

## 第10回 相対論的力学の性質

### 10.1 復習：相対論的運動方程式

前回の講義で、ニュートンの運動方程式を相対論に拡張した式として以下を導入した。

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad (10.1)$$

この式の構成要素は下記の通り。粒子の軌道は  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  で与えられるとする。

- **4次元座標**  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$   
ローレンツ変換に対してベクトルとして振る舞う:  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ .
- **固有時間**  $d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2} dt = \frac{1}{\gamma(v)} dt$  ( $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ ): 粒子の静止系で計った (粒子にくっついて運動している時計で計った) 時間。定義によりスカラー量として振る舞う。
- **4元速度**  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(v)(c, \mathbf{v})$ : ベクトルとして振る舞う。
- **静止質量**  $m_0$ : 粒子の静止時に (粒子の静止系で) 計った質量。定義によりスカラーとなる。
- **4元運動量**  $p^\mu = m_0 u^\mu = m_0 \gamma(v)(c, \mathbf{v}) \equiv \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right)$ : ベクトルとして振る舞う。  
 $E = m_0 \gamma(v) c^2 = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2 c^2}$  は粒子のエネルギー、 $\mathbf{p} = m_0 \gamma(v) \mathbf{v}$  は運動量。  
力がかかっていない場合 ( $F^\mu = 0$ )、 $E, \mathbf{p}$  は保存量となる。
- **4元力**  $F^\mu = \gamma(v) \left( \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{F} \right)$ : 3次元運動量の時間変化 ( $\frac{d}{dt}$ ) を3次元力  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$  と定義した。運動方程式 (10.1) からわかる通り、 $\frac{1}{\gamma(v)} F^\mu$  の各成分が  $E, \mathbf{p}$  の時間変化率 ( $\frac{d}{dt}$ ) となっている:

$$\frac{d}{dt} E = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}. \quad (10.2)$$

なお、 $F^\mu$  の時間成分  $F^0$  の表式は、式 (10.2) の  $\frac{dE}{dt}$  の式の左辺を計算すると得られる:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{(m_0 c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2 c^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} c^2}{E} = \frac{m_0 \gamma(v) \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} c^2}{m_0 \gamma(v) c^2} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}. \quad (10.3)$$

### 10.2 $E, \mathbf{p}$ の性質

#### 10.2.1 静止質量の性質

前回の講義でも分裂する粒子の例を使って静止質量  $m_0$  が保存量ではないことを確認したが、少し別の例で改めて確認しておく。

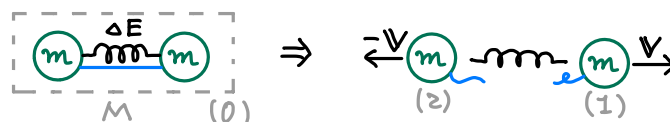


図 36: 自然長より縮んだばねを粒子 (静止質量  $m$ ) の間に挟み、粒子同士を紐でつなぐなどして固定しておく。その後、紐を切ればねを解放すると、粒子はエネルギーを受け取り速度  $\pm v$  を持つ。初期状態の系全体の静止質量  $M$  は、各粒子の静止質量の合計  $2m$  より縮んだばねの持つエネルギー  $\Delta E$  の分だけ増加する。

図 36 のように、二つの粒子 (静止質量:  $m$ ) をばねでつなぎ、自然長より短い状態で (粒子を紐をつなぐなどして) 固定しておく。その結果としてばねに  $\Delta E$  だけのエネルギーが蓄えられたとする<sup>44</sup>。この場合、この粒子とばねで構成される物体全体が持っているエネルギーは

$$E = 2mc^2 + \Delta E \equiv Mc^2. \quad (10.4)$$

ただし、物体系全体が静止していることから、物体系全体を一つの物体とみなしたときの静止質量  $M = 2m + \frac{\Delta E}{c^2}$  を定義した。今回の場合  $\Delta E = \frac{1}{2}k\Delta x^2 > 0$  なので、系全体の静止質量は個々の粒子の静止質量の和よりも大きくなる ( $M > 2m$ )。

ばね・粒子系の固定を外すとばねが伸びて粒子が飛散するが、その後の各粒子の静止質量は (当初の設定通り)  $m$  となる。なお、運動量保存則は

$$p_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu \quad \Leftrightarrow \quad (Mc, 0) = \gamma(v)(mc, \mathbf{v}) + \gamma(v)(mc, -\mathbf{v}) \quad (10.5)$$

と与えられ、固定解除前・解除後で全エネルギー  $E = Mc^2 = 2\gamma(v)mc^2$  自体は保存している<sup>45</sup>。

この例で示されるように、静止質量は必ずしも物体の構成要素固有の量というわけではなく、**内部エネルギーも質量に寄与する**。この現象は以下のような例でも現れる。

- **核分裂と質量欠損:** 上記の例では粒子とばねの系を考えたが、核分裂する原子核でも本質的には同じことが起こっている。原子核内部で働く相互作用が上記の例におけるばねと紐の役割を果たし、それが蓄えていたエネルギーが核分裂の際に解放される。このエネルギーの分、分裂前と比べて分裂後の原子核の総静止質量は減少している。
- 容器に入った気体を加熱すると内部エネルギーが増大するが、その場合気体の静止質量も増大し、その増分は  $\Delta M = \Delta E/c^2$  となる。
- 互いに引力を及ぼす粒子対 ( $e^-e^+$  対、星のペアなど) があつた場合、粒子が近づいた方が引力によるポテンシャルエネルギーが減少する。この場合、個々の粒子の静止質量の合計より、粒子が近づいて結合状態をなしたときの静止質量は結合エネルギー ( $< 0$ ) の分だけ少なくなる。

### 10.2.2 静止質量がゼロの粒子

- **光の静止質量はゼロ:** 静止質量  $m_0$ 、速度  $\mathbf{v}$  の粒子の  $E, \mathbf{p}$  は

$$E = m_0\gamma(v)c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} = \sqrt{(m_0c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2 c^2}, \quad \mathbf{p} = m_0\gamma(v)\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}}. \quad (10.6)$$

光は速度  $\mathbf{v} = c$  を持つが、この場合  $E, \mathbf{p}$  の分母  $\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}$  はゼロとなつてしまい、一見  $E, \mathbf{p}$  は発散してしまうように見える。実は、**光の静止質量はゼロ** ( $m_0 = 0$ ) であり、そのおかげで  $\mathbf{p}$  も分子・分母が両方ゼロとなることによって有限値にとどまる。

$m_0 = 0$  の場合、光のエネルギーは  $E = |\mathbf{p}|c$  となる。量子論などで光子のエネルギーと運動量が  $E = pc = h\nu$  となることが知られているが、それと同じ結果である。

<sup>44</sup>本文中の議論では  $\Delta E$  の具体的表式は特に必要ないが、例えばばね定数  $k$ 、自然長からの縮みが  $\Delta x$  ならば  $\Delta E \sim \frac{1}{2}k\Delta x^2$  となる。実際にはばねの静止質量に対応するエネルギーも入ってきて、こちらはばねを解放した後も残る。本文中の議論ではばねの静止質量エネルギーを無視している。

<sup>45</sup>エネルギー保存則 (式 (10.5) の  $\mu = 0$  成分) から固定解除後の粒子の速度を求めると

$$Mc^2 = 2mc^2 + \Delta E = 2\gamma(v)mc^2 = 2mc^2\sqrt{1 + \frac{|\mathbf{V}|^2}{c^2}} \quad \therefore \quad |\mathbf{v}|^2 = \frac{\Delta E}{m} + c^2 \left( \frac{\Delta E}{2mc^2} \right)^2$$

となる。右辺第 1 項の寄与 ( $|\mathbf{v}|^2 = \frac{\Delta E}{m}$ ) がニュートン力学における粒子速度に相当する。

- **静止質量がゼロ**  $\rightarrow |\mathbf{v}| = c$  : 逆に、光のように静止質量  $m_0$  がゼロの粒子があったとすると、式 (10.6) からして  $|\mathbf{v}| < c$  である限り  $E = 0 = \mathbf{p}$  となって粒子そのものが消えてしまう。 $E, \mathbf{p}$  がゼロではない値を取るのは、 $|\mathbf{v}| = c$  となって  $E, \mathbf{p}$  の分子・分母が両方ゼロになる時に限られる。端的に言うと**静止質量  $m_0$  がゼロの粒子は常に光速で運動する**ということになり、これを静止させることはできない。
- **超相対論的極限**  $|\mathbf{v}| \rightarrow c$  : 粒子の質量がゼロではない場合、 $|\mathbf{v}| \rightarrow c$  の極限で粒子の  $E, \mathbf{p}$  はともに発散する。これは、**質量を持つ粒子を有限のエネルギーで加速しても光速には到達しない**ことを意味する。この極限で  $E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + |\mathbf{p}|^2 c^2} \sim |\mathbf{p}|c$  となり、光の場合と同じ  $E, \mathbf{p}$  の関係式が近似的に成立する。この極限では質量エネルギー  $m_0 c^2$  が運動量の寄与  $|\mathbf{p}|c$  と比べて無視でき、近似的に質量がゼロの粒子のように振る舞うため。

### 10.2.3 等加速度運動

相対論的な運動方程式 (10.1) の解の簡単な例として、相対論的な等加速度運動を調べてみる。図 37a のように  $x$  方向に運動するロケットを考えて、ロケットの乗客から見てロケットは常に加速度  $a$  で運動し続けているものとする。この時に、静止系から見るとどのような運動に見えるかを考えてみる。

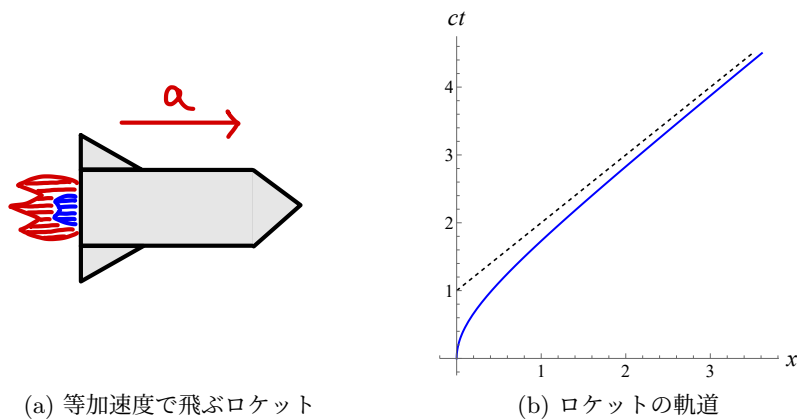


図 37: 等加速度で飛ぶロケットと、その軌道の時空図。ただし図 (b) では  $c = 1, a = 1$  とした

「ロケットの乗客から見てロケットが加速度  $a$  で運動する」という状況を式で表すには以下のように考えるとよい。今回の場合ロケットの速度は時々刻々変化するが、ある時刻  $t = t_*$  の瞬間に注目することにして、その瞬間にロケットが止まって見えるような慣性系を取ることはできる。つまり、その瞬間にロケットの速度が  $\mathbf{v}(t_*)$  となる場合、一定の速度  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t_*)$  で運動し続けている慣性系を別途用意しておく、時刻  $t = t_*$  にその慣性系から見てロケットは一瞬静止して見える。この場合、ロケットの速度が十分遅い ( $c \gg v = 0$ ) ためにニュートン力学の運動方程式がそのまま成立する：

$$\frac{d}{dt} m_0 \mathbf{v}(t) = \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m_0} . \quad (10.7)$$

右の式の右辺  $\mathbf{F}/m_0$  がロケットの静止系で見たロケットの加速度となるが、この  $x$  成分が一定値  $a$  となる場合、すなわち  $\mathbf{F} = (m_0 a, 0, 0)$  となるのが「ロケットの乗客から見てロケットが加速度  $a$  で運動する」場合に相当する。これに対応する 4 元力  $F^\mu = \gamma(v)(\frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{F})$  は ( $y, z$  部分は省略する)

$$F^\mu = (F^t, F^x) = (0, m_0 a) \quad (10.8)$$

と与えられる<sup>46</sup>。これを元の系（ロケットが速度  $v(t)$  で運動して見える系）に戻すと

$$F^\mu = \gamma(v) \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ m_0 a \end{pmatrix} = m_0 a \gamma(v) \begin{pmatrix} v/c \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10.9)$$

この4元力  $F^\mu$  に対する式(10.1)の解を求めればよい。

式(10.1)を時間座標  $t$  を用いて書き換えると

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma(v) \frac{dp^\mu}{dt} = F^\mu \Leftrightarrow \frac{dp^\mu}{dt} = \frac{1}{\gamma(v)} F^\mu = \left( \frac{m_0 a v(t)}{c}, m_0 a \right). \quad (10.10)$$

この式の  $x$  成分  $\frac{dp^x}{dt} = m_0 a$  から直ちに  $p^x = m_0 a t$  とわかる。ただし、初期時刻  $t = 0$  で粒子は静止しているとした。この式からさらに

$$p^x = m_0 \gamma(v) v = \frac{m_0 v(t)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}} = m_0 a t \quad \therefore v(t) = \frac{a t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a t}{c}\right)^2}}. \quad (10.11)$$

この  $v(t)$  に対しては  $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{a t}{c}\right)^2}$  となる。粒子の位置は、 $v = dx/dt$  を積分して

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \frac{a t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a t}{c}\right)^2}} dt = \frac{c^2}{2a} \int \frac{d\left[\left(\frac{a t}{c}\right)^2\right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{a t}{c}\right)^2}} = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{a t}{c}\right)^2}. \quad (10.12)$$

ただし、初期時刻  $t = 0$  におけるロケットの位置を  $x = 0$  とした。この軌道を時空図上に書いたのが図37bである。

- $v(t) < c$ : この運動の特徴の一つは、 $v(t)$  の式(10.11)からもわかる通り、ロケットの静止系から見て一定の力  $F = m_0 a$  で加速し続けているにもかかわらず速度は  $v(t) = a t / \sqrt{1 + (a t / c)^2} \rightarrow c$  と光速  $c$  で頭打ちになる点である。6.1節でも解説した**物体の速度  $v$  は光速  $c$  を越えない**という事実と対応している。
- **相対論的質量  $m_0 \gamma(v)$** : 光速に近づくにつれて速度  $v$  の増大が止まってしまう理由は、式(10.10)を少し書き換えた式

$$\frac{dp^x}{dt} = \frac{d}{dt} (m_0 \gamma(v) v) = m_0 a \quad (10.13)$$

の中で、静止質量  $m_0$  にかかっている係数  $\gamma(v)$  が  $v \rightarrow c$  となるにつれて無限に増大し、その分  $v$  の増加が小さくなってしまいうためである。この式をニュートン力学における運動方程式と見比べると、**粒子の質量が  $m_0 \gamma(v)$  となり、 $v \rightarrow c$  となるにつれて質量  $m_0 \gamma(v)$  が増大するために粒子が加速しにくくなった**と解釈できなくもない。このことを以って  $m_0 \gamma(v)$  のことを**相対論的質量**と呼ぶこともある<sup>47</sup>。

相対論的なエネルギーの式  $E = m_0 \gamma(v) c^2$  にもこの相対論的質量は現れるが、有名な公式  $E = m c^2$  はこの式のこと、および静止質量エネルギーの式  $E = m_0 c^2$  のことを指したものと解釈できる。

<sup>46</sup>この  $F^\mu$  の表式は4元加速度  $a^\mu \equiv du^\mu/d\tau$  を用いて求めることもできる。運動方程式(10.1)は  $m_0 a^\mu = F^\mu$  と書かれるが、これと式(10.9)を用いて4元加速度の2乗  $a^\mu a_\mu$  を計算すると

$$a^\mu a_\mu = \frac{1}{m_0^2} F^\mu F_\mu = \frac{1}{m_0^2} (m_0 a \gamma(v))^2 \left( -\frac{v^2}{c^2} + 1 \right) = a^2$$

と定数  $a^2$  になることが分かる。 $a^\mu a_\mu$  はスカラーなのでどの慣性系で評価しても同じ値となる。ロケットの静止系でも同様で、かつこの静止系では  $a^\mu = (0, dv/dt)$ ,  $a^\mu a_\mu = |dv/dt|^2$  となることから  $dv/dt = a$ ,  $F^x = m_0 dv/dt = m_0 a$  と求まる。また、 $a^\mu a_\mu = a^2$  が時間に依らない定数となることが、この運動がロケットの乗客にとっての等加速度運動であることと対応している。

<sup>47</sup>ニュートン力学における質量  $m$  を相対論的質量  $m_0 \gamma(v)$  に単純に置き換えれば常に相対論的力学の結果が再現されるというわけでもない。相対論における運動方程式(10.1)はもちろん常に成立するので、実際に問題を解く際や物理的考察を行う際は素直にこの式を使うことにして、相対論的質量をわざわざ用いるのは避けたほうが混乱しなくて済む。

### 10.3 最小作用の原理による導出

ニュートン力学における運動方程式が最小作用の原理から求められたのと同様に、相対論的力学における運動方程式 (10.1) もそれに対応する作用積分から導出することができる。今後の解説のためにも導入しておく。

ニュートン力学における質量  $m$  の粒子の運動経路が  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  と与えられるとき、それに対応する作用積分  $S$  は

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int (K(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - V(\mathbf{x})) dt, \quad K(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}|^2. \quad (10.14)$$

$K, V$  はそれぞれ粒子の運動エネルギーとポテンシャルエネルギー、 $L = K - V$  は点粒子のラグランジアンであり、どれも粒子の軌道  $\mathbf{x}(t)$  の汎関数である。この作用  $S$  が変分に対して極小値をとる、という最小作用の原理から運動方程式であるオイラー・ラグランジュ方程式を求めることができる。粒子の経路を  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$  とずらした際の作用 (10.14) の変分は

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}|^2 - V(\mathbf{x}) \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( m \dot{\mathbf{x}} \cdot (\delta \dot{\mathbf{x}}) - \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left( -m \ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} - \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} \right) dt + \underbrace{[m \dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x}]_{t_0}^{t_1}}_{=0} = - \int_{t_0}^{t_1} \left( m \ddot{\mathbf{x}} + \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right) \cdot \delta \mathbf{x} dt. \end{aligned} \quad (10.15)$$

ただし、積分区間の両端  $t = t_0, t_1$  で  $\delta\mathbf{x} = 0$  という境界条件を使って表面項  $[m \dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x}]_{t_0}^{t_1}$  をゼロとおいた。任意の変分  $\delta\mathbf{x}$  に対して作用  $S$  が極値を取るためには、式 (10.15) の最右辺のかっこの中身が恒等的にゼロである必要がある。すなわち

$$m \ddot{\mathbf{x}} + \frac{dV(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = 0 \quad (10.16)$$

となるが、これが式 (10.14) に対するオイラー・ラグランジュ方程式であり、ニュートン力学における運動方程式となっている。また、粒子のエネルギーに相当するハミルトニアン  $H$  は

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L = m |\dot{\mathbf{x}}|^2 - \left( \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}|^2 - V(\mathbf{x}) \right) = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}|^2 + V(\mathbf{x}). \quad (10.17)$$

相対論で同様の運動方程式の導出を行うためには、まずラグランジアンを用意する必要がある。相対論における運動方程式はローレンツ変換に対して共変である必要があるが、そのためには**作用  $S$  はローレンツ変換で不変**、すなわち  **$S$  はローレンツ変換に対するスカラー**でなければならない<sup>48</sup>。相対論において運動する粒子の軌道の特徴づけるスカラー量としては、粒子の静止質量  $m_0$  や粒子の経路に沿って測った固有時間  $d\tau = \sqrt{1 - |\dot{\mathbf{x}}(t)/c|^2} dt$  が挙げられる<sup>49</sup>。そこで、作用積分  $S$  を以下のように取ってみる<sup>50</sup>：

$$S = - \int_{t_0}^{t_1} m_0 c^2 d\tau(t) = -m_0 c^2 \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2} dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (10.18)$$

実際、非相対論的極限  $\frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2 \rightarrow 0$  で、上式で定義されるラグランジアン  $L$  は

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2} = -m_0 c^2 + \frac{m_0 c^2}{2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2 + \dots \quad (10.19)$$

<sup>48</sup> ニュートンの運動方程式 (10.16) は回転変換およびガリレイ変換に対して共変ないし不変だが、この性質の起源は作用積分 (10.14) もそれらの変換に対して不変であったことである。同様に、ローレンツ変換に対して共変的な運動方程式を得たい場合は、ローレンツ変換に対して不変、すなわちスカラーとして振る舞う作用を用意すればよい。

<sup>49</sup> 他にも 4 元速度の 2 乗  $u^\mu u_\mu$  も考えられるが、これは単に粒子の軌道に依存しない定数 ( $u^\mu u_\mu = -c^2$ ) となる。

<sup>50</sup>  $d\tau$  の係数  $m_0 c^2$  は、作用  $S$  が無次元量となるように決めたものである。

となり、右辺第二項がニュートン力学の作用 (10.14) でポテンシャルをゼロ ( $V(\mathbf{x}) = 0$ ) としたものと同じである。右辺第 1 項は定数なので運動方程式には寄与しない。

式 (10.18) で与えられる作用について変分を取り、最小作用の原理を適用すると

$$0 = \delta S = -m_0 c^2 \int_{t_0}^{t_1} \delta \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2} dt = -m_0 c^2 \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{-\frac{1}{c^2} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \cdot \frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right|^2}} \right) dt \quad (10.20)$$

$$\simeq -m_0 c^2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c^2} \gamma(v) \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right) \cdot \delta\mathbf{x}(t) dt = -m_0 \int_{t_0}^{t_1} \frac{d(\gamma(v)\mathbf{v}(t))}{dt} \cdot \delta\mathbf{x}(t) dt .$$

ただし、2 行目の最初の等号 ( $\simeq$ ) では部分積分を行い、全微分項を積分して生じる表面項をゼロとおいた。この式が任意の変分  $\delta\mathbf{x}(t)$  に対して成立するためには

$$m_0 \frac{d(\gamma(v)\mathbf{v}(t))}{dt} = 0 \quad (10.21)$$

が要請される。この式は相対論的運動方程式 (10.1) の空間成分  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$  ( $\mathbf{p} = m_0 \gamma(v)\mathbf{v}$ ) で右辺の 4 元力ベクトル  $F^\mu$  をゼロとした場合に相当する<sup>51,52</sup>。以上より、ラグランジアン  $L$  および作用積分  $S$  として式 (10.18) を取れば、相対論的運動方程式 (10.1) が最小作用原理より正しく導出されることが分かった。

ラグランジアン (10.18) から運動量  $\mathbf{p}$  を求めると

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \left( -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} |\dot{\mathbf{x}}|^2} \right) = m_0 c^2 \frac{\frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} |\dot{\mathbf{x}}|^2}} = m_0 \gamma(v) \dot{\mathbf{x}} . \quad (10.24)$$

これを用いてラグランジアン (10.18) に対応するハミルトニアン  $H$  を求めると

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L = m_0 \gamma(v) \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} |\dot{\mathbf{x}}|^2} = m_0 \frac{|\dot{\mathbf{x}}|^2 + c^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} |\dot{\mathbf{x}}|^2\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} |\dot{\mathbf{x}}|^2}} = m_0 \gamma(v) c^2 . \quad (10.25)$$

式 (10.24) の  $\mathbf{p}$ 、式 (10.25) の  $E$  は、それぞれ相対論的運動量  $p^\mu$  の空間部分、相対論的エネルギー  $E = m_0 \gamma(v) c^2$  と一致している。

<sup>51</sup>ポテンシャル項などのような、粒子と相互作用する物質や場の作用を式 (10.18) の作用に加えれば、 $F^\mu \neq 0$  となる運動方程式も導出できる。

<sup>52</sup>4 元ベクトルで書かれた方程式 (10.1) (で  $F^\mu = 0$  としたもの) を直接得るためには、作用を

$$S = m_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} u^\mu u_\mu d\tau = m_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} d\tau \quad (10.22)$$

と書きなおして、4 次元的な軌道  $x^\mu(\tau)$  についての変分  $\delta S$  をゼロとおく式を導出すればよい：

$$0 = \delta S = 2m_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\delta x_\mu}{d\tau} d\tau \simeq -2m_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \delta x_\mu d\tau \quad \therefore \quad m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{dp^\mu}{d\tau} = 0 . \quad (10.23)$$

ただし、 $p^\mu = m_0 u^\mu = m_0 dx^\mu / d\tau$  であることを用いた。