学籍番号	氏名

常微分方程式 演習 [2019年度後期 月曜1限]　第3回 (10/21(月))

(1) 微分方程式 $(*)$: $y' - y = 4$ を次の手順で解け。

(a) 斉次方程式 $y' - y = 0$ の一般解を求めよ。

(b) 斉次方程式の一般解について、その積分定数 C を x の関数 $C(x)$ に置き換えたものを式 $(*)$ に代入し、$C(x)$ の微分方程式を求めよ。

(c) $C(x)$ の一般解を求めて斉次解に代入し、式 $(*)$ の一般解を求めよ。

(a) $y' - y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = d(\log y) = 1 \Leftrightarrow \log y = x + \tilde{c} \Leftrightarrow y = ce^{x}$ ($c = e^{\tilde{c}}$: 定数)

(b) $y = C(x)e^{x}$ を $y' - y = 4$ に代入すると

$y' - y = [C(x)e^{x}]' - C(x)e^{x} = C'(x)e^{x} + C(x)e^{x} - C(x)e^{x} = C'(x)e^{x} = 4$.

$\therefore C' = 4e^{-x}$ — ①

(c) ① を x 積分して $C = \int 4e^{-x}dx = -4e^{-x} + \hat{C}$ ($\hat{C}$: 定数)

この $C(x)$ を斉次解に代入して、元の方程式 $(*)$ の一般解が

$y(x) = C(x)e^{x} = (-4e^{-x} + \hat{C})e^{x} = \underline{-4 + \hat{C}e^{x}}$ ($\hat{C}$: 定数)

と求まる。

(2) 微分方程式 $(**)$: $y' - xy = x$ を次の手順で解け。

(a) 斉次方程式 $y' - xy = 0$ の一般解を求めよ。

(b) (a) の一般解は $y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ で与えられる。この解について、積分定数 C を x の関数 $C(x)$ に置き換えたものを式 $(**)$ に代入し、$C(x)$ の微分方程式を求めよ。

(c) $C(x)$ の一般解を求めて斉次解に代入し、式 $(**)$ の一般解を求めよ。

(a) 変数分離法. $y' - xy = \frac{dy}{dx} - xy = 0 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx + \tilde{c}$

$\Leftrightarrow \log y = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{c} \Leftrightarrow y = c\,e^{\frac{1}{2}x^2}$ ($c = e^{\tilde{c}}$: 定数)

(b) $y = C(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$ を $(**)$ に代入すると

$y' - xy = [C(x)e^{\frac{1}{2}x^2}]' - xC(x)e^{\frac{1}{2}x^2} = C'e^{\frac{1}{2}x^2} + \cancel{C \cdot x e^{\frac{1}{2}x^2}} - \cancel{xCe^{\frac{1}{2}x^2}} = C'e^{\frac{1}{2}x^2} = x$

$\therefore C'(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$

(c) $z = x^2$ とおくと、$dz = 2x\,dx \therefore dx = \frac{1}{2x}dz$ より

$C(x) = \int xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \int xe^{-\frac{1}{2}z}\frac{1}{2x}dz = \frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{2}z}dz = -e^{-\frac{1}{2}z} + \hat{C}$

$= -e^{-\frac{1}{2}x^2} + \hat{C}$.

よって $(**)$ の一般解は $y(x) = C(x)e^{+\frac{1}{2}x^2} = (-e^{-\frac{1}{2}x^2} + \hat{C})e^{\frac{1}{2}x^2}$

$= -1 + \hat{C}e^{\frac{1}{2}x^2}$ ($\hat{C}$: 定数)