学籍番号	氏名

常微分方程式 演習 [2019年度後期 月曜1限]　第14回 (1/20(月))

問題を解くにあたり、次の結果は用いてよい。

$$\mathcal{L}\left[1\right]=\frac{1}{s},\quad \mathcal{L}\left[t\right]=\frac{1}{s^2},\quad \mathcal{L}\left[e^{at}\right]=\frac{1}{s-a},\quad \mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\quad \mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\right]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

(1) $\mathcal{L}[\delta(t)]=1$ を用いて、初期値問題 $y''-3y'+2y=\delta(t),\ y(0)=y'(0)=0$ を解け。

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=\delta(t) \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow (s^2-3s+2)Y(s)=1 \Leftrightarrow Y(s)=\frac{1}{s^2-3s+2}=\frac{1}{(s-1)(s-2)}.$$

$Y(s)$ を部分分数分解すると $Y(s)=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}$.

従って、元の方程式の解 $y(t)$ は

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]=\underline{e^{2t}-e^{t}}.$$

(2) $\mathcal{L}[\delta(t-3)]=e^{-3s}$ を用いて、初期値問題 $y''-3y'+2y=\delta(t-3),\ y(0)=y'(0)=0$ を解け。
(1) の結果と、第二移動定理 $\mathcal{L}\left[\theta(t-a)f(t-a)\right]=e^{-as}\mathcal{L}[f(t)]$ を用いてよい。

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=\delta(t-3) \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow (s^2-3s+2)Y(s)=e^{-3s} \Leftrightarrow Y(s)=\frac{e^{-3s}}{(s-1)(s-2)}.$$

この $Y(s)$ について、(1) の結果より $\frac{1}{(s-1)(s-2)}=\mathcal{L}[e^{2t}-e^{t}]$ である。

従って、$Y(s)$ に第二移動定理を適用すると

$$\begin{aligned} Y(s)=\frac{e^{-3s}}{(s-1)(s-2)}=e^{-3s}\mathcal{L}[e^{2t}-e^{t}] &= \mathcal{L}\left[\theta(t-3)\left(e^{2t}-e^{t}\big|_{t\to t-3}\right)\right] \\ &= \mathcal{L}\left[\theta(t-3)\left(e^{2(t-3)}-e^{t-3}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\therefore\ y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\underline{\theta(t-3)\left(e^{2(t-3)}-e^{t-3}\right)}.$$

(3) $y_1(t),y_2(t)$ についての初期値問題 $y_1'=y_2+\delta(t),\ y_2'=-y_1,\ y_1(0)=y_2(0)=0$ を解け。

$$\begin{cases} y_1'=y_2+\delta(t) \\ y_2'=-y_1 \\ y_1(0)=y_2(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sY_1=Y_2+1 \\ sY_2=-Y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_1=+\frac{s}{s^2+1} \\ Y_2=-\frac{1}{s^2+1} \end{cases}.$$

$$\therefore\ y_1(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)]=\underline{\cos t},\quad y_2(t)=-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=\underline{-\sin t}.$$