学籍番号	氏名

常微分方程式 演習 [2019年度後期 月曜1限]　第11回 (12/23(月))

(1) ラプラス変換 $\mathcal{L}[e^{\alpha t}]$, $\mathcal{L}[e^{-\alpha t}]$ (α : 定数) をそれぞれ求めよ。

(2) $\sinh(\alpha t) = \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[\sinh(\alpha t)]$ を求めよ。
(ヒント: $\mathcal{L}$ の線型性を使えば $\mathcal{L}[\sinh(\alpha t)] = \mathcal{L}[\frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})] = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{\alpha t}] - \mathcal{L}[e^{-\alpha t}])$ と分解できる)

(3) ラプラス変換 $\mathcal{L}[\sinh(\alpha t)]$ が存在する s の範囲を示せ。
(ヒント: 全ての $t \geq 0$ について $|\sinh(\alpha t)| = \left|\frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})\right| \leq Me^{kt}$ を満たす定数 M, k が存在すれば、$\mathcal{L}[\sinh(\alpha t)]$ は $s > k$ の範囲で存在する。)

(1) $\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty \underbrace{e^{\alpha t} e^{-st}}_{= e^{(\alpha-s)t}} dt = \frac{1}{\alpha - s}\left[e^{(\alpha-s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha-s}\left[\underbrace{\left(\lim_{t\to\infty} e^{(\alpha-s)t}\right)}_{= 0\ (\alpha - s > 0 \text{のとき})} - \underbrace{e^{(\alpha-s)\times 0}}_{= e^0 = 1}\right]$

$= -\frac{1}{\alpha - s} = \frac{1}{s-\alpha}$ （ただし $s > \alpha$）.

$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}]$ は $\mathcal{L}[e^{\alpha t}]$ で $\alpha \to -\alpha$ と置き換えれば得られる。 $\therefore \mathcal{L}[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{s+\alpha}$
（ただし $s > -\alpha$）.

(2) $\mathcal{L}[\sinh(\alpha t)] = \mathcal{L}[\frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})] = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{\alpha t}] - \mathcal{L}[e^{-\alpha t}])$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$.

(3) $|\sinh(\alpha t)| = \left|\frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})\right| \leqq M e^{kt}$ $(\forall t \geqq 0)$ を満たす定数 M, k が存在すれば、$\mathcal{L}[\sinh(\alpha t)]$ は $s > k$ の範囲で存在する。

(i) $\alpha > 0$ のとき
$t \geqq 0$ の範囲では $|\sinh(\alpha t)| = \sinh(\alpha t) = \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) < \frac{1}{2}e^{\alpha t}$
$\therefore$ $\mathcal{L}[\sinh(\alpha t)]$ は $s > \alpha$ の範囲で存在する。

(ii) $\alpha < 0$ のとき
$t \geqq 0$ のとき $|\sinh(\alpha t)| = -\sinh(\alpha t) = -\frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) < \frac{1}{2}e^{-\alpha t}$
$\therefore$ $\mathcal{L}[\sinh(\alpha t)]$ は $s > -\alpha$ の範囲で存在する。

(iii) $\alpha = 0$ のとき
$\sinh(\alpha t) = \sinh(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}[\sinh(\alpha t)] = \mathcal{L}[0] = 0$. s は任意でよい。

(4) ラプラス変換 $\mathcal{L}[e^{\beta t}\sinh(\alpha t)], \mathcal{L}[\theta(t-a)\sinh(\alpha(t-a))]$ ($a > 0, \alpha, \beta$: 定数) をそれぞれ求めよ。ラプラス変換の第1・第2移動定理を用いてよい。

$\mathcal{L}[\sinh(\alpha t)] = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$ は使う。

第1移動定理より $\mathcal{L}[e^{\beta t}\sinh(\alpha t)] = \mathcal{L}[\sinh(\alpha t)]\Big|_{s \to s-\beta} = \frac{\alpha}{(s-\beta)^2 - \alpha^2}$

第2移動定理より $\mathcal{L}[\theta(t-a)\sinh(\alpha(t-a))] = e^{-as}\mathcal{L}[\sinh(\alpha t)] = \frac{\alpha e^{-as}}{s^2 - \alpha^2}$