学籍番号	氏名

常微分方程式 演習 [2019年度後期 月曜1限]　第4回 (10/28(月))

(1) 微分方程式 $(*)$: $y' - y = \dfrac{4}{y}$ の一般解を次の手順で求めよ。

(a) $(*) \Leftrightarrow y\,y' - y^2 = 4$ $(**)$ と変形し、新変数 u を適切に定義して、$(**)$ を u の線形方程式に書き換えよ。

(b) (a) で得た $u(x)$ の斉次方程式の一般解を、定数変化法などで求めよ。

(c) 得られた解をもとに、解 $y(x)$ の表式を書き下せ。$y(x)$ が複数存在する場合にはその全てを書くこと。

(a) $u = y^2$ と定義する. $u' = \dfrac{dy^2}{dx} = 2yy'$ より $yy' - y^2 = 4 \Leftrightarrow \underline{\dfrac{u'}{2} - u = 4}$.

(b) $u' - 2u = 8$ —① を解く.

$u' - 2u = 0$ の一般解は $u = Ce^{2x}$ (C: 定数)

$u = C(x)e^{2x}$ として ① に代入すると

$(Ce^{2x})' - 2Ce^{2x} = C'e^{2x} + 2Ce^{2x} - 2Ce^{2x} = C'e^{2x} = 8$

∴ $C'(x) = 8e^{-2x} \Rightarrow C(x) = -4e^{-2x} + \hat{C}$ ($\hat{C}$: 定数)

∴ ① の一般解は $u = C(x)e^{2x} = (-4e^{-2x} + \hat{C})e^{2x} = \hat{C}e^{2x} - 4$ ($\hat{C}$: 定数)

(c) $u = y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{u} = \pm\sqrt{\hat{C}e^{2x} - 4}$ ($\hat{C}$: 定数)

(2) $y''(x) = -2y(x)$ の一般解を求めよ。

$y = C_1\sin(\sqrt{2}x) + C_2\cos(\sqrt{2}x)$ (C_1, C_2: 定数)

(3) 初期値問題 $y''(x) = 3y(x)\,, y(0) = 1, y'(0) = -2$ の解を求めよ。

$y'' = 3y$ の一般解は $y = C_1e^{\sqrt{3}x} + C_2e^{-\sqrt{3}x}$ (C_1, C_2: 定数)

初期条件を $x=0$ で課すと

$y(0) = C_1e^{\sqrt{3}x} + C_2e^{-\sqrt{3}x}\big|_{x=0} = C_1 + C_2 = 1$

$y'(0) = \sqrt{3}(C_1e^{\sqrt{3}x} - C_2e^{-\sqrt{3}x})\big|_{x=0} = \sqrt{3}(C_1 - C_2) = -2$

∴ $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$ ∴ $C_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $C_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\boxed{y = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)e^{\sqrt{3}x} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)e^{-\sqrt{3}x}}$