学籍番号	氏名

常微分方程式 演習 [2019年度後期 月曜1限]　第1回 (10/7)

関数 $y(x)$ についての以下の微分方程式を解け。

(1) $yy' + 25x = 0$ の一般解を求めよ。

$$y\frac{dy}{dx} = -25x$$

$$\int y\,dy = -\int 25x\,dx + \tilde{c} \quad (\tilde{c}：定数)$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{25}{2}x^2 + \tilde{c}$$

$$\therefore\ y = \pm\sqrt{-25x^2 + c} \quad (c = 2\tilde{c}\ は定数)$$

(2) 初期値問題 $xy' + y = 0,\ y(2) = -2$ を解け。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + \tilde{c} \quad (\tilde{c}：定数)$$

$$\log y = -\log x + \tilde{c}$$

$$\log xy = \tilde{c}$$

$$\therefore\ y = \frac{c}{x} \quad (c：定数)$$

$y(2) = \left.\frac{c}{x}\right|_{x=2} = \frac{c}{2} = -2$ より $c = -4$

$$\therefore\ y = -\frac{4}{x}.$$

(3) $\dfrac{y(x)}{x} = u(x)$ と置いて、初期値問題 $xy' = (y-x)^3 + y,\ y(1) = 3/2$ を解け。

$y(x) = x\,u(x) \quad \therefore\ y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\,u(x)\right) = u + x\frac{du}{dx}$

従って $xy' = (y-x)^3 + y$

$\Leftrightarrow x(u + xu') = (xu - x)^3 + ux = x^3(u-1)^3 + ux \Leftrightarrow \cancel{u} + xu' = x^2(u-1)^3 + \cancel{u}$

$\therefore\ \frac{u'}{(u-1)^3} = x \Leftrightarrow \int\frac{du}{(u-1)^3} = \int x\,dx + \tilde{c} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{(u-1)^2} = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{c}$

$\therefore\ u - 1 = \pm\frac{1}{\sqrt{c - x^2}} \Leftrightarrow y = x\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{c-x^2}}\right).$ [$u = y/x$ を代入した.]

(cは定数)

$y(1) = 1\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{c-1}}\right) = \frac{3}{2}$ より、$\pm$ を $+$ にとり, $c=5$ と選べばよい. $\therefore\ y = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}\right)$

(4) $y' = \dfrac{1 - 2y - 4x}{1 + y + 2x}$ の一般解を求めよ。

[ヒント： $y(x) + 2x = u(x)$ と置く。解は陰関数表示でよい。]

$y + 2x = u \Leftrightarrow y = u - 2x,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 2 = u' - 2.$

$\therefore\ y' = \frac{1 - 2y - 4x}{1 + y + 2x} \Leftrightarrow u' - 2 = \frac{1 - 2u}{1 + u} \Leftrightarrow \underset{\frac{du}{dx}}{\underset{\shortparallel}{u'}} = \frac{3}{1+u}$

$$\therefore\ \int (1+u)\,du = \int 3\,dx + c$$

$$\therefore\ u + \frac{1}{2}u^2 = 3x + c$$

$$\therefore\ y + 2x + \frac{1}{2}(y + 2x)^2 = 3x + c.$$