学籍番号	氏名

常微分方程式 演習 [2019年度後期 月曜1限]　第2回 (10/16(水))

(1) 微分方程式 $-\frac{1}{y}dx + \frac{x}{y^2}dy = 0$ を次の手順で解け。

(a) 微分方程式が $du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$ と表せると仮定して、$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}$ (可積分条件) が満たされるかどうかをチェックせよ。

(b) 可積分条件が満たされるなら、関数 $u(x,y)$ が存在して微分方程式を $du(x,y) = 0$ の形に書き表せる。関数 $u(x,y)$ を求めて、微分方程式の解を書き下せ。

(a) $-\frac{1}{y}dx + \frac{x}{y^2}dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$ より $\left.\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y^2} \end{cases}\right\}$ —(*)

よって $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ が確かに満たされている。

(b) (*)第1式より $u = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx = -\int \frac{1}{y}dx = -\frac{x}{y} + C(y)$.

これが(*)第2式を満たすことから $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{x}{y} + C(y)\right] = +\frac{x}{y^2} + \frac{dC(y)}{dy} = \frac{x}{y^2}$

$\therefore \frac{dC(y)}{dy} = 0 \Leftrightarrow C(y) = C$ (定数) $\Rightarrow u = -\frac{x}{y} + C$ (C:定数)

微分方程式 $du = 0$ の解は $u =$ (定数) で与えられるので

$\frac{x}{y} = \tilde{C} \Leftrightarrow y = \hat{C}x$ ($\hat{C} = \frac{1}{\tilde{C}}$:定数) が解となる。

(2) 微分方程式 $\sin y\, dx + \cos y\, dy = 0$ を次の手順で解け。

(a) 積分因子が x だけの関数 $F(x)$ で与えられると仮定し、方程式 $F(x)\sin y dx + F(x)\cos y dy = 0$ が可積分条件 $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}$ を満たすように $F(x)$ の関数形を定めよ。

(b) 積分因子 $F(x)$ を用いて微分方程式の解を求めよ。解は陰関数表示でよい。

(a) 仮定 $F(x)\sin y dx + F(x)\cos y dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$ より

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = F(x)\sin y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[F(x)\sin y\right] = F(x)\cos y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = F(x)\cos y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(x)\cos y\right] = F'(x)\cos y \end{cases}$

従って、可積分条件 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ より $F(x)\cancel{\cos y} = F'(x)\cancel{\cos y}$

この方程式の一般解は $\underline{F(x) = Ce^x}$ (C:定数) で与えられる。

(b) $C = 1$, $F(x) = e^x$ とすると

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = F(x)\sin y = e^x \sin y \Rightarrow u = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx = e^x \sin y + C(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = F(x)\cos y = e^x \cos y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + \frac{dC(y)}{dy} = e^x \cos y \quad \therefore \frac{dC(y)}{dy} = 0. \end{cases}$

よって C は定数であり、微分方程式の解は $\underline{e^x \sin y = \tilde{C}}$ ($\tilde{C}$:定数) となる。