

第 14 回 一般相対性理論に向けて

これまで行ってきた特殊相対性理論についての講義の締めくくりに代えて、重力の理論である一般相対性理論の概要について解説する。一回の講義で一般相対性理論の全ては解説できないので、一般相対論を構築するための基礎と、一般相対論における物理現象の簡単な例に限って紹介する。

14.1 一般相対論の基礎

14.1.1 特殊相対論の限界

特殊相対性理論は、ニュートン力学と電磁気学（特に光速度が一定という性質）との不整合性を解消するために導入された理論と考えることもできる。実際、光速度が一定であるという性質に関連する諸現象を特殊相対論はうまく再現してくれる。その一方で、以下のような点は特殊相対論ではカバーされない。そのため、特殊相対論には改善の余地があると示唆される。

- 重力が取り扱えない。
- 慣性系における運動方程式や、異なる慣性系同士における物理量・運動方程式の関係（ローレンツ変換）は取り扱えるが、慣性系ではない系（速度が一定ではない**加速度系**など）における物理現象の記述が単純にはできない。

また、特殊相対論では時空はいたるところ平坦かつ一様⁶⁸と仮定されていた。一方、非慣性系を考えると**曲がった時空**を考える必要が生じる⁶⁹。このような場合（計量が $\eta_{\mu\nu}$ からずれる場合）、特殊相対性理論では単純には取り扱えない。

14.1.2 等価原理 / 一般相対性原理

特殊相対論を構築するために必要だった物理的な仮定は、**任意の慣性系で物理法則は同じである**という**特殊相対性原理**と、それを電磁気学に適用すると得られる**光速度一定の原理**であった。上で挙げた特殊相対論の問題点を解決するために、アインシュタイン自身が導入した新たな仮定は以下の通りであった。

- **等価原理**：十分小さな領域の内部では、**加速度による慣性力と重力は物理的に等価である**。

この原理は、物体の慣性質量（運動方程式の加速度項の係数）と重力質量（物体が感じる重力の強さの比例係数）が互いに等しいという実験事実がまずあり、それを物理理論（一般相対論）が従うべき原理に格上げしたものである。図 48 を参照。

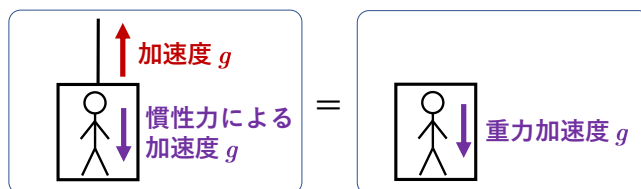


図 48: 等価原理: 重力 $m_{\text{重力}}g$ と加速度 g による慣性力 $m_{\text{慣性}}g$ は互いに区別できない。

⁶⁸世界間隔 $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(cdt)^2 + dx^2$ に出てくる係数が定数の単位行列（について時間部分の符号を反転させたもの）になっている、ということが時空が平坦かつ一様になっていることと対応している。

⁶⁹[非慣性系と曲がった空間の例] ある静止した円盤上に半径 R の円を描いたとき、その円周 L は $2\pi R$ となる。一方、この円盤を回転させると、回転方向にはローレンツ収縮が起こるので、同じ半径 R に対する円周は $2\pi R$ よりも短くなる。このような面は平面ではあり得ず、球面のように曲がった表面と対応している。また、空間が曲がっていることで世界間隔も $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(cdt)^2 + dx^2$ とは異なった表式となる。

慣性力と重力が互いに等価なので、重力がかかっている慣性系が存在する場合、その重力加速度 \mathbf{g} と同じ方向に加速する系（自由落下系）に移ることで、逆向きの慣性力を発生させて重力を打ち消すことができる。慣性質量 $m_{\text{慣性}}$ 、重力質量 $m_{\text{重力}}$ の粒子の運動方程式でこれを表すと

$$m_{\text{慣性}}\mathbf{a} = m_{\text{重力}}\mathbf{g} - m_{\text{慣性}}\mathbf{g} = 0. \quad (14.1)$$

右辺に出てくる $m_{\text{重力}}\mathbf{g}$ が粒子にかかる重力、 $-m_{\text{慣性}}\mathbf{g}$ が系の加速度 \mathbf{g} のために生じた慣性力で、これらがちょうど打ち消し合っている。

重力を打ち消した後の自由落下系では、粒子は重力・慣性力を感じないため、元から重力場も加速度もかかかっていない慣性系に粒子がある場合と全く同じ状況となる。等価原理は、自由落下系が慣性系と単に類似しているだけではなく、物理的に全く同等であるという仮定である。ただし、この同等性は注目する系が十分小さい場合に限られる。

ここで、重力場が存在しない慣性系については特殊相対論が成立する。等価原理によれば、自由落下系も慣性系と同等なので、自由落下系でも特殊相対論が成立することになる。なので、重力場が存在する領域における運動方程式を得るには以下の手順を踏めばよい：

$$\left[\begin{array}{l} \text{自由落下系に座標変換} \rightarrow \text{自由落下系で特殊相対論における運動方程式が成立すると仮定} \\ \rightarrow \text{元の座標系に座標変換し直す} \end{array} \right]$$

- 一般相対性原理： 任意の座標系で物理法則は同じ形で与えられる。

特殊相対性原理で「任意の慣性系で」となっていたところを「任意の座標系（加速度系）で」と拡張したものである。座標というものは物理量を数値化するために我々が勝手に導入したものに過ぎないので、物理現象の性質自体は座標の選び方に依らないはずである。この考え方を原理に格上げしたものがこれである。

数学的には、任意の座標系で運動方程式が同じ形をとるとというのが要請事項となる。これを実現するためには、種々の物理量や運動方程式が一般的な座標変換に対するテンソル量で構成されていけばよい。一般相対性理論を構築していく上での前提となる原理である。

14.2 重力と時空の歪み

14.2.1 重力場中の時計の遅れ

等価原理によると、重力場がある系と加速度系における物理現象は全く同じになる。加速度系における物理現象はニュートン力学などに基づいて比較的容易に取り扱えるが、これをもとに重力場がある場合に起こる物理現象を予言できる。その一例として、重力場中の時計は遅く進むことを示す。

図 49a のように、上方に加速度 g で運動するエレベーターの床から高さ h の位置にある天井に向けて周波数 ω の光を飛ばす。ただし、初期時刻 $t = 0$ でエレベーターは静止しているとする。光が床から放射されて天井に届くまでの時間は $t \sim h/c$ で、このとき天井の速度は上向きに $v = gt = gh/c$ となっている。簡単のため $v/c \ll 1$ を仮定すると、天井にたどり着いた光の周波数 ω' はドップラー効果により小さくなって

$$\omega' = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\omega = \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right)\omega. \quad (14.2)$$

等価原理によれば、重力場中で静止するエレベーターの中でも全く同じ現象が起こるので、重力に逆らって飛ぶ光の周波数は式 (14.2) に従って小さくなることがまずわかる。特に、天井の位置を基準とすると床の位置における重力ポテンシャルは $\Phi = -gh$ となるので、式 (14.2) を Φ で書き直すと

$$\omega' = \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)\omega \quad (\Phi < 0). \quad (14.3)$$

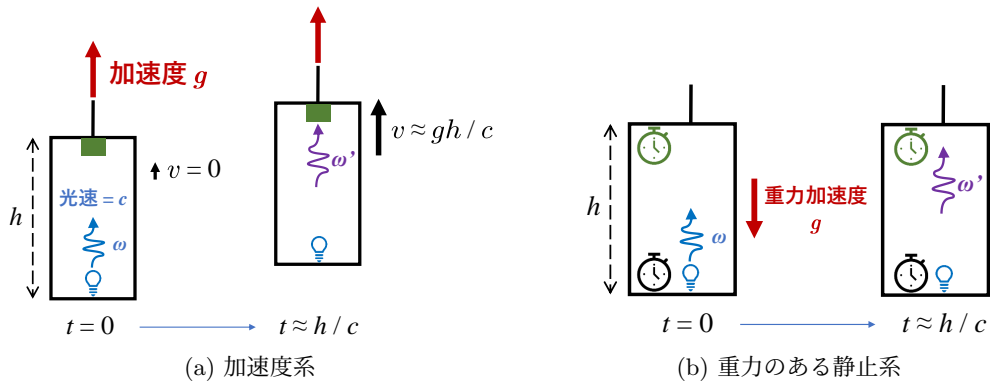


図 49: (a) 加速度 g で上昇するエレベーターと、その中を飛ぶ光。(b) 重力加速度 g の重力場中で静止するエレベーターと、その中を飛ぶ光。

さらに、この光の振動にシンクロして秒針が進む時計をエレベーターの床に置いておき、それと同等な時計を天井にも一つ設置しておく。天井の位置から床に置いてある時計を見るとき、その秒針の進み方は光の振動とシンクロしているのので、式 (14.3) に従って時計の進みも遅くなって見える。

- 床に置かれた時計の刻み間隔（固有時間）を $d\tau$ 、
- 床の時計の刻みを天井の時計で計ったときの時間間隔を dt

とすると、 $d\tau \sim 1/\omega$ 、 $dt \sim 1/\omega'$ となるので

$$d\tau = \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) dt < dt. \quad (14.4)$$

これは、重力ポテンシャル中の時計はゆっくり進む（重力場のない遠方で計った時間 dt と比べて、重力場中の時計の固有時間 $d\tau$ が小さく、少ししか進んでいない）ことを意味する。

14.2.2 重力場 = 時空計量の歪み

式 (14.4) は、重力場 Φ 中の時計の固有時間 $d\tau$ と十分遠方の地点の時間 dt とを関係づける式である。固有時間は $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}$ のように世界間隔 ds^2 と関係しているのので、式 (14.4) は世界間隔が $ds^2 = -(c dt)^2 + dx^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ からずれることを示唆する。 $\eta_{\mu\nu}$ は（曲がっていない）時空の計量であるが、以上より重力場は計量の $\eta_{\mu\nu}$ からの変化で表されると予想される。

重力場が存在する場合に計量がどのように変化するかは、物質の質量（エネルギー）分布に基づいて重力場を定めるアインシュタイン方程式を解くことでわかる。例えば、質量 M の質点を作る重力場に対応する世界間隔 ds^2 は、重力場が弱い領域では

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Big|_{|\Phi| \ll 1} \approx - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) (c dt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dx^2 \quad (14.5)$$

となることが示される。ただし、 $g_{\mu\nu}$ は時空計量で、

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (14.6)$$

は質点を作る重力ポテンシャルである。 G はニュートン定数。

重力場がないとき、計量 $g_{\mu\nu}$ はこれまで使っていた曲がっていない時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ に帰着する。逆に言えば、計量を $\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu}$ と変更すれば重力場の効果を取り入れたことになる。実際、等価原理

の説明で自由落下系（局所慣性系）から加速度系に移る座標変換 $x^\mu \mapsto x'^\mu$ を行う必要があったが、これを行うと

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx'^\alpha \right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\beta \right) \equiv g_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \quad \left(g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \eta_{\mu\nu} \right) \quad (14.7)$$

と、計量が $\eta_{\mu\nu}$ から $g_{\mu\nu}$ に変化する。したがって、等価原理からも一般的な成分を持った計量 $g_{\mu\nu}$ が自然と出てくることになる⁷⁰。

14.3 重力場中の粒子の運動

14.3.1 粒子の運動方程式

重力場中の粒子の運動を定める運動方程式を導出してみる。前節の内容に基づくと、計量を $\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu}$ を置き換えれば重力の効果を取り入れたことになるので、特殊相対論における粒子の運動方程式について $\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu}$ と置き換えて得られる式を立ててみることにする。

10.3 で、特殊相対論における質量 m の粒子の運動方程式は

$$S = - \int m_0 c^2 d\tau(t) = -m_0 c^2 \int \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2} dt = -m_0 c \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt \quad (14.8)$$

で与えられることを説明した。この作用（特に青字部分）について、 $\eta_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu}$ という置き換えを行い、また時間パラメタを dt から固有時間 $d\tau$:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (14.9)$$

に切り替える。ただし、 $g_{\mu\nu}$ の成分は座標 x^μ の関数 ($g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\rho)$)。すると

$$S = -m_0 c \int \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \equiv -m_0 c \int L(x^\mu, \dot{x}^\mu) d\tau \quad \left(\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \right). \quad (14.10)$$

このラグランジアン L から運動方程式であるオイラー・ラグランジュ方程式を導出してみる。

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{-g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}} \left(-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) = -\frac{1}{2c} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (14.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} &= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2\sqrt{-g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}} \underbrace{\left(-g_{\mu\nu} \delta^\mu_\alpha \dot{x}^\nu - g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \delta^\nu_\alpha \right)}_{=g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu + g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu = 2g_{\alpha\mu} \dot{x}^\mu} \right] \\ &= -\frac{d}{cd\tau} (g_{\alpha\mu} \dot{x}^\mu) = -\frac{1}{c} \left(\frac{dg_{\alpha\mu}}{d\tau} \dot{x}^\mu + g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\mu \right) = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu + g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\mu \right). \end{aligned} \quad (14.12)$$

ただし、どちらの式についても2番目の等号で式(14.9)の両辺を $d\tau$ で割り2乗すると得られる関係式

$$-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2 \quad (14.13)$$

を用いている。これらの計算結果からオイラー・ラグランジュ方程式を立てると

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{1}{c} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu + g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\mu \right). \quad (14.14)$$

さらに、 $\alpha \rightarrow \beta$ と置き換えてから計量の逆行列 $g^{\alpha\beta}$ を縮約し、式を整理すると

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (14.15)$$

⁷⁰計量 $\eta_{\mu\nu}$ の座標変換で生成される計量はいくまで曲がっていない（重力場のない）時空に対応する。 $\eta_{\mu\nu}$ の座標変換では作れないような成分を持った $g_{\mu\nu}$ も別に存在し、そちらが真に重力場を伴った時空に対応する。

この式が重力場中の粒子の運動方程式（測地線方程式と呼ばれる）である。ここで、

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) \quad (14.16)$$

はクリストッフェル記号と呼ばれる量で、時空計量の一階微分で与えられるという意味で時空の曲がり具合と関連した量である。特殊相対論で使っていた計量 $\eta_{\mu\nu}$ は曲がっていない時空に相当し、 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ のとき式 (14.15) は、 $\partial_{\rho}\eta_{\mu\nu} = 0$ より

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2} = 0 \quad (14.17)$$

となる。重力がかかっていない粒子は等速直線運動をすることを表す式である。

14.3.2 弱重力場による軌道の曲がり

測地線方程式 (14.15) を解けば、計量 $g_{\mu\nu}$ で表される重力場中を運動する粒子の軌道が分かる。点粒子の重力場を表す計量 (14.5) を使ってこれを具体的に書き下してみよう。

まず、クリストッフェル記号 (14.16) の成分は、定義通り計算して弱重力極限 $|\Phi/c^2| \ll 1$ をとると

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{c^2}\partial_i\Phi, \quad \Gamma_{00}^i = \frac{1}{c^2}\partial_i\Phi, \quad \Gamma_{jk}^i = -\frac{1}{c^2}(\delta_{ik}\partial_j\Phi + \delta_{ij}\partial_k\Phi - \delta_{jk}\partial_i\Phi). \quad (14.18)$$

ただし、 $i, j, k = 1, 2, 3$ で、 $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ の上記以外の成分はすべてゼロとなる。

- 非相対論的粒子 ($v/c \ll 1$)

粒子の速度が十分遅い場合には、固有時間は普通の時間とほぼ一致する ($\tau \sim t$) ので

$$\dot{x}^{\mu} = (c, \mathbf{v}) \quad (14.19)$$

となる。これを使って式 (14.15) の $\alpha = i$ 成分を書き下し、極限 $v/c \ll 1$ をとると

$$0 = \ddot{x}^i + \Gamma_{\mu\nu}^i \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \sim \ddot{x}^i + \underbrace{\Gamma_{00}^i \dot{x}^0 \dot{x}^0}_{\frac{1}{c^2}\partial_i\Phi \cdot c^2} + \underbrace{\Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k}_{O(v^2/c^2)} \sim \ddot{x}^i + \partial_i\Phi. \quad (14.20)$$

この式は重力ポテンシャル Φ による重力を感じて運動する粒子の運動方程式そのものである。

- 相対論的粒子・光 ($v \sim c$)

粒子の速度が光速に近くなる場合には、式 (14.20) の $O(v^2/c^2)$ 項の寄与が無視できなくなる。この寄与も取り入れて、粒子の軌道が重力場によってどれだけ曲げられるかを計算してみよう。

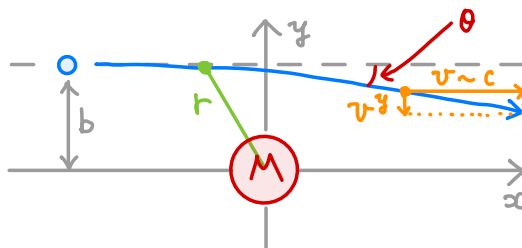


図 50: 質量 M の質点を作る重力場による相対論的粒子の軌道の曲がり。

図 50 のように、質量 M の重力源に対して x 軸向きで衝突係数 b の軌道を光速に近い速さ $v \sim c$ で飛ぶ粒子を考え、その軌道が直線からどれだけずれるかを評価する。重力場が弱く軌道のずれが小さい場合を考えると、粒子はほぼ直線軌道を描くので

$$d\tau \sim \frac{1}{\gamma} dt, \quad \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \sim \gamma \frac{dx^{\mu}}{dt} \sim \gamma(c, v, 0, 0) \sim \gamma(c, c, 0, 0). \quad (14.21)$$

これを使って式 (14.15) を書き換えると

$$\gamma^2 \left(\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right) = 0 \quad (14.22)$$

この式の両辺を γ^2 で割ったものについて、 $\alpha = 2$ 成分（すなわち $x^2 = y$ 成分）を書き下すと

$$0 = \frac{d^2 y}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^y \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} + \underbrace{\Gamma_{00}^y}_{\frac{1}{2}\partial_y\Phi} \underbrace{\frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt}}_{c^2} + \underbrace{\Gamma_{xx}^y}_{\frac{1}{2}\partial_y\Phi} \underbrace{\frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt}}_{c^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\partial_y\Phi. \quad (14.23)$$

式の青字部分が非相対論的な場合 (14.20) と比べて新たに付け加わった部分である。式全体を c で割ったものに $\Phi = -GM/r = -GM/\sqrt{x^2 + y^2}$ を代入して整理すると

$$0 = \frac{1}{c} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2}{c} \partial_y \Phi = \frac{d}{cdt} v^y + \frac{2}{c} \partial_y \left(-\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \Bigg|_{y=b} = \frac{d}{dx} v^y + \frac{2GMb}{c} \frac{1}{(x^2 + b^2)^{3/2}}. \quad (14.24)$$

ただし、今回考える粒子の軌道について $x \sim ct$ となることを用いた。初期状態で $v^y = 0$ であることに留意して、この式を軌道全体 ($x = -\infty \sim \infty$) にわたって積分すると

$$v^y|_{x=+\infty} = -\frac{2GMb}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = -\frac{2GMb}{c} \left[\frac{x}{b^2 \sqrt{x^2 + b^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{4GM}{cb}. \quad (14.25)$$

これが、粒子が重力源の横を通り過ぎた場合の速度の変化分を表す。以上では粒子の速度が光速に近い場合 ($v \sim c$) を考えたが、光 ($v = c$) の場合も結果は同じである⁷¹。

式 (14.25) から、光の軌道が重力によってどれだけの角度曲げられるかを算出することができる。例えば、太陽の表面ぎりぎりをかすめるように飛ぶ光については、 $GM_\odot/c^2 = 1.48 \text{ km}$ 、 $b = r_\odot = 6.96 \times 10^5 \text{ km}$ を代入して、軌道の曲がり角 $\theta \sim |v^y|/c$ を計算すると

$$\theta \sim \frac{|v^y|}{c} = \frac{4GM}{c^2 b} = 8.51 \times 10^{-6} [\text{rad}] = 1.75'' . \quad (14.26)$$

天球上で太陽表面付近に位置する星はこの角度分だけ位置がずれて見えることになる。1919年の日食の際にエディントンらによってこのずれが実際に観測され、**一般相対性理論の最初の実験的証拠**となった。また、手前の位置にある天体の重力によって遠方の天体の像がゆがめられる**重力レンズ効果**もこれと同じ原理によって生じる。

14.4 一般相対論についてのコメント

14.4.1 今回説明しなかった事項

本講義では一部しか解説しなかったが、一般相対論全体についての説明は例えば以下のように進んでいく。様々な教科書・講義ノートで解説されているので、必要に応じて参照されたい。

- 曲がった時空を記述するために必要となるリーマン幾何学
- 一般的な座標変換に対するテンソルの導入
- 曲がった時空における微分である共変微分
- 時空の歪みを記述する曲率テンソル

⁷¹光の軌道に沿って $ds^2 = 0$ となるため固有時間もゼロとなり、そのため固有時間 τ を使って書かれた式 (14.15) はそのままでは使えない。その代わりに、光の軌道に沿ってアフィンパラメーター λ と呼ばれる時間パラメータを取り直すと、式 (14.15) で $\tau \rightarrow \lambda$ と置き換えた式がそのまま成立する。

- 物質分布が与えられたときに時空計量（によって記述される時空のゆがみ、および重力場）を定める**アインシュタイン方程式**
- アインシュタイン方程式を解いて得られる時空の例（**ブラックホール、膨張宇宙**など）
- 一般相対論における諸現象（**粒子・天体の運動、ブラックホールの性質、重力波、宇宙論**など）

14.4.2 一般相対論に関連する研究

一般相対論は現代の物理学・天文学における様々なトピックに顔を出す。その例を以下にいくつか挙げる。もし、気になるテーマやキーワードがあれば調べてみると面白いかもしれない。

- **ブラックホールに関する研究**： 光をはじめとするどんな物理的信号を使っても外部に信号を送れない時空領域のことを**ブラックホール**と呼んでおり、単純には光すら脱出できなくなるほどの強い重力場を伴った天体と考えることができる。このブラックホールの性質に関する研究が進められている。また、量子論と組み合わせることで**ホーキング放射**と呼ばれる放射がブラックホールから出てくると予言されており、様々な見地から研究が進められている。
- **天文学への応用**： 強い重力場を伴うコンパクト天体（ブラックホール、中性子星等）や、それらを構成要素として持つ天体はこの宇宙に多く存在すると考えられている。銀河中心の大質量ブラックホールはその例である。また、例えばX線連星、パルサー（自転する中性子星）、超新星爆発、ガンマ線バースト、活動銀河核とジェットなどはコンパクト天体との関係が深い。相対論に基づいて解析される重力レンズ現象も天文学・宇宙論で重要な役割を果たす。
- **重力波天文学**： 時空のゆがみが光速で伝搬する**重力波**も、アインシュタイン方程式を解くと得られる解の一つである。マクスウェル方程式にとっての電磁波解に相当する。近年になってこの重力波が直接観測できるようになり、それをを用いて超遠方の天体（ブラックホールや中性子星など）を観測して様々な研究を行う**重力波天文学**についての研究が進展しつつある。
- **数値相対論**： アインシュタイン方程式は複雑な連立非線形偏微分方程式なので、一般には解くのが難しい。これを数値的に解く手法が**数値相対論**で、例えばブラックホールや中性子星の連星が合体する様子のシミュレーションなどが実現されており、様々な研究に応用されている。
- **宇宙論**： 現在の宇宙は加速膨張しているとされる。この膨張する宇宙（フリードマン宇宙）は、アインシュタイン方程式を解くと自然に得られる解の一つである。これをはじめ、宇宙論の研究には一般相対論の活用が不可欠である。
- **修正重力理論**： アインシュタインが作った重力理論である一般相対性理論のほかにも、重力を記述する様々な理論を作ることが実は可能である。一般相対論以外の重力理論は**修正重力理論**と呼ばれ、その性質や実験的検証法などについての研究が進められている。ある意味で**一般相対論の検証**を行う研究と見ることもできる。
- **相対論の数学的側面**： 相対性理論は幾何学や解析学と関係が深いので、数学分野でも研究されているほか、それらの分野における様々な数学的手法を活用した研究が進められている。2020年にR. ペンローズがノーベル物理学賞を受賞する理由となった特異点定理はその一例と言える。
- **素粒子論・物性理論への応用**： 素粒子の理論の一つである超弦理論に基づくと、重力理論と量子場の理論との間に対応関係があると予言される。この対応関係に基づいて、量子場の理論や物性理論における諸現象を重力理論の手法を活用して解析する研究などが進められている。