

第 11 回 相対論における諸現象（波動・光）

今回は特殊相対性理論において起こる特徴的な現象について紹介する。粒子の運動にまつわる諸現象については第 7 回で扱ったが、本節では波動と光について注目する。

11.1 波動

11.1.1 正弦波

波動（電磁波や音波など）の中で、もっとも単純なものは角振動数 ω 、波数 \mathbf{k} の正弦波である。

$$\phi(x^\mu, k^\mu) = \sin\left(-\omega t + \underbrace{k^x x + k^y y + k^z z}_{=\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right) \equiv \sin(k_\mu x^\mu). \quad (11.1)$$

$\phi(x^\mu, k^\mu)$ は波動の振幅である。この式で、4 元波数ベクトル k^μ を

$$k^\mu \equiv (\omega/c, \mathbf{k}) \quad (11.2)$$

のとおり導入して、波動の位相を以下のように書き表した：

$$-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \eta_{\mu\nu} k^\mu x^\nu = k_\mu x^\mu. \quad (11.3)$$

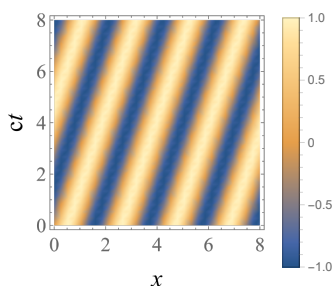


図 38: $\omega/c = 1, k^x = 3$ の場合の正弦波 $\phi(ct, x)$ (式 (11.1))。波動伝搬面は $x = \frac{1}{3}ct + (\text{定数})$ となる。

位相 $k_\mu x^\mu$ が一定となる (4 次元時空中の) 等位相面に沿って波動の振幅 $\phi(x^\mu)$ は同じ値をとるが、これは波動が等位相面に沿って伝搬することを意味する。 \mathbf{x} を 3 次元波数ベクトル \mathbf{k} と水平な成分 \mathbf{x}_\parallel と垂直な成分 \mathbf{x}_\perp に分解して $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\parallel + \mathbf{x}_\perp$ とすると、位相 (11.3) が一定であるという式は

$$-\omega t + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_\parallel + \mathbf{x}_\perp) = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_\parallel = (\text{一定}) \quad (11.4)$$

と書かれる。時間が Δt だけ進むとき、位相 (11.4) の値を変化させないためには

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{\omega \Delta t}{|\mathbf{k}|} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \equiv c_s \Delta t \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (11.5)$$

だけ位置を $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$ とずらせばよい。言い換えると、時間が Δt 経過する間に波動は $\Delta \mathbf{x} = c_s \Delta t \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ だけ移動する。この式に現れる係数

$$c_s = \omega/|\mathbf{k}| \quad (11.6)$$

は波動の (位相) 速度で、 $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ は波動の伝搬方向を向いている単位ベクトルである。波動は 3 次元波数ベクトル \mathbf{k} の方向に伝搬するということを表している。

11.1.2 分散関係

式 (11.1) の段階では、角振動数 ω と 3 次元波数ベクトル \mathbf{k} は互いに独立な定数である。ここで、振幅 $\phi(x^\mu, k^\mu)$ が何らかの運動方程式に従うことを要請すると ω, \mathbf{k} の間に関係式が成立する。その関係式 $\omega = \omega(\mathbf{k})$ のことを分散関係と呼ぶ。

簡単な例として、スカラー場 $\phi(x^\mu)$ についてのクライン・ゴールドン方程式

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x^\mu) = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\right)\phi(x^\mu) = 0 \quad (11.7)$$

を考える。この式の解を求めるため、式(11.1)の $\phi(x^\mu)$ をこの式に代入してみると

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\right)\sin(-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{c^2}\omega^2 - |\mathbf{k}|^2\right)\sin(-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = 0. \quad (11.8)$$

この式が満たされるためには⁵³

$$\underbrace{-\frac{1}{c^2}\omega^2 + |\mathbf{k}|^2}_{=\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = k_\mu k^\mu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \pm c|\mathbf{k}|. \quad (11.9)$$

したがって、クライン・ゴールドン方程式(11.7)に従うスカラー場の波動(11.1)については分散関係 $\omega = \pm c|\mathbf{k}|$ が成立する。位相速度が $c_s = \omega/|\mathbf{k}| = \pm c$ と光速に一致する場合に相当する。

11.1.3 4元波数ベクトル

波動の位相は単なる数値で、なおかつ波動の山・谷やその間にある節の位置と対応している。どの慣性系から見ても山・谷は山・谷、節は節に見えるはずだが、そのため位相の値はどの慣性系から見ても同じ値となる。すなわち、**波動の位相 $k_\mu x^\mu$ はスカラー**として振る舞う。 x^μ は4元ベクトルなので、 $k_\mu x^\mu$ がスカラーとなるためには式(11.2)で定義される4元波数ベクトル k^μ も4元ベクトルとして振る舞う。

k^μ は4元反変ベクトルとして振る舞うのだから、ローレンツ変換に対しては

$$k^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu k'^\nu \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \omega/c \\ k^x \\ k^y \\ k^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'/c \\ k'^x \\ k'^y \\ k'^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\omega' + \beta ck'^x)/c \\ \gamma(k'^x + \beta\omega'/c) \\ k'^y \\ k'^z \end{pmatrix} \quad (11.10)$$

と変換する。この式の各成分の物理的解釈については次節で説明する。

また、 k^μ の2乗 ($k_\mu k^\mu$) は

$$k_\mu k^\mu = -\frac{1}{c^2}\omega^2 + |\mathbf{k}|^2 = \left(1 - \frac{c_s^2}{c^2}\right)|\mathbf{k}|^2 \quad \begin{cases} < 0 & (c_s < c : k^\mu \text{ は時間的}) \\ = 0 & (c_s = c : k^\mu \text{ は光的 (ヌル)}) \\ > 0 & (c_s > c : k^\mu \text{ は空間的}) \end{cases} \quad (11.11)$$

のように振る舞う。また、 $k^\mu k_\mu$ の符号に応じて k^μ のことを**時間的 / 光的 (ヌル) / 空間的ベクトル**と呼ぶ。特に、**位相速度 c_s が光速を越えない場合は k^μ は時間的ベクトル、光速と一致する場合は k^μ は光的ベクトル**となる。今回は波動とその伝搬速度に注目したが、点粒子の4元速度 u^μ についても同様のことが言える。

⁵³同じ結果をテンソル形式で導出する場合は以下ようになる。クライン・ゴールドン方程式(11.7)をテンソル表記で書くと

$$0 = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x^\mu) = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\phi(x^\mu).$$

この式に正弦波の式(11.1)を代入すると

$$\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\sin(k_\mu x^\mu) = -\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu \sin(k_\mu x^\mu) = 0.$$

ただし、 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}f(k_\mu x^\mu) = k_\mu f'(k_\mu x^\mu)$ となることを使った。この式から $\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = k_\mu k^\mu = 0$ 、すなわち式(11.9)の分散関係が得られる。

11.1.4 光の4元運動量

光子のエネルギー E と運動量 \mathbf{p} は

$$E = \hbar\omega = \hbar c|\mathbf{k}|, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (11.12)$$

と与えられることが知られている。これに対応する4元運動量 p^μ は

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}) = \hbar(\omega/c, \mathbf{k}) = \hbar k^\mu \quad (11.13)$$

と、4元波数ベクトル k^μ に比例する⁵⁴。また、 $\omega = |\mathbf{k}|c$ であることに対応して、波数ベクトル k^μ と4元運動量 p^μ は光的ベクトル ($k^\mu k_\mu = 0 = p^\mu p_\mu$) となる。

11.2 ドップラー効果・光行差

11.2.1 光のローレンツ変換

式(11.10)は、速度 $\beta = v/c$ で x 軸方向に運動する運動系 O' に波数 k'^μ を持つ光があった時に、それを静止系 O から見たときにはどのような波数 k^μ を持つ光として観測されるかを示すものである。速度 v で運動する光源が発する光を静止系で見たものと思ってもよい。

運動系(光源の静止系) O' における光線の伝搬方向と O' 系の運動方向との間の角度を θ' とすると

$$k'^x = k' \cos \theta', \quad k'^y = k' \sin \theta', \quad \omega' = ck' . \quad (11.14)$$

これが、静止系 O では $(k^x, k^y) = (k \cos \theta, k \sin \theta)$ を持つ光として見える。これらの量の間の対応関係は、式(11.10)より

$$\omega = \gamma(\omega' + \beta ck' \cos \theta'), \quad k \cos \theta = \gamma(k' \cos \theta' + \beta \omega'/c), \quad k \sin \theta = k' \sin \theta' \quad (11.15)$$

この第1式から

$$\omega = \gamma(1 + \beta \cos \theta') \omega' \equiv D\omega' \quad (D \equiv \gamma(1 + \beta \cos \theta')) . \quad (11.16)$$

この式で定義した D を今回は**ドップラー因子**と呼ぶことにする。また、(11.15)の第2式から

$$k \cos \theta = \frac{\omega}{c} \cos \theta = \gamma(k' \cos \theta' + \beta \omega'/c) = \gamma(\cos \theta' + \beta) \frac{\omega'}{c} = \frac{\gamma(\cos \theta' + \beta)}{D} \frac{\omega}{c} \quad (11.17)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\gamma(\cos \theta' + \beta)}{D} = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'} . \quad (11.18)$$

ただし、計算の途中で $\omega' = |\mathbf{k}'|c$ であることと式(11.16)を用いた。式(11.16), (11.18)がそれぞれ周波数 ω , 光の進行方向 θ の変換則を与える。式(11.15)の第3式は、式(11.16), (11.18)を使えば常に満たされることが示せる。

11.2.2 光行差

式(11.18)は、光源が静止して見える系 O' で x 軸から角度 θ' の方向に出る光線が、静止系 O から見ると角度 θ の方向に見える、ということを意味する式である。これを静止系 O に対する運動系 O' の速度が $v = 0.8c$ の場合に図示したのが図 39b であり、運動する光源については**進行方向に放射光が集中する**ことが分かる。式(11.18)の式からも、 $\beta = v/c$ の値が大きいほど $\cos \theta$ の値は元の角度に対応する $\cos \theta'$ の値よりも大きくなるため、光の進行方向の角度 θ も小さくなることが見て取れる。この現象は**相対論的ビーミング効果**とも呼ばれる。

⁵⁴ $m_0 \neq 0$ の場合の4元運動量の表式 $p^\mu = m_0 \gamma(v)(c, \mathbf{v})$ で、 $m_0 \gamma(v)$ を有限値に保ったまま $|\mathbf{v}| \rightarrow c$ ($\gamma(v) \rightarrow \infty$) とした場合に対応する。 $E = m_0 \gamma(v) c^2 = \hbar\omega = \hbar c|\mathbf{k}|$ という関係が成り立っている。

逆に、一様に分布する光源に対して自分がある速度で運動している場合、静止時と比べて光はより前方から飛んでくるように見える。雨や雪が上空からまっすぐ降っている中を自分がある速度で運動しているとき、自分からは雨の速度が本来の速度に自身の速度の逆向きを合成したものであるように見える（図 40 参照）。その結果、雨は自分に対して進行方向前方から降り注いでくるように見える。光についても同様の現象が起こり、その場合の角度は式 (11.18) に従って求められる。この現象は**光行差**と呼ばれており、例えば地球の公転のために星の位置が季節ごとに異なって見えるという現象がこの効果で引き起こされることが知られている。

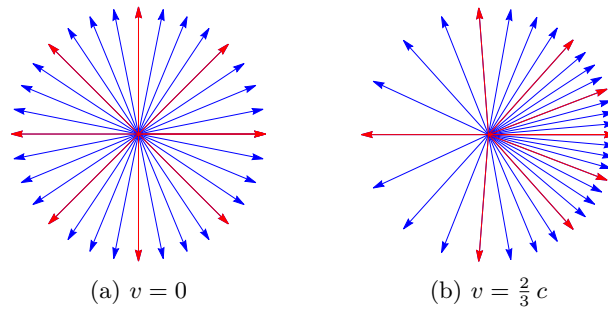


図 39: (a) 静止している光源の光の放射。等方的に光線が出るものとする。(b) 同じ光源が右方向に速度 $v = \frac{2}{3}c$ で運動している場合の光の放射。進行方向に放射が集中する。

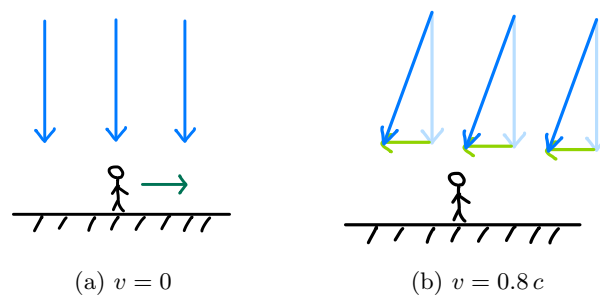


図 40: (a) 静止時に鉛直下方雨や雪が降っている中を自分が右方向に運動しているものとする。(b) 自分から見ると雨や雪が進行方向にずれた向きから飛んでくるように見える。

- **非相対論的な場合との比較:** 以上で述べた現象は相対論に特有のものかのように思われたかもしれないが、実際には**光行差などの現象は相対論的效果を入れなくても起きる**ことに注意する必要がある。実際、図 40 を見てもわかる通り、光行差自体は非相対論的な速度の合成を考えた場合でも発生する。運動系 O' で速度 $(c' \cos \theta', c' \sin \theta')$ で運動する粒子が静止系 O から見るとどう見えるかを非相対論的な場合に解析すると

$$\begin{pmatrix} c \cos \theta \\ c \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' \cos \theta' + v \\ c' \sin \theta' \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\cos \theta' + v/c'} \quad (11.19)$$

ただし、運動系 O' は静止系 O に対して x 軸方向に速度 v で運動しているものとした。一方、相対論的な場合の角度の変換則は、式 (11.18) をもとに計算すると

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(\beta + \cos \theta')} \quad (11.20)$$

となることが示せる。 $\beta = v/c$ であることを思い出すと、非相対論的な場合の式 (11.19) と相対論的な場合の式 (11.20) はある程度似た形をしており、**相違点は分母に $\gamma(v)$ が入るか否か**であ

ることがわかる。この係数の有無の差により、相対論/非相対論的な場合で角度の変化量がかわることになる。例えば、 $v \sim c$ (式 (11.19) では $v \sim c'$) の場合に進行方向に対して垂直に放射された光 ($\theta' = \pi/2$) を静止系から見た場合、非相対論的な場合は $\tan \theta \sim 1$ となって $\theta \sim 45^\circ$ の向きに飛ぶように見える一方、相対論的な場合は $\tan \theta \sim \frac{1}{\gamma(v \sim c)} \sim 0$ となってほぼ進行方向の向きに飛ぶことが分かる。相対論的な場合には、係数 γ の分だけ図 39 で見たビーミング効果がより激しく起こることになる。

- **放射輝度の変化:** 光源の単位面積 A からある方向の単位立体角 Ω あたりに放射される光で $E \sim E + dE$ の範囲のエネルギーを持つものに注目する。この光がもたらすエネルギー流量 Φ は

$$L_E(\theta, \phi) = \frac{d\Phi}{dEdA d\Omega} \quad (11.21)$$

と表される。この $L_E(\theta, \phi)$ は **(分光) 放射輝度** と呼ばれ、その光を観測した際の明るさを決める量となっている。詳しい導出は省略するが、観測時の明るさに対応する放射輝度 $\int L_E dE$ は D^4 に比例することが示される⁵⁵。例えば、光源の進行方向から見た光はこの係数の分増光することになる。

11.2.3 相対論的ドップラー効果

式 (11.16) は光の角振動数 ω' がローレンツ変換すると $\omega = D\omega'$ ($D = \gamma(1 + \beta \cos \theta')$) に変化するという式だが、これは**相対論的ドップラー効果**を表す。

- **可視光線の波長:** 図 41 は可視光の波長 $\lambda = c/\nu = 2\pi c/\omega$ (ν は振動数) と実際に見える色の対応図である⁵⁶。可視光線の波長は 380 ~ 780 nm 程度で、おおよそ波長が 2 倍ないし 1/2 になると可視光は目に見えない赤外線ないし紫外線に変化してしまう。

例えば、光源が光速の 60% ($v = 0.6c$) で運動している場合、式 (11.16) に出てきたドップラー因子は $D = \gamma(1 + \beta \cos \theta') = \frac{1}{4}(5 + 3 \cos \theta')$ となり、特に進行方向 ($\cos \theta' = 1$) に飛ぶ光については $D = 2$ となる。この場合、光源静止系で光源が可視光を出していたとすると、静止系からそれを見たときには可視領域外の紫外線が観測されることになる。



図 41: 波長 $\lambda = c/\nu = 2\pi c/\omega$ [nm] に対する可視光のスペクトル。ドップラー効果によって振動数は $\lambda = \lambda'/D$ と変化する。

- **非相対論的ドップラー効果との比較:** 光行差について説明したのと同様に、**ドップラー効果自体は相対論に特有の現象ではない**。非相対論的な波動（音波など）についてのドップラー効果では、波動の伝搬速度が c 、波源から角度 θ だけ離れた方向に観測者が速度 v で運動している場合、観測者が見る波動の周波数は以下で与えられる：

$$\omega = \left(1 + \frac{v \cos \theta}{c}\right) \omega' . \quad (11.22)$$

相対論的な場合の式 (11.16) との差は、ドップラー因子 D に係数 γ が入るか否かだけである。この係数の分、相対論では周波数の変化がより大きく現れる。

⁵⁵以下の論文などを参照のこと：Weiskopf et al., “Searchlight and Doppler effects in the visualization of special relativity: a corrected derivation of the transformation of radiance,” ACM Trans. Graph. 18, 3 (1999), 278-292; Van Acoleyen et al., “Captain Einstein: a VR experience of relativity”, arXiv:1806.11085 (2018).

⁵⁶出典：<https://ja.wikipedia.org/wiki/可視光線>

- **横ドップラー効果:** 相対論特有の現象としては、進行方向に対して真横の方向に飛ぶ光について波長が長くなるという**横ドップラー効果**が挙げられる。式 (11.18) からして、静止系 O で進行方向に対して真横に飛ぶように見える光 ($\cos \theta = 0$) は、光源静止系 O' では $\cos \theta' + \beta = 0$ の方向に飛んでいる。この関係式を ω の式 (11.16) に代入すると

$$\omega = \gamma (1 + \beta \cos \theta') \omega' = \gamma (1 - \beta^2) \omega' = \frac{\omega'}{\gamma} \quad (11.23)$$

となり、光源静止系における振動数 ω' と比べて静止系で見える振動数 ω は $1/\gamma$ 倍に小さくなる。一方、非相対論的なドップラー効果 (11.22) では、観測者の進行方向に対して真横の方向から届く波動については振動数は変化しない。これは、観測者の速度の音源方向の成分がゼロになるためである。したがって、真横方向から届く波動についてのドップラー効果は相対論特有の現象となっている。

「動く時計は γ 倍に遅く進むように見える」という現象を以前紹介したが、この効果によって動く光源から出る光の振動も遅くなって見える。ある意味、光源から出る光の振動が時計の刻みと同じ役割を果たしており、動く時計の遅れは今回の場合周波数の減少（波長の増大）となって見えている。

11.3 シミュレーションによる再現

以前も使った特殊相対論のシミュレーターを再度用いる。今回は“Color” ボタンを押してドップラー効果による色の変化を有効にする。

- **道路と球体:** <https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~norihiro.tanahashi/webgl/city>
- **電車:** <https://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~norihiro.tanahashi/webgl/railway>

なお、このシミュレーターでは簡単のため物体や空などから生じる光のスペクトルが単純化されている。より現実的な場合見え方については [YouTube 動画 “Captain Einstein”](#) などを参照のこと。

11.3.1 光行差

図 42 に光行差による景色の見え方の変化を示す。相対論的な場合 ($v \sim c$) には光がより前方から飛んでくるため (図 39 参照)、物体の見込み角が小さくなる。そのため、光行差がない場合と比べて物体があたかも遠くなったかのように見える。ビルが歪んで見えるのは、ビルの最上階部分は地上階部分よりも観測者から離れており、その分より過去の時点で放射された光が目が届くことで、ビルの最上階部分がより過去の時点での位置（奥の方）にずれて見えるため。

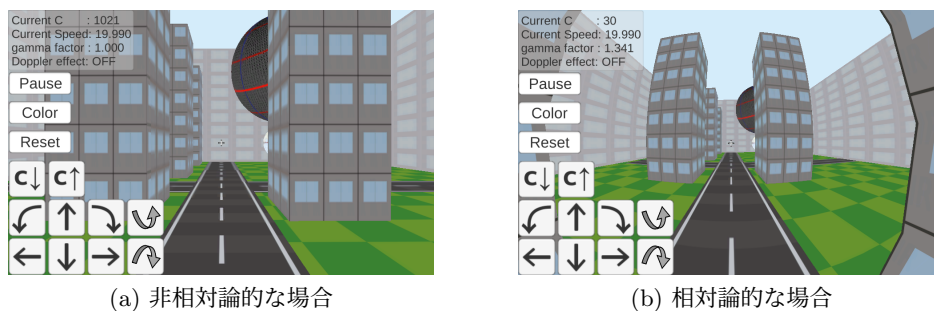


図 42: 自分が前方に運動している場合の光行差の見え方。(a) 非相対論的な場合 ($v = 0.02c$), (b) 相対論的な場合 ($v = \frac{2}{3}c$)。この図ではドップラー効果による色の変化を取り除いている。

11.3.2 相対論的ドップラー効果

図 43, 44 に相対論的ドップラー効果による色の変化を示す。図 43 は比較的速度が遅い場合 ($v = 0.05c$, $D \sim 1 + 0.05 \cos \theta$) で、進行方向から来る光はより短波長になるので青色に (図 43a)、進行方向と逆向きから来る光はより長波長になるので赤色に見える (図 43b)。同様に、自分に対して近づいてくる物体はより青色に、遠ざかる物体はより赤色に色が変化して見える (図 43c)。

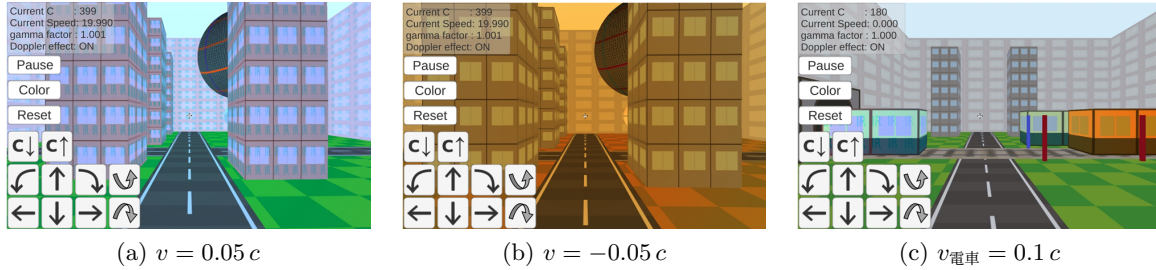


図 43: 相対論的なドップラー効果による色の変化。(a),(b) 自分が前方・後方に $v = 0.05c$ で運動している場合。(c) 電車が $v = 0.1c$ で運動している場合。

図 44 は比較的速度が速い場合 ($v = \frac{2}{3}c$, $D \sim 1.3 + 0.9 \cos \theta$) である。このシミュレーションにおけるビルや壁には、赤外線で光る塗料で“IR”、紫外線で光る塗料で“UV”と書いてある。進行方向 (図 44a) については、赤外線の成分がドップラー効果により可視光として見えている。前方が暗くなって見えるのは、光の強度自体は強くなっているものの、可視光だった光がドップラー効果により紫外線に変化して見えなくなっているため。なお、進行方向を中心とする円環状の領域には虹色のようなパターンが生じる (図 44b)⁵⁷。また、横ドップラー効果により進行方向に対して真横方向 (画面中央) の光が赤く変化しているほか、進行方向側は明るく、その逆側は暗くなっている (図 44c)。

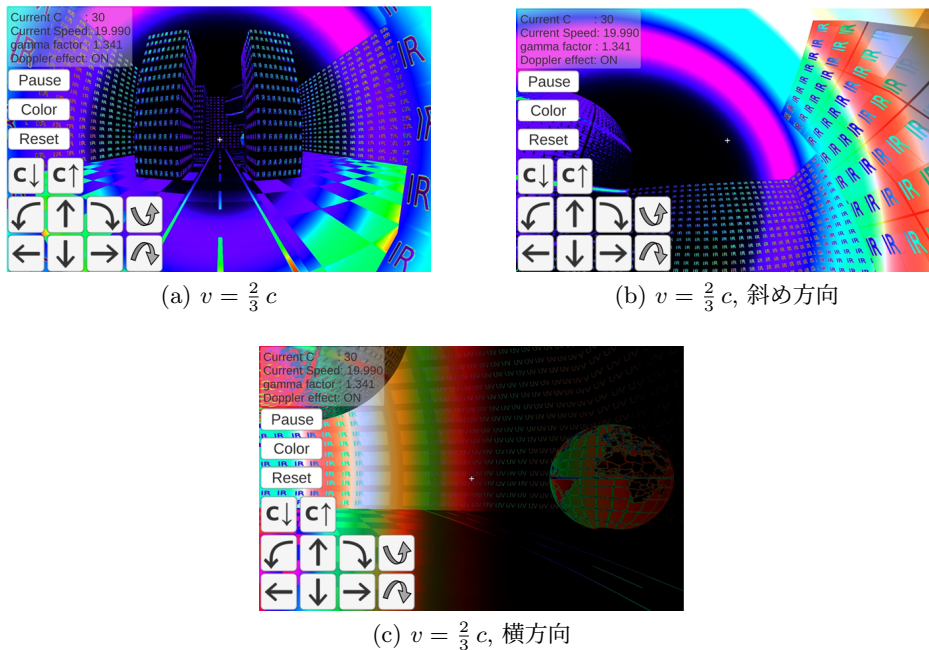


図 44: 相対論的なドップラー効果による色の変化。(a) 前方に $v = \frac{2}{3}c$ で運動している場合。(b) 進行方向に対して斜めの方向の様子。(c) 進行方向に対して真横方向の様子。

⁵⁷宇宙空間を光速近くで飛んでいる宇宙線から見ると、星々からくる光について同様の色の変化が生じる。この現象は星虹 (スターボウ) と呼ばれることがある。ただし、星々の光のスペクトルは星ごとに異なるうえ複雑な構造を持つため、きれいな虹色のパターンが見えるわけではない。<https://ja.wikipedia.org/wiki/虹#星虹>などを参照のこと。