ ) させても系の物理的性質は変わらない。
- どの時刻  $t$  および位置  $(x, y, z)$  も対等で、特別な点は存在しない。原点をどの点に取るか次第で座標の値は変わるが、物理的には何も変化がない。

以上を踏まえると、一般的な変換式 (4.17) を単純化することが可能となる。

- $y$  成分と  $z$  成分は完全に対等なので、 $y$  成分だけ書くことにして  $z$  成分は省略して書く。最終結果を書くときに復活させればよい。
- $y \rightarrow -y$  と  $y$  軸を反転させても結果は変わらないはず。従って、
  - $ct', x'$  の式の  $y$  項はゼロで、かつ
  - $y'$  の式の  $ct, x$  項はゼロとしてよい。

すなわち、式 (4.17) を以下のように単純化できる。

$$ct' = \Lambda_{00}ct + \Lambda_{01}x + \cancel{\Lambda_{02}y} \quad (4.21)$$

$$x' = \Lambda_{10}ct + \Lambda_{11}x + \cancel{\Lambda_{12}y} \quad (4.22)$$

$$y' = \cancel{\Lambda_{20}ct} + \cancel{\Lambda_{21}x} + \Lambda_{22}y \quad (4.23)$$

### 4.3.3 係数 $\Lambda_{ij}$ の決定

式 (4.21), (4.22), (4.23) に現れる係数  $\Lambda_{ij}$  を、表 1 の対応関係をもとに決定していく。(a), (b), (c) の各点についての  $O$  系の座標  $(ct, x, y)$  と  $O'$  系の座標  $(ct', x', y')$  を代入して、 $\Lambda_{ij}$  が満たす条件式を導出していけばよい。

- 点 (a): 表 1 の座標値を式 (4.21), (4.22) に代入して

$$\ell' = \Lambda_{00} \frac{\ell}{1-\beta} + \Lambda_{01} \frac{\ell}{1-\beta} \quad (4.24)$$

$$\ell' = \Lambda_{10} \frac{\ell}{1-\beta} + \Lambda_{11} \frac{\ell}{1-\beta} \quad (4.25)$$

$y$  についての式 (4.23) は単に自明な式 ( $0 = 0$ ) になる。

- 点 (b): 上記と同様にして

$$2\ell' = \Lambda_{00} \frac{2\ell}{1-\beta^2} + \Lambda_{01} \frac{2\ell\beta}{1-\beta^2} \quad (4.26)$$

$$0 = \Lambda_{10} \frac{2\ell}{1-\beta^2} + \Lambda_{11} \frac{2\ell\beta}{1-\beta^2} \quad (4.27)$$

- 点 (c): この場合は  $y$  の式 (4.23) も非自明に残ってくる。

$$L' = \Lambda_{00}\gamma L + \Lambda_{01}\gamma\beta L \quad (4.28)$$

$$0 = \Lambda_{10}\gamma L + \Lambda_{11}\gamma\beta L \quad (4.29)$$

$$L' = \Lambda_{22}L \quad (4.30)$$

以上について、式 (4.27) と (4.29) は互いに等価であるため、互いに独立な方程式は 6 本分あることになる。一方、変数は  $\Lambda_{00}, \Lambda_{01}, \Lambda_{10}, \Lambda_{11}, \Lambda_{22}$  の 5 つと  $\ell'/\ell, L'/L$  の 2 つで計 7 つである。そのため、上記の方程式を解けば未知変数が 1 つ分を除いてすべて決まるはずである。

まず、式 (4.27) から直ちに

$$\Lambda_{10} = -\Lambda_{11}\beta. \quad (4.31)$$

また、式 (4.24), (4.26) を連立させて

$$\Lambda_{00} \frac{\ell}{1-\beta} + \Lambda_{01} \frac{\ell}{1-\beta} = \Lambda_{00} \frac{\ell}{1-\beta^2} + \Lambda_{01} \frac{\ell\beta}{1-\beta^2} \quad (4.32)$$

$$\Leftrightarrow \Lambda_{00} \frac{1+\beta-1}{1-\beta^2} = \Lambda_{01} \frac{\beta-(1+\beta)}{1-\beta^2} \quad (4.33)$$

$$\therefore \Lambda_{01} = -\Lambda_{00}\beta. \quad (4.34)$$

ここまでの段階で、式 (4.24), (4.25) は次のように単純化している。

$$\ell' = \Lambda_{00} \left( \frac{\ell}{1-\beta} - \beta \frac{\ell}{1-\beta} \right) = \Lambda_{00}\ell \quad (4.35)$$

$$\ell' = \Lambda_{11} \left( -\beta \frac{\ell}{1-\beta} + \frac{\ell}{1-\beta} \right) = \Lambda_{11}\ell. \quad (4.36)$$

これらの式から直ちに

$$\Lambda_{11} = \Lambda_{00}. \quad (4.37)$$

最後に、式 (4.28), (4.30) を連立させ、式 (4.34) も使いつつ整理すると

$$\Lambda_{22} = \Lambda_{00}\gamma + \Lambda_{01}\gamma\beta = \Lambda_{00}\gamma(1-\beta\cdot\beta) = \Lambda_{00} \frac{1}{\gamma}. \quad (4.38)$$

式変形のため、 $\gamma$  の定義式 (4.3) を用いた。

### 4.3.4 逆変換の性質を使う

ここまでで、式 (4.21), (4.22), (4.23) の変換は以下のように単純化された。

$$ct' = \Lambda_{00}(ct - \beta x) = \varphi(V)\gamma(ct - \beta x) \quad (4.39)$$

$$x' = \Lambda_{00}(-\beta ct + x) = \varphi(V)\gamma(-\beta ct + x) \quad (4.40)$$

$$y' = \frac{\Lambda_{00}(V)}{\gamma}y = \varphi(V)y. \quad (4.41)$$

ここで  $\varphi(V) \equiv \frac{\Lambda_{00}(V)}{\gamma}$  と書き換えた。

今から、式 (4.41) の  $y$  の係数  $\varphi(V)$  は 1 に等しくなければならないことを示す。そのために、運動系  $O'$  に対して  $x'$  軸方向に速度  $-V$  で動く系  $O''$  をさらに考える (図 18 参照)。この新たな系  $O''$  の各座標点は  $O$  のそれと一致することを示せるが<sup>22</sup>、これは上の変換で  $V \rightarrow -V$  ( $\Leftrightarrow \beta \rightarrow -\beta$ ) としたものが逆変換になっていることを意味する。

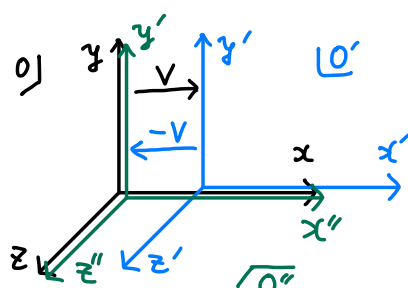


図 18: 運動系  $O'$  に対して  $x'$  軸方向に速度  $-V$  で動く系  $O''$ .  $O''$  系は元の静止系  $O$  と一致する。

このことを  $y$  についての式 (4.41) に適用すると

$$y'' = \varphi(-V)y' = \varphi(-V) \cdot \varphi(V)y = y. \quad \therefore \varphi(V)\varphi(-V) = 1. \quad (4.42)$$

また、空間の  $x$  方向と  $-x$  方向が対等であることから<sup>23</sup>、速度  $V$  の向きを反転させた場合も  $y$  座標方向の振る舞いは変化しないと考えられる。すなわち

$$y' = \varphi(V)y = \varphi(-V)y \quad \therefore \varphi(-V) = \varphi(V). \quad (4.43)$$

式 (4.42), (4.43) から直ちに  $\varphi(V) = 1$  が示される。

### 4.3.5 最終結果：ローレンツ変換

以上の結果をまとめると、静止系  $O$  と運動系  $O'$  の座標間の関係式が以下のように得られる。

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \quad (4.44)$$

$$x' = \gamma(-\beta ct + x) \quad (4.45)$$

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (4.46)$$

この座標変換（ローレンツ変換）の諸性質について次回以降の講義で解説していく。

<sup>22</sup>式 (4.39), (4.40), (4.41) についてさらに  $-V$  に対応する変換をかけた式を書き下せばより具体的に確認できる。

<sup>23</sup>図 18 のような系を  $z$  軸負の位置から眺める、と考えてもよい。  $V$  の向きは反転したように見えるが、元々の系と全く同じものを見ているに過ぎず、  $y$  方向の変換則 (4.41) も変化しない。