学籍番号	氏名

常微分方程式 演習 [2019年度後期 月曜1限]　第6回 (11/18(月))

(1) $y(x)$ の微分方程式 $y'' - 2y' + 5y = 0$ —(∗) について、以下の問題を解け。

(a) 方程式 (∗) の一般解を求めよ。

(b) 方程式 (∗) の解で、境界条件 $y(\pi) = 2,\ y'(\pi) = 0$ を満たすものを求めよ。

(c) 方程式 (∗) の解で、境界条件 $y(0) = 3,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ を満たすものを求めよ。

(a) 解の形を $y=e^{\lambda x}$ と仮定して(∗)に代入し、特性方程式を求めると

$\lambda^2-2\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda = 1\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-20} = 1\pm 2i$

従って、(∗)の一般解は $y(x)=e^{x}(C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x))$

(C_1, C_2:定数)

(b) $y(\pi)=e^{\pi}(C_1\cos(2\pi)+C_2\sin(2\pi)) = e^{\pi}\times C_1 = 2$

$y'(\pi)=\frac{d}{dx}\left[e^x(C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x))\right]\Big|_{x=\pi}$

$= e^x(C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)) + e^x(-2C_1\sin(2x)+2C_2\cos(2x))\Big|_{x=\pi}$

$= e^{\pi}C_1+2e^{\pi}C_2 = 0$　∴ $C_1=2e^{-\pi},\ C_2=-\frac{1}{2}C_1=-e^{-\pi}$

∴ $y(x)=e^x(2e^{-\pi}\cos(2x)-e^{-\pi}\sin(2x))$

(c) $y(0)=e^0(C_1\cos 0+C_2\sin 0) = C_1 = 3$　∴ $C_1=3$

$y(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{\pi}{4}}(C_1\cos\frac{\pi}{2}+C_2\sin\frac{\pi}{2}) = C_2e^{\frac{\pi}{4}} = -1$　∴ $C_2=-e^{-\frac{\pi}{4}}$

∴ $y(x)=e^x(3\cos(2x)-e^{-\frac{\pi}{4}}\sin(2x))$

(2) $y(x)$ の微分方程式 $y'' + 4y' + 3y = 5e^{2x}$ —(∗) について、以下の問題を解け。

(a) 特解の形を $y(x) = C\,e^{2x}$ (C: 定数) と仮定して式 (∗) に代入し、C の値を求めることで、式 (∗) の特解を求めよ。

(b) 式 (∗) に対応する斉次方程式 $y'' + 4y' + 3y = 0$ の一般解を求めよ。

(c) (a), (b) の結果をもとに、方程式 (∗) の一般解を求めよ。

(a) $y(x)=C e^{2x}$ を(∗)に代入すると

$(Ce^{2x})''+4(Ce^{2x})'+3Ce^{2x} = 4Ce^{2x}+4\cdot 2Ce^{2x}+3Ce^{2x}$

$=15Ce^{2x} = 5e^{2x}$　∴ $C=\frac{1}{3}$

∴ $y(x)=\frac{1}{3}e^{2x}$.

(b) $y''+4y'+3=0$ の特性方程式を解くと

$\lambda^2+4\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=-1,-3$

∴ (∗)の一般解は $y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$　(C_1, C_2:定数)

(c) (∗)の一般解は、(∗)の特解と、(∗)に対応する斉次方程式の解とを足し合わせることで得られる。

∴ $y(x)=\frac{1}{3}e^{2x}+C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$　(C_1, C_2:定数)