常微分方程式　講義ノート

棚橋典大

2019 年度後期 月曜 1 限

第 1 回　導入、一階常微分方程式の解法

[教科書 1.1 $\sim$ 1.3]

1.1　常微分方程式とは

- **常微分方程式：** 未知関数 $y(x)$ とその微分 $y'(x) \equiv \dfrac{dy}{dx}, y''(x) \equiv \dfrac{d^2y}{dx^2}, ...$ を含む方程式。関数の引数 x は独立変数と言う。 (t など、他の独立変数を用いることもある。)
  (偏微分方程式: 複数の独立変数に依存する関数 $f(x, y, \ldots)$ とその偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots$ を含む方程式)

- **常微分方程式の例**
  - **指数関数**
    $y(x) = Ce^{Ax}(C, A:$ 定数$)$ は、微分方程式 $y' = Ay$ の一般解である。
    指数関数がこの微分方程式の解になっていることは、指数関数を微分方程式に代入して確認してもよいし、以下のように微分方程式を直接解くことで示してもよい。

$$\frac{dy}{dx} = Ay \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log y(x) \tag{1.1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \log y(x) = \int \left[\frac{d}{dx}\log y(x)\right] dx = \int A dx = Ax + B \quad (B: \text{積分定数}) \tag{1.2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = e^{Ax+B} = e^B e^{Ax} = Ce^{Ax} \quad (C \equiv e^B) \tag{1.3}$$

  - **質点の運動**
    質量 m の粒子の時刻 t における位置を $x(t)$ とする。この粒子に一定の力 F がかかるとき、粒子の運動は運動方程式 $ma(t) = F$ $(a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ は粒子の加速度$)$ で定まる。$x(t)$ は、運動方程式を微分方程式として解くことで求められる。

$$F = ma(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = \int \left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] dt = \int \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m}t + C_1$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t) = \int \left[\frac{dx}{dt}\right] dt = \int \left(\frac{F}{m}t + C_1\right) dt = \frac{F}{2m}t^2 + C_1 t + C_2 \ .$$

    ただし、C_1, C_2 は積分定数。
    $t = 0$ のとき $x(t = 0) = C_2$ となることから、C_2 は初期位置に相当する。
    同様に、$\frac{dx}{dt}(t = 0) = C_1$ となることから、C_1 は初期速度に相当する。

– 単振動

ばね定数 k のばねに質量 m の質点がついているとき、質点の位置を $y(t)$ とすると

$$my'' + ky = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = C_1 \sin\left(\frac{k}{m}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{k}{m}t\right) \ .$$

ただし、C_1, C_2 は定数。

ばねの振動に限らず、微小振幅の振動 (振り子、音叉) の多くはこの単振動（調和振動）をすることが知られている。

上記の例に限らず、様々な自然現象は微分方程式で記述される (**自然現象のモデル化**) ため、微分方程式の解法も重要となっている。

- **ラプラス変換**

ある関数 $f(t)$ について、この関数のラプラス変換 $\mathcal{L}(f)$ を

$$\mathcal{L}(f) \equiv \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{1.4}$$

と定義する。

関数の微分をラプラス変換したものは、微分する前の関数をラプラス変換したもので表わせる。

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0) \ .$$

この性質を活用して、微分方程式を代数方程式に書き直して解くことが可能となる。**複雑な常微分方程式を機械的に解くためのツール**の一つとなっている。

1.2 この講義の目標と進め方

常微分方程式の解法と応用法をマスターすることが主な目標。そのために下記項目を学ぶ。

- 1 階常微分方程式
- 2 階線形常微分方程式
- 高階常微分方程式、連立微分方程式
- ラプラス変換

1.3 定義と用語

- **微分方程式の階数**

微分方程式に現れる**最高階の微分項の階数**をその微分方程式の階数と呼ぶ。

$$\text{一階微分方程式の例)} \quad y' + ay = b \qquad\qquad \text{二階微分方程式の例)} \quad y'' + ay' + by = c \tag{1.5}$$

- **線形・非線形**

未知関数 y とその微分 $y', y'', \ldots$ の**一次の項だけが方程式に現れる**とき、その微分方程式を**線形微分方程式**と呼ぶ。それ以外のものを**非線形微分方程式**と呼ぶ。

式 (1.5) の例はどちらも線形微分方程式である。$y' + ay^2 = b$ は非線形微分方程式の例。線形微分方程式の方がシンプルで、場合によっては一般的な解法が存在する。非線形微分方程式を解くためには特殊な手法が必要になるのが通例。

- 一般解・特殊解 (特解)

  一階微分方程式 $y'(x) = Ay(x)$ の全ての解は、任意定数 C を用いて

  $$y' = Ay \qquad \Rightarrow \qquad y = Ce^{Ax}$$

  と表せる。このように、任意定数を含む微分方程式の解を一般解と呼ぶ。

  C は任意でよいので、この微分方程式には無数に解が存在することになる。式 (1.3) で見たように、この任意定数の起源は積分定数である。

  初期条件など何らかの条件を課すと、任意定数が特定の値にセットされた解が得られる。これらは特殊解 (もしくは特解) と呼ばれる。

- 初期値問題

  一階微分方程式の解は、ある一点における関数の値を指定することで一意に定まる。

  $$\text{例)} \qquad Y'(x) = Ay(x), \quad y(0) = 3 \qquad \Rightarrow \qquad y = 3e^{Ax} \tag{1.6}$$

  この例では、初期地点 $x = 0$ における関数の値 $y(0)$ を 1 に固定することで、任意定数 C を 3 に固定している。このように、関数の初期値を指定して微分方程式を解く問題のことを初期値問題と呼ぶ。

  (この授業の後半で、ある領域の両端で境界条件を課して微分方程式を解く境界値問題を学ぶ。)

1.4 微分方程式の幾何学的意味

一階微分方程式を、以下の標準形に書き直す。

$$y'(x) = f\big(y(x), x\big) \tag{1.7}$$

f は未知関数 $y(x)$ と独立変数 x の関数。

$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x)$ は、地点 x における関数 $y = y(x)$ の接線の傾きそのものである。微分方程式 (1.7) によって、(x, y) 平面上の傾きの方が先に決められており、微分方程式の解はその向きに沿った解曲線 (もしくは積分曲線) として得られる。

1.5 変数分離形の微分方程式

準備が済んだところで、微分方程式の具体的な解法の説明に移る。

微分方程式が次の形

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)g\big(y(x)\big) \tag{1.8}$$

をとるとき、変数分離形の方程式と呼ぶ。この式を、左辺に y, 右辺に x だけが現れるように変形すると

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx \tag{1.9}$$

とでき、この両辺をそのまま積分することで

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + C \tag{1.10}$$

とできる。あとは、この両辺の積分を実行できれば微分方程式 (1.8) の解が得られる。右辺の C は、両辺から発生する積分定数を一つにまとめたもの。

変数分離形の微分方程式の例

$$9yy' + x = 0 \tag{1.11}$$

$y' = dy/dx$ であることに注意して式を書き換えると

$$9ydy = -xdx \tag{1.12}$$

とできる。この両辺を不定積分すると

$$\int 9ydy = -\int xdx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{2}y^2 + C_1 = -\frac{1}{2}x^2 + C_2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (3y)^2 = C\ . \tag{1.13}$$

ここで、両辺の積分定数をまとめて $C \equiv 2\left(-C_1 + C_2\right)$ とした。式 (1.13) は、原点を中心とし、半径が任意定数 C で定まる楕円の族を表す。

指数関数を解として持つ式 (1.1) も、変数分離形の微分方程式の例である。この節で説明した方法でこれを解いてみると

$$\frac{dy}{dx} = Ay \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = Adx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int Adx \quad \Leftrightarrow \quad \log y = Ax + B\ . \tag{1.14}$$

ただし B は任意定数。この解を y について表しなおして $y = e^{Ax+B} = e^B e^{Ax} = Ce^{Ax}$ ($C \equiv e^B$ は任意定数) を得る。

変数分離形に変換できる例

- $y' = f(y/x)$ の形の微分方程式

  方程式 $y' = f(y/x)$ はそのままでは変数分離できないが、新変数 $u(x) \equiv \frac{y(x)}{x}$ を導入し、$y(x)$ を消去することで変数分離できる。まず、左辺の $y' = dy/dx$ は

  $$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x\,u(x)\right] = u(x) + x\frac{du}{dx}(x) \tag{1.15}$$

  と書き換えられる。これをもとの微分方程式に代入すると

  $$u + x\frac{du}{dx} = f(y/x) = f(u) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C \tag{1.16}$$

  と、変数分離法を適用して解ける。

  例）$2xyy' = y^2 - x^2$:

  この式の両辺を xy で割ると

  $$2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}\ . \tag{1.17}$$

  ここで $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ と置くと、式 (1.15) を使って

  $$2\left(u + x\frac{du}{dx}\right) = u - \frac{1}{u} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} = -\frac{2du}{u + \frac{1}{u}} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2du}{u + \frac{1}{u}} + C\ . \tag{1.18}$$

  左辺は $\int \frac{dx}{x} = \log x$ となる。右辺は

  $$-\int \frac{2du}{u + \frac{1}{u}} = -\int \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\int \frac{d\left(u^2\right)}{u^2 + 1} = -\log\left(u^2 + 1\right)\ . \tag{1.19}$$

したがって、式 (1.18) から

$$\log x = -\log\left(u^2+1\right)+C \quad \Leftrightarrow \quad \log x + \log\left(u^2+1\right) = \log\left[x\left(u^2+1\right)\right] = C \tag{1.20}$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(u^2+1\right) = \tilde{C} \tag{1.21}$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left[\frac{y^2}{x^2}+1\right] = \tilde{C}\ . \tag{1.22}$$

ただし $\tilde{C}$ は任意定数。この表式を $y(x)$ について解けば

$$y = \pm x\sqrt{\frac{\tilde{C}}{x}-1} \tag{1.23}$$

と解が得られる。式 (1.22) を変形して

$$x\left[\frac{y^2}{x^2}+1\right] = \tilde{C} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{\tilde{C}}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{\tilde{C}^2}{4} \tag{1.24}$$

とすることで、中心 $(x,y) = (\frac{\tilde{C}}{2}, 0)$, 半径 $\frac{\tilde{C}}{2}$ の円が解曲線であるとわかる。

- **変数 $u = ay + bx + c$ を含む微分方程式**

例)

$$[2x - 4y(x) + 5]\, y'(x) + x - 2y(x) + 3 = 0 \tag{1.25}$$

この微分方程式には $x-2y$ という式が見えるので、これを新変数 $u(x) = x - 2y(x)$ と置く。すると

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{x-u(x)}{2} = \frac{1-u'(x)}{2}\ . \tag{1.26}$$

これを式 (1.25) に使うと

$$[2u(x)+5]\,\frac{1-u'(x)}{2} + u(x) + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{4u+11}{2u+5}\ . \tag{1.27}$$

これは変数分離法で解ける。実際、

$$\frac{du}{dx} = \frac{4u+11}{2u+5} \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{2u+5}{4u+11}du = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4u+11}\right)du \tag{1.28}$$

と変形してから、両辺を積分すると

$$x = \frac{1}{2}\left[u - \frac{1}{4}\log\left(4u+11\right)\right] + C \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left[x - 2y - \frac{1}{4}\log\left(4x-8y+11\right)\right] + C\ . \tag{1.29}$$

この式はこれ以上 y について解くことはできない。未知関数 $y(x)$ を**陰的**に与える解となっている。

第 2 回　一階常微分方程式の解法（積分因子）

[教科書 1.4 ∼ 1.5]
　今回の内容：

- 復習：変数分離形の 1 階常微分方程式、自然現象のモデル化
- 完全微分型の微分方程式
- 積分因子の方法

2.1　変数分離形の常微分方程式

1 階常微分方程式を標準形に書き直したとき、右辺が $f(x)g(y)$ のように各々 x, y だけの関数の積で与えられるとき、x, y に依存する項を両辺に分離することで積分を実行できる。

$$\left(\frac{dy(x)}{dx}=\right) y' = f(x)\times g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \quad (C:\text{定数}) \tag{2.1}$$

2.2　自然現象のモデル化

自然現象の振る舞いを微分方程式で表現することを**自然現象のモデル化**と言い、それを解くことでその自然現象について予言を与えられる。その中から、変数分離法で解ける例を紹介する。

- **熱伝導**

  温度 T のある物体を温度 T_A の媒質に接触させる。この時、物体の温度変化の速さは、物体と媒質との間の温度差に比例することが知られている。これを式で書き表すと

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k\big(T(t)-T_A\big), \qquad T(0)=T_0 \tag{2.2}$$

  比例定数 k は物体の質量と比熱の積で与えられる。T_0 は時刻 $t=0$ における初期温度。

  式 (2.2) は変数分離法で解ける。

$$\begin{aligned} &\frac{dT(t)}{dt} = -k\big(T(t)-T_A\big) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dT}{T-T_A} = -kdt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dT}{T-T_A} = -k\int dt + C \\ \Leftrightarrow \quad &\log(T-T_A) = -kt + C \Leftrightarrow \quad T-T_A = e^{kt+C} = \tilde{C}e^{-kt} \quad (\tilde{C}\equiv e^C) \end{aligned} \tag{2.3}$$

  ここで、初期条件 $T(t)=T_0$ を使うと、$\tilde{C}=T_0-T_A$ と定まって

$$T(t) = T_A + (T_0-T_A)e^{-kt} \tag{2.4}$$

  となる。物体の温度は $T(0)=T_0$ からスタートして指数関数的に媒質の温度に緩和していく ($T(t) \xrightarrow{t\to\infty} T_A$)。

2.3 完全微分型の微分方程式

微分方程式の具体的な解法のもう一つの例として、**完全微分型**の微分方程式の解法を紹介する。

ある関数 $u(x,y)$ が連続な偏微分 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ を持つとき、$u(x,y)$ の**完全微分** (もしくは**全微分**) du は

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{2.5}$$

で与えられる。

$u(x,y)$ を地点 (x,y) における「高さ」だと思うことにすると、$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ はそれぞれ x,y 方向の勾配であり、du は距離 (dx,dy) だけ移動した地点における「高さ」の変化分である。

例）$u(x,y) = x + x^2y^3$ の場合

$$u(x,y) = x + x^2y^3 \quad \Rightarrow \quad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \left(1 + 2xy^3\right)dx + 3x^2y^2dy\ . \tag{2.6}$$

微分方程式の中には、完全微分型に書き直すことで簡単に解けるものがある。上記の例については

$$\left(1 + 2xy^3\right)dx + 3x^2y^2dy = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \quad 1 + 2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0\right) \tag{2.7}$$

$$\Leftrightarrow \quad du = d\left(x + x^2y^3\right) = 0 \tag{2.8}$$

式 (2.8) は、関数 $u = x + x^2y^3$ の微分がゼロ、すなわち $u = x + x^2y^3$ が一定値を取ることを意味している。その一定値を C ととると

$$x + x^2y^3 = C \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(\frac{C - x}{x^2}\right)^{1/3} \quad (C : \text{定数})\ . \tag{2.9}$$

微分方程式が完全微分型となる条件

ある微分方程式

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\right) \tag{2.10}$$

が完全微分型 $(\exists u, du = Mdx + Ndy = 0)$ となるための必要十分条件 (可積分条件) は

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}\ . \tag{2.11}$$

仮に、式 (2.10) が式 (2.5) のような完全微分の形で書けるとする。このとき、関数 $u(x,y)$ が存在して

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \quad \Leftrightarrow \quad M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.12}$$

を満たす。すると、連続な偏微分の性質 $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}$ より

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}\ . \tag{2.13}$$

すなわち、式 (2.10) が完全微分 (2.5) の形で書き表せるためには、関数 $N(x,y), M(x,y)$ が式 (2.13) を満たすことが必要となる。実は、条件 (2.13) は式 (2.10) が完全微分の形で書けるための十分条件にもなっており、この式が満たされているかだけをチェックすればよいことになる。
例）次の微分方程式

$$x^3+3xy^2+\left(3x^2y+y^3\right)y'=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(x^3+3xy^2\right)dx+\left(3x^2y+y^3\right)dy=0 \tag{2.14}$$

が完全微分方程式として書けるかを確認し、解を具体的に求めるまでの手順を説明する。

1. **完全微分型であるか確認**

   もし式 (2.14) が完全微分型となるなら、関数 $u(x,y)$ が存在して

   $$\begin{aligned} du &= \quad \frac{\partial u}{\partial x} \quad dx + \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad dy \\ &= \left(x^3+3xy^2\right)dx+\left(3x^2y+y^3\right)dy=0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

   と書き表せる。このとき、偏微分の性質 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ が満たされなければならないが、

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y+y^3\right)=6xy \tag{2.16}$$

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3+3xy^2\right)=6xy \tag{2.17}$$

   となり、$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ が満たされていることを確認できる。したがって、式 (2.14) は完全微分方程式 $du=0$ として書ける。

2. **関数 $u(x,y)$ を求める**

   関数 $u(x,y)$ を求めるには、式 (2.15) で定められる $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ の式を使えばよい。一方を積分することで $u(x,y)$ を積分定数込みの形で求め、もう一方の式を使って積分定数を定める。

   まず、$\frac{\partial u}{\partial x}$ を x について積分すると

   $$u=\int \frac{\partial u}{\partial x}dx=\int\left(x^3+3xy^2\right)dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2+C(y)\ . \tag{2.18}$$

   この積分は y **が定数であるとみなして実行する**。そのため、**積分定数** $C(y)$ **も** y **の関数となる**ので注意が必要。

   次に、この式から得られる $\partial u/\partial y$ が、式 (2.14) で与えられる $\frac{\partial u}{\partial y}$ と等しくなることから

   $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2+C(y)\right)=3x^2y+\frac{dC(y)}{dy}=3x^2y+y^3\ . \tag{2.19}$$

   $$\therefore \quad \frac{dC(y)}{dy}=y^3 \quad \Leftrightarrow \quad C(y)=\frac{1}{4}y^4+\tilde{C} \quad (\tilde{C}:\text{定数})\ . \tag{2.20}$$

   $$\therefore \quad u=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4+\tilde{C}\ . \tag{2.21}$$

3. **微分方程式 (2.14) の解を書き下す**

   式 (2.21) で与えられる $u(x,y)$ を用いれば、微分方程式 (2.14) を

   $$\left(x^3+3xy^2\right)dx+\left(3x^2y+y^3\right)dy=du=0 \tag{2.22}$$

   の形に書き換えられる。この式の解は $u=(\text{一定})$ で与えられるので、

   $$u=(\text{一定}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4=C \quad (C:\text{定数})\ . \tag{2.23}$$

   この式は、解 $y(x)$ を陰関数表示で与える式になっている。これが微分方程式 (2.14) の解になっていることは、この式の微分が方程式 (2.14) そのものになっていることで確認できる。

2.4　積分因子

微分方程式の中には、そのままでは完全微分型ではないものの、ある関数を書けることで完全微分型に直せるものが存在する。

例)

$$-y\,dx + x\,dy = 0 \tag{2.24}$$

この方程式が完全微分方程式 $du = 0$ で表せると仮定すると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -1 \ , \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = +1 \tag{2.26}$$

となり、可積分条件 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ が満たされない。したがって、方程式 (2.24) は完全微分型ではない。

ここで、方程式 (2.24) に**積分因子** $F(x,y) = 1/x^2$ をかけてから同じ操作を行ってみる。

$$-F(x,y)\,y\,dx + F(x,y)\,x\,dy = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{x}{x^2}dy = 0 \tag{2.27}$$

この方程式が完全微分方程式 $du = 0$ で表せると仮定すると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{x^2} \ , \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} \tag{2.29}$$

となり、$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ が満たされるため、方程式 (2.27) は完全微分方程式として書き表せる。実際、以下のように解くことができる。

$$-\frac{y}{x^2}dx + \frac{x}{x^2}dy = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = C \quad (C : \text{定数}) \ . \tag{2.30}$$

積分因子の求め方

積分因子 $F(x,y)$ は常に存在するとは限らず、存在する場合でも具体的に求めることが難しいことも多い。しかし、F が x または y だけに依存する場合は比較的簡単に求められる。

- **積分因子が x だけに依存する場合 ($F = F(x)$)**

  ある微分方程式

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \left(\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\right) \tag{2.31}$$

  の全体に積分因子 $F(x)$ をかけた式

$$F(x)M(x,y)dx + F(x)N(x,y)dy = 0 \tag{2.32}$$

  が完全微分型 $du = 0$ になると仮定する。すると、$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ が満たされなければならないことから

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\big(F(x)M(x,y)\big) = F(x)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\big(F(x)N(x,y)\big) = F'(x)N(x,y) + F(x)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \tag{2.34}$$

$$\therefore \quad F(x)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = F'(x)N(x,y) + F(x)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \ . \tag{2.35}$$

  もし、**式 (2.35) の右辺が x だけの関数となるなら**、この式を x について積分することで積分因子 $F(x)$ を求めることができる。一般の微分方程式についてこうなる保証はないので、問題ごとにこの条件が満たされるか確認する必要がある。

- 積分因子が y だけに依存する場合 ($F = F(y)$)

$$F(y)M(x,y)dx + F(y)N(x,y)dy = 0 \tag{2.36}$$

が完全微分型 $du = 0$ になると仮定すると、先程と同様にして

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\big(F(y)M(x,y)\big) = F'(y)M(x,y) + F(y)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\big(F(y)N(x,y)\big) = F(y)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \tag{2.38}$$

$$\therefore \quad F'(y)M(x,y) + F(y)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = F(y)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F'(y)}{F(y)} = \frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) . \tag{2.39}$$

もし、式 (2.39) の右辺が y だけの関数になるなら、この式を y について積分することで積分因子 $F(y)$ を求められる。

以下では、先程の例 (2.24) について積分因子 F を求める計算をやってみる。以上の式を公式として覚えるよりは、可積分条件 (2.11) を直接確認するほうが効率的である。

仮に、積分因子が $F(x)$ となると仮定すると

$$-F(x)ydx + F(x)xdy = 0 \tag{2.40}$$

について可積分条件をチェックすることで

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\big(-F(x)y\big) = -F(x) \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\big(F(x)x\big) = F'(x)x + F(x) \tag{2.42}$$

$$\therefore \quad -F(x) = F'(x)x + F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{2}{x} \tag{2.43}$$

この両辺を x について積分することで

$$\log F(x) = -2\log x + C = \log\left(\frac{1}{x^2}\right) + C \qquad \therefore \quad F(x) = \frac{\tilde{C}}{x^2} \quad (C, \tilde{C} : \text{定数}) . \tag{2.44}$$

$\tilde{C} = 1$ とすれば、式 (2.27) で用いた積分因子 $1/x^2$ が得られる。定数 $\tilde{C}$ を (非零の) 他の定数にセットしても問題ない。

なお、積分因子が $F(y)$ となると仮定してみると、式 (2.39) と同様の計算を行うことで

$$\frac{F'(y)}{F(y)} = \frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{-y}\left(\frac{\partial\,(x)}{\partial x} - \frac{\partial\,(-y)}{\partial y}\right) = -\frac{2}{y} . \tag{2.45}$$

この右辺は y だけの関数になっているので、積分因子を $F(y) = 1/y^2$ などと求めることができる。こちらの積分因子を使っても、式 (2.30) と等価な解 ($\frac{y}{x} = (\text{定数})$) が得られる。

第3回　1階線形常微分方程式（一般解、定数変化法）

[教科書 1.6]

今回の内容：

- 復習：完全微分型方程式、積分因子の方法
- 1階線形常微分方程式
- 定数変化法

3.1　1階線形常微分方程式

今回は、次の形の常微分方程式の解法を学ぶ。

$$y' + p(x)y = r(x) \tag{3.1}$$

この方程式は、未知関数 $y(x)$ **について線形** ($y(x)$ とその微分 $y'(x)$ の1次式) である。
式 (3.1) をさらに以下のように分類する。

- $r(x) = 0$ **の場合**：$y' + p(x)y = 0$ と、式全体が $y(x)$ について1次の項だけになる
  $\Leftrightarrow$ 式 (3.1) は $y(x)$ の**斉次方程式**
- $r(x) \neq 0$ **の場合**：$y' + p(x)y = r(x)$ と、$y(x)$ について1次の項と0次の項が現れる
  $\Leftrightarrow$ 式 (3.1) は $y(x)$ の**非斉次方程式**

斉次方程式は**同次方程式**と呼ばれることもある。

3.1.1　斉次方程式の解法

$r(x) = 0$ の時には、方程式 (3.1) は

$$y' + p(x)y = 0 \tag{3.2}$$

と単純化する。これは、変数分離の方法で解ける形になっており

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + C \quad \Leftrightarrow \quad \log y = -\int p(x)dx + C \tag{3.3}$$

$$\therefore \quad y = e^C e^{-\int p(x)dx} \equiv \tilde{C} e^{-\int p(x)dx} \quad (\tilde{C}：定数)\ . \tag{3.4}$$

3.1.2　非斉次方程式の解法

$r(x) \neq 0$ の場合には、式 (3.1) は変数分離形になっておらず、上記の方法では解が得られない。式 (3.1) を少し書き換えて

$$(p(x)y - r(x))\, dx + dy = 0 \tag{3.5}$$

とし、これを積分因子の方法で解くことを試みる。
仮に、式 (3.1) に積分因子 $F(x)$ をかけたものが全微分型 $du(x, y) = 0$ となると仮定する。すると

$$0 = F(x)\,(p(x)y - r(x))\, dx + F(x)dy = du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = F(x)\left(p(x)y - r(x)\right) & \Rightarrow \quad \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x} = F(x)p(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = F(x) & \Rightarrow \quad \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = F'(x) \end{cases} \tag{3.7}$$

二階偏微分方程式は $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}$(可積分条件) を満たすことから

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = F(x)p(x) \tag{3.8}$$

この $F(x)$ についての微分方程式は式 (3.2) と同様の方法で解くことができ、その解は

$$F(x) = Ce^{\int p(x)dx} \qquad (C : 定数) \tag{3.9}$$

となる。ここで、積分因子に含まれる積分定数 C をどの値にとってもその後の計算は同様なので、以下では $C = 1$ とする。

以下では、積分因子 $F(x) = e^{\int p(x)dx}$ を用いて式 (3.6) を解く。式 (3.7) の $\partial u/\partial y$ をもとに関数 $u(x, y)$ を構築すると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\int p(x)dx}\left(p(x)y - r(x)\right) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx = y\, e^{\int p(x)dx} - \int \left(e^{\int p(x)dx} r(x)\right) dx + C(y) \tag{3.10}$$

この $u(x, y)$ の表式が、式 (3.7) の第二式 ($\frac{\partial u}{\partial y} = F(x) = e^{\int p(x)dx}$) も満たすためには、$C(y)$ が y に依らない定数 C であればよい。

以上の結果により、式 (3.6) は式 (3.10) の $u(x, y)$ (ただし C は定数) を用いて $du = 0$ と表されることが分かった。微分方程式 $du = 0$ の解は単に $u =$ (定数) で与えられるので、結局式 (3.6) の解は

$$u(x, y) = y\, e^{\int p(x)dx} - \int \left[e^{\int p(x)dx} r(x)\right] dx + C = \tilde{C} \tag{3.11}$$

$$\therefore \qquad y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int \left(e^{\int p(x)dx} r(x)\right) dx + C\, e^{-\int p(x)dx} \quad (C : 定数) \tag{3.12}$$

ただし、式 (3.11) における積分定数の合計 $\tilde{C} - C$ を、式 (3.12) では C と再定義している。

コメント：式 (3.12) の右辺第 2 項は、実は斉次方程式の解 (3.4) になっている。一方、右辺第 1 項は非斉次方程式の特解（任意パラメタを含まない解）である。すなわち、非斉次方程式 (3.1) の解は一般に

(非斉次方程式の一般解) = (非斉次方程式の特解) + (斉次方程式の一般解)

と表されることになる。

上記の計算では、非斉次方程式の特解を求めるのに積分因子の方法を用いた。しかし、もし別の方法（勘や気合で求める、定数変化方で求めるなど）でこの特解さえ求められれば、あとは斉次方程式の一般解を求めて足すことで同じ問題を解ける。どの方法でも結果は同じになるので、自分のやりやすい方法で解けばよい。

3.2 定数変化法

式 (3.1) のもう一つの解法である**定数変化法**を、具体的な微分方程式を例にとって説明する。

$$y' - y = e^{2x} \tag{3.13}$$

この微分方程式を、以下の定数変化法で求めてみよう。

定数変化法による解法

1. 右辺をゼロにして得られる斉次方程式の一般解を求める。
2. 斉次方程式の一般解の積分定数 C を x の関数 $C(x)$ に書き換える。
3. それをもとの微分方程式に代入　$\to$　$C(x)$ の微分方程式として解いて一般解を求める。
4. 得られた $C(x)$ を斉次方程式の解に代入すると、非斉次方程式の一般解が得られる。

では順を追ってやってみる。

1. 右辺をゼロにして得られる斉次方程式の一般解を求める。今回の場合は $y'-y=0$ を解く。
   今回の場合は、以下の方程式を解くことになる。
   $$y'-y=0 \tag{3.14}$$
   これの解法は省略するが、一般解は次のように得られる。
   $$y(x)=Ce^x \qquad (C:\text{定数}) \tag{3.15}$$
2. 斉次方程式の一般解の積分定数 C を x の関数 $C(x)$ に書き換える。
   式 (3.15) で、$C \ \to C(x)$ と定数 C だったものを x の関数に格上げする：
   $$y(x)=C(x)e^x\ . \tag{3.16}$$
3. それをもとの微分方程式に代入　$\to$　$C(x)$ の微分方程式として解いて一般解を求める。
   $$e^{2x}=y'-y=\frac{d}{dx}\left(C(x)e^x\right)-C(x)e^x=e^x\frac{dC(x)}{dx}\ . \tag{3.17}$$
   この方程式 $\dfrac{dC(x)}{dx}=e^x$ の一般解は、この式を x 積分することで以下のように得られる:
   $$\frac{dC(x)}{dx}=e^x \quad\Rightarrow\quad C(x)=e^x+\tilde{C} \quad (\tilde{C}:\text{定数}) \tag{3.18}$$
4. 得られた $C(x)$ を斉次方程式の解に代入すると、非斉次方程式の一般解が得られる。
   $$y(x)=C(x)e^x=\left(e^x+\tilde{C}\right)e^x=e^{2x}+\tilde{C}e^x \quad \left(\tilde{C}:\text{定数}\right)\ . \tag{3.19}$$

最終結果 (3.19) の右辺第 1 項は非斉次方程式の特解、第二項は斉次方程式の一般解 (3.15) となっている。定数変化法ではなく、積分因子の方法で一般解を求めても同じ結果が得られる。

例）　次の微分方程式を、定数変化法で解いてみる。
$$y'+xy=4x \tag{3.20}$$
まず、右辺をゼロにして得られる斉次方程式は、以下のように変数分離法を用いて解ける。
$$\frac{dy}{dx}+xy=0 \quad\Leftrightarrow\quad xdx=-\frac{1}{y}dy \tag{3.21}$$
この式全体を積分することで
$$\int xdx=-\int\frac{1}{y}dy+C \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}x^2=-\log y+C \quad\Leftrightarrow\quad y=e^{-\frac{1}{2}x^2+C}=\tilde{C}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (\tilde{C}=e^C:\text{定数}) \tag{3.22}$$

積分定数 $\tilde{C}$ を x の関数 $\tilde{C}(x)$ に置き換えて、元の方程式 (3.20) に代入すると

$$\begin{aligned}4x = y' + xy &= \frac{d}{dx}\left(\tilde{C}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) + x\,\tilde{C}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= \frac{d\tilde{C}(x)}{dx}e^{-\frac{1}{2}x^2} - x\tilde{C}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} + x\,\tilde{C}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{d\tilde{C}(x)}{dx}e^{-\frac{1}{2}x^2}\ .\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\therefore \quad \frac{d\tilde{C}(x)}{dx} = 4xe^{\frac{1}{2}x^2}\ . \tag{3.24}$$

式 (3.24) を積分して $\tilde{C}(x)$ を求めるためには、新変数 $z = x^2$ を導入するとよい。まず、

$$dz = d\left(x^2\right) = 2xdx \qquad \therefore \quad dx = \frac{1}{2x}dz\ . \tag{3.25}$$

これを用いると、式 (3.24) の不定積分は

$$\tilde{C}(x) = \int 4xe^{\frac{1}{2}x^2}dx = \int 4xe^{\frac{1}{2}z}\frac{1}{2x}dz = 2\int e^{\frac{1}{2}z}dz = 4e^{\frac{1}{2}z} + \hat{C} = 4e^{\frac{1}{2}x^2} + \hat{C} \quad (\hat{C}:\text{定数}) \tag{3.26}$$

これを用いると、元の方程式 (3.20) の解は

$$y(x) = \tilde{C}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} = \left(4e^{\frac{1}{2}x^2} + \hat{C}\right)e^{-\frac{1}{2}x^2} = 4 + \hat{C}e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (\hat{C}:\text{定数})\ . \tag{3.27}$$

第 4 回　一階常微分方程式の応用、二階微分方程式

[教科書 1.6, 2.2]

今回の内容：

- 一階非線形常微分方程式 (定数変化法の復習)
- 二階定数係数斉次常微分方程式

4.1　一階非線形常微分方程式

これまでに取り扱ってきた方程式は、未知関数 $y(x)$ とその微分について線形な方程式であった。この場合には一般解の公式 (3.12) が構築でき、定数変化法などを使って直接解く事もできた。

今回は、$y(x)$ について非線形な項を含む**一階非線形常微分方程式**を扱う。線形微分方程式に比べて解くのが一般に難しいため、以下では工夫をすることで解ける次の例だけを紹介する。

ベルヌーイの方程式

$$y' + p(x)y = g(x)y^a \qquad (a : \text{定数}) \tag{4.1}$$

この方程式は、変数変換 $u(x) = y^{1-a}(x)$ を行うことで線形常微分方程式に帰着して解ける。

$a \neq 0, 1$ のときには、式 (4.1) の右辺は $y(x)$ について非線形項となり、これまでに学んだ方法では解けない。これを解く準備として、まず式全体に y^{-a} をかけて整理すると

$$y^{-a}y' + p(x)y^{1-a} = g(x) \ . \tag{4.2}$$

この式の左辺に出てくる y^{1-a} をそのまま新変数 $u(x)$ にとってみよう。

$$u(x) = y^{1-a}(x) \tag{4.3}$$

この新変数 $u(x)$ で式 (4.2) を表すためには、式 (4.3) を微分して $y'(x)$ と $u'(x)$ との関係式を作り、代入すればよい。

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\,y^{1-a}}{dx} = \frac{d\,y^{1-a}}{dy}\frac{dy}{dx} = (1-a)y^{-a}\frac{dy}{dx} \qquad \therefore \quad y^{-a}y' = \frac{1}{1-a}u' \ . \tag{4.4}$$

これと式 (4.3) を用いれば、式 (4.2) は

$$\frac{1}{1-a}u' + p(x)u = g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad u' + (1-a)p(x)u = (1-a)g(x) \tag{4.5}$$

と、前回の講義で扱った**線形常微分方程式**に変形できる。あとは、前回同様に定数変化法などを用いてこれを解き、式 (4.3) に従って解 $y(x)$ を書き下せばよい。

例）ある生命体の量 $y(t)$（人口でも微生物の個数でも何でもよい）が、次の方程式に従うとする。

$$\frac{dy(t)}{dt} = A\,y(t) - B\,y^2(t) \qquad (A, B : \text{定数}, A > 0) \tag{4.6}$$

右辺の $A\,y(t)$ 項は、生物の量 $y(t)$ に比例して単位時間当たりの生物の増加分が増大することを示す。一方、$-B\,y^2(t)$ 項は、生物が過密となると生物の量 $y(t)$ が減少し、その単位時間当たりの減少量が生物量の 2 乗に比例することを示す。この方程式を解き、この生命体の運命を占ってみよう。

[u の線形微分方程式に変換する] 式 (4.6) を整理すると、式 (4.1) で $a = 2$ としたものと等価になる。

$$y' - A\,y = -B\,y^2 \tag{4.7}$$

これを上記と同じ要領で解いてみる。まず、式全体を y^2 で割ると

$$\frac{1}{y^2}y' - A\,\frac{1}{y} = -B\ . \tag{4.8}$$

ここで、式の左辺に出てくる $1/y(t)$ を新変数 $u(t)$ と定義してみる。

$$u(t) = \frac{1}{y(t)} \tag{4.9}$$

この式全体を t 微分すると

$$u' = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y(t)}\right) = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt}\ . \tag{4.10}$$

この式を使って式 (4.8) を書き換えると

$$u' + A\,u = B \tag{4.11}$$

と、$u(x)$ について線形な (非斉次) 微分方程式が得られる。

[u の一般解を求める] 式 (4.11) は非斉次の線形常微分方程式であり、定数変化法を用いて以下のように解くことができる。まず、式 (4.6) に対応する斉次方程式は

$$u' + A\,u = 0 \tag{4.12}$$

であり、この一般解は

$$u' = -A\,u \qquad \Rightarrow \qquad u = Ce^{-A\,t} \quad (C : \text{定数})\ . \tag{4.13}$$

定数変化法では、この一般解に含まれる定数 C を x の関数 $C(x)$ に直した式

$$u = C(x)e^{-A\,t} \tag{4.14}$$

を元の非斉次方程式 (4.11) に代入する。こうすることで

$$\begin{aligned} B = u' + A\,u &= \frac{d}{dx}\left(C(x)e^{-A\,t}\right) + AC(x)e^{-A\,t} \\ &= C'(x)e^{-A\,t} - C(x)Ae^{-A\,t} + AC(x)e^{-A\,t} \\ &= C'(x)e^{-A\,t} \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\therefore \quad C'(x) = Be^{A\,t} \tag{4.16}$$

この方程式を x 積分して、関数 $C(x)$ を求めると

$$C(x) = \frac{B}{A}e^{A\,t} + \tilde{C} \qquad (\tilde{C} : \text{定数})\ . \tag{4.17}$$

この $C(x)$ を式 (4.14) に代入することで、$u(x)$ の微分方程式 (4.11) の一般解が得られる:

$$u(x) = C(x)e^{-A\,t} = \left(\frac{B}{A}e^{A\,t} + \tilde{C}\right)e^{-A\,t} = \frac{B}{A} + \tilde{C}e^{-A\,t} \qquad (\tilde{C} : \text{定数}) \tag{4.18}$$

[解 y の表式に書き直す] 最後に、もともとの変数 $y(t)$ についてこの解を表すと

$$y(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{\frac{B}{A} + \tilde{C}e^{-A\,t}} \qquad (\tilde{C} : \text{定数}) \tag{4.19}$$

これが、もともとの微分方程式 (4.6) の一般解である。

(得られた解の性質) $\lim_{t\to\infty} e^{-A\,t} = 0$ となることに気を付けると、解 (4.19) は初期時刻と長時間経過後に以下のようにふるまうことが分かる。

$$y(t) = \frac{1}{\frac{B}{A} + \tilde{C}e^{-A\,t}} = \begin{cases} \frac{1}{\frac{B}{A}+\tilde{C}} = (\text{定数}) & (t = 0) \\ \frac{A}{B} & (t \to \infty) \end{cases} \tag{4.20}$$

すなわち、生物の量 $y(t)$ は初期値 $\frac{1}{\frac{B}{A}+\tilde{C}}$ からスタートし、時間がたつにつれて最終値 $\frac{A}{B}$ に収束する。この最終値は、$y(t)$ の増加分 (A に比例) と減少分 (B に比例) がちょうど釣り合う点に相当する。

4.2　二階 定数係数 斉次 常微分方程式

本節以降では、未知関数 $y(x)$ の二階微分を含む微分方程式を取り扱う。最も簡単な例を挙げると

$$y'' = 0\ . \tag{4.21}$$

これは、次のように x 積分を 2 回行うことで解 $y(x)$ が得られる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \tag{4.22}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2}dx = \int 0\,dx = C_1 \qquad (C_1 : \text{定数}) \tag{4.23}$$

$$\Rightarrow\quad y(x) = \int \frac{dy}{dx}dx = \int C_1\,dx = C_1\,x + C_2 \quad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{4.24}$$

式 (4.21) が二階微分 y'' を持つことに対応して、一般解 (4.24) は **2 つの積分定数** C_1, C_2 を持つ。より正確には、$y(x) = C_1$ と $y(x) = C_2\,x$ **は各々単独で方程式 (4.21) の解になっており、一般解 (4.24) はそれらの足し合わせになっている。**これは、線形の 2 階常微分方程式に共通の性質となっている。

以下では、本節のタイトルとなっている**二階 定数係数 斉次 常微分方程式**を扱う。この意味は、3.1 節で説明した 1 階常微分方程式の場合と同様で

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0 \qquad (a, b : \text{定数}) \tag{4.25}$$

という、**未知関数** $y(x)$ **とその微分** y', y'' **について 1 次の項だけで構成された、定数係数の二階常微分方程式**のことを指す。

二階線形常微分方程式の一般解

方程式 (4.25) の 2 つの独立な解を $y(x) = y_1(x)$, $y(x) = y_2(x)$ としよう。方程式 (4.25) が y について線形であるため、2 つの解を足し合わせた

$$y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) \qquad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{4.26}$$

も解となる。この解は 2 つの任意定数 C_1, C_2 を含むため、**式 (4.25) の一般解**となる。

($\because$) y_1, y_2 はどちらも式 (4.25) の解なので

$$y_1'' + a\,y_1' + b\,y_1 = 0\ , \qquad y_2'' + a\,y_2' + b\,y_2 = 0\ . \tag{4.27}$$

一方、$y = C_1\,y_1 + C_2\,y_2$ を方程式 (4.25) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} y'' + a\,y' + b\,y &= (C_1\,y_1 + C_2\,y_2)'' + a\,(C_1\,y_1 + C_2\,y_2)' + b\,(C_1\,y_1 + C_2\,y_2) \\ &= C_1 \times \left(y_1'' + a\,y_1' + b\,y_1\right) + C_2 \times \left(y_2'' + a\,y_2' + b\,y_2\right) \\ &= C_1 \times 0 + C_2 \times 0 = 0\ . \end{aligned} \tag{4.28}$$

したがって、$y = C_1\,y_1 + C_2\,y_2$ は式 (4.25) を満たす解であり、2 つの任意定数を含むことから二階微分方程式 (4.25) の一般解となっている。

この計算では、方程式 (4.25) が y について線形であるために、y_1, y_2 それぞれだけについての式に分解できることを使っている。また、式の最後の行では式 (4.27)、すなわち y_1, y_2 のそれぞれが式 (4.25) の解であることを用いた。

4.2.1　$y'' + b\,y = 0$ の解法

$a = 0$ の時に得られる方程式

$$y'' + b\,y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y'' = -b\,y \tag{4.29}$$

の一般解を構成してみよう。

上で説明したとおり、2 つの任意定数を含む解を構成できれば、その二階線形微分方程式の一般解を構成できたことになる。式 (4.29) については、そのような解を直接見つけることができて[1]

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \sin(\sqrt{b}\,x) + C_2 \cos(\sqrt{b}\,x) & (b > 0) \\ C_1\,x + C_2 & (b = 0) \\ C_1\,e^{\sqrt{-b}\,x} + C_2\,e^{-\sqrt{-b}\,x} & (b < 0) \end{cases} \qquad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{4.30}$$

となる。

4.2.2 初期値問題

2 階微分方程式の一般解は 2 つの任意定数を含むため、それらの定数の値を決定するためには 2 つの条件が必要となる。その一つの与え方は、初期位置 $x = x_0$ における $y(x = x_0)$ とその微分 $y'(x = x_0)$ の値を指定することである。このような設定で特定の解を求める問題のことを**初期値問題**と呼ぶ。

一階微分方程式の時には $y(x_0)$ の値を指定するだけで解が一つに定まったが、微分方程式が 2 階になったことで必要となる条件が 2 つに増えている。

例）次の初期値問題を解け。

$$y''(x) = -\pi^2 y(x)\ , \quad y(1) = 2\ , \quad y'(1) = 0 \tag{4.31}$$

(解答例) まず、方程式 $y''(x) = -\pi^2 y(x)$ の一般解は

$$y(x) = C_1 \sin(\pi x) + C_2 \cos(\pi x) \qquad (C_1, C_2 : \text{定数})\ . \tag{4.32}$$

あとは、任意定数 C_1, C_2 を初期条件 $y(1) = 2$,$y'(1) = 0$ が満たされるように決めてやればよい。

$$y'(x) = \pi\,[C_1 \cos(\pi x) - C_2 \sin(\pi x)] \tag{4.33}$$

となることから、

$$y(1) = C_1 \sin(\pi x) + C_2 \cos(\pi x)\Big|_{x=1} = C_1 \sin(\pi) + C_2 \cos(\pi) = -C_2 = 2 \tag{4.34}$$

$$y'(1) = \pi\,[C_1 \cos(\pi x) - C_2 \sin(\pi x)]\Big|_{x=1} = \pi\,[C_1 \cos(\pi) - C_2 \sin(\pi)] = -\pi C_1 = 0 \tag{4.35}$$

$$\therefore \quad C_1 = 0\ , \quad C_2 = -2 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = -2\cos(\pi x)\ . \tag{4.36}$$

[1] 次回導入する**オイラーの公式**

$$e^{i\lambda x} = \cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)$$

を用いれば、$b < 0$ の場合の解は

$$y(x) = c_1\,e^{i\sqrt{-b}\,x} + c_2\,e^{-i\sqrt{-b}\,x} \qquad (c_1, c_2 : \text{定数})$$

と、$b > 0$ の場合の解と同様の形で書き表せる。ただし、$y(x)$ が実数となるためには $c_1 = \bar{c}_2$、つまり c_2 は c_2 の共役複素数でなければならない。

第 5 回　二階定数係数斉次常微分方程式の解法

[教科書 2.2, 2.3]

今回は、次の形の微分方程式 (**二階 定数係数 斉次 常微分方程式**) の解法を学ぶ。

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0 \qquad (a, b : \text{定数}) \tag{5.1}$$

5.1　復習: $a = 0$ の場合

前回の講義で、$a = 0$ の場合には以下の通りに一般解が得られることを説明した。

$$y'' + b\,y = 0 \qquad y(x) = \begin{cases} C_1 \sin(\sqrt{b}\,x) + C_2 \cos(\sqrt{b}\,x) & (b > 0) \\ C_1\,x + C_2 & (b = 0) \\ C_1\,e^{\sqrt{-b}\,x} + C_2\,e^{-\sqrt{-b}\,x} & (b < 0) \end{cases} \qquad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{5.2}$$

方程式 $y'' + b\,y = 0$ が二階微分方程式であることに対応して、一般解は二つの任意定数 (C_1, C_2) を含む。

式 (5.2) のうち、特に $b < 0$ の場合には、**解の形を指数関数** $y(x) = e^{\lambda x}$ **に仮定する**ことで解が得られる。ただし、λ は定数で、微分方程式が満たされるように決める。$y(x) = e^{\lambda x}$ を $y'' + b\,y = 0$ に代入してみると

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad \Rightarrow \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \tag{5.3}$$

$$\therefore \quad y'' + b\,y = \lambda^2 e^{\lambda x} + b \times e^{\lambda x} = \left(\lambda^2 + b\right) e^{\lambda x} = 0\ . \tag{5.4}$$

式 (5.4) が満たされるためには、係数 $\lambda^2 + b$ がちょうどゼロになってればよい。$b < 0$ と仮定しているため、その解は

$$\lambda^2 + b = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = +\sqrt{-b},\ -\sqrt{-b}\ . \tag{5.5}$$

式 (5.5) が λ の 2 次方程式であることに対応して、解 λ も 2 つ得られた。

- $\lambda = \sqrt{-b} \ \Rightarrow\ y = e^{\sqrt{-b}\,x}$, $\lambda = -\sqrt{-b} \ \Rightarrow\ y = e^{-\sqrt{-b}\,x}$ は、どちらも微分方程式 $y'' + b\,y = 0$ の解になっている。

- 方程式 $y'' + b\,y = 0$ は y **について線形なので、2 つの解の線形結合も解となる。**

以上より、方程式 $y'' + b\,y = 0$ の**一般解**が以下の通り得られる。

$$y'' + b\,y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = C_+\,e^{\sqrt{-b}\,x} + C_-\,e^{-\sqrt{-b}\,x} \quad \left(C_+, C_- : \text{定数}\right) \tag{5.6}$$

5.2　一般の場合: 特性方程式

前節で使った**解を指数関数** $y(x) = e^{\lambda x}$ **の形に仮定する方法**は、実は一般の場合について微分方程式 (5.1) を解く際にもそのまま使える。実際、$y(x) = e^{\lambda x}$ を方程式 (5.1) に代入してみると

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad \Rightarrow \quad y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \tag{5.7}$$

$$\therefore \quad y'' + a\,y' + b\,y = \lambda^2 e^{\lambda x} + a \times \lambda e^{\lambda x} + b \times e^{\lambda x} = \left(\lambda^2 + a\,\lambda + b\right) e^{\lambda x} = 0\ . \tag{5.8}$$

式 (5.8) を満たすためには、係数 $\lambda^2 + a\,\lambda + b$ がゼロになればよい。この方程式は微分方程式 (5.1) の**特性方程式**と呼ばれており、これを解くことで指数 λ が得られる。導出方法からも見て取れる通り、**元の微分方程式 (5.1) について** $y'' \to \lambda$, $y' \to \lambda$, $y \to 1$ **と置き換えた式になっている。**

方程式 (5.1) の特性方程式

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}\ . \tag{5.9}$$

特性方程式の二つの解 λ を $y(x) = e^{\lambda x}$ に代入することで、微分方程式 (5.1) の解が二つ得られる。それらの線型結合を取ることで、一般解が以下のように得られる。

方程式 (5.1) の一般解

$$y = C_+\, e^{\left(-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}\right)x} + C_-\, e^{\left(-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}\right)x} \qquad \big(C_+, C_- : \text{定数}\big) \tag{5.10}$$

方程式 (5.1) を単に解くだけであれば、解 (5.10) が一般解になっているので話は終わりである。しかし、この講義で出てくる様々な例のように、微分方程式の解として実数解だけを考える場合にはもう少し注意が必要である。以下、順を追って説明する。

5.3 特性方程式が実数解を持つ場合

まず、**特性方程式 (5.9) が 2 つの異なる実数解を持つ場合**を考える。この場合には、任意定数 C_+, C_- を実数に取りさえすれば、一般解 (5.10) は実数解を与える。

■ 例） 次の初期値問題を解く。

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{5.11}$$

(解答例)
指数関数型の解 $y = e^{\lambda x}$ を仮定して、方程式 (5.11) の特性方程式を導出すると

$$y'' + y' - 2y = \left(\lambda^2 + \lambda - 2\right) e^{\lambda} = 0 \qquad \therefore\ \ \lambda^2 + \lambda - 2 = 0\ . \tag{5.12}$$

この特性方程式を解くことで、今回の場合には 2 つの実数解 λ が得られる。

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2, 1\ . \tag{5.13}$$

これらの λ の値を $y = e^{\lambda x}$ に代入し、それらの線型結合を取れば方程式 (5.11) の一般解が得られる。

$$y = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x} \qquad \big(C_1, C_2 : \text{定数}\big)\ . \tag{5.14}$$

あとは、初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ が満たされるように定数 C_1, C_2 を定めてやればよい。一般解 (5.14) から $y(0), y'(0)$ の値を求めて、初期条件を課すと

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x}\Big|_{x=0} = C_1 + C_2 = 1\ , \\ y'(0) &= \frac{d}{dx}\left(C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x}\right)\Big|_{x=0} = -2C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x}\Big|_{x=0} = -2C_1 + C_2 = 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\therefore \quad C_1 = \frac{1}{3}\ , \quad C_2 = \frac{2}{3}\ , \qquad y(x) = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x} = \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{x}\ . \tag{5.16}$$

5.4 特性方程式が複素解を持つ場合

次に、**特性方程式 (5.9) が複素解を持つ場合、すなわちこの方程式の判別式が負** ($a^2 - 4b < 0$) **となる場合**について考える。この場合でも方程式 (5.1) の一般解は式 (5.10) で与えられるが、解 $y(x)$ が実数値をとることを要求すると以下のような調整が必要となる。

◆ 特性方程式の複素解:

判別式が負 ($a^2-4b<0$) となる場合、特性方程式 **(5.9)** の解は共役複素数のペアとなる。

$$\lambda^2+a\,\lambda+b=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}=-\frac{a}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{4b-a^2}\equiv-\frac{a}{2}\pm i\,\omega \tag{5.17}$$

ただし、表式を簡単化するために $\omega\equiv\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}$ と略記した。

◆ オイラーの公式:

式 (5.17) の λ を使って一般解 (5.10) を書き下すにあたり、複素指数関数の式である**オイラーの公式**が必要になるので導入する。導出はこの講義では省略する。

オイラーの公式

$$e^{\alpha+i\beta}=e^{\alpha}\left(\cos\beta+i\sin\beta\right) \qquad \big(\alpha,\beta:(\text{実})\ \text{定数}\big) \tag{5.18}$$

◆ 一般解の表式:

式 (5.17) の λ を $y(x)=e^{\lambda x}$ に代入して解を二つ求め、それらの線形結合を取り一般解を構成すると

$$\begin{aligned} y(x)&=C_+\,e^{\left(-\frac{a}{2}+i\,\omega\right)x}+C_-\,e^{\left(-\frac{a}{2}-i\,\omega\right)x} \qquad\qquad (C_+,C_-:\text{定数})\\ &=e^{-\frac{a}{2}x}\left\{C_+\left[\cos(\omega x)+i\sin(\omega x)\right]+C_-\left[\cos(-\omega x)+i\sin(-\omega x)\right]\right\}\\ &=e^{-\frac{a}{2}x}\left[(C_++C_-)\cos(\omega x)+(C_+-C_-)\,i\sin(\omega x)\right]\ . \end{aligned} \tag{5.19}$$

2 番目の等号ではオイラーの公式 (5.18) を用いて指数関数を三角関数で表した。

ここで、**一般解 (5.19) が実数値を取る**ことを要求する。やや天下り的ではあるが、そのためには **C_+ と C_- を互いに共役な複素数**にとればよい。

$$C_+=A+B\,i\ ,\quad C_-=A-B\,i \qquad (A,B:\text{実定数}) \tag{5.20}$$

$$\Rightarrow\quad C_++C_-=2A\ ,\quad C_+-C_-=2B\,i \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad y(x)&=e^{-\frac{a}{2}x}\left[(C_++C_-)\cos(\omega x)+(C_+-C_-)\,i\sin(\omega x)\right]\\ &=e^{-\frac{a}{2}x}\left[2A\cos(\omega x)-2B\sin(\omega x)\right]\ . \end{aligned} \tag{5.22}$$

表式を簡単化するために任意定数を $C_0=2A,\,C_1=-2B$ と定義し直すと、以下の表式が得られる。

特性方程式が複素解を持つ場合の一般解

$$y(x)=e^{-\frac{a}{2}x}\left[C_1\cos(\omega x)+C_2\sin(\omega x)\right] \qquad \left(C_1,C_2:\text{定数},\ \ \omega=\tfrac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}\right)\ . \tag{5.23}$$

この式は、以前導出した一般解の表式 (5.10) とほぼ同じものであることを強調しておく。これについて、表式に実数値だけが現れるように任意定数を調整して書き換えたものが式 (5.23) である。

特性方程式の解 $\lambda=-\frac{a}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{4b-a^2}=-\frac{a}{2}\pm i\omega$ について、**λ の実部 $-\frac{a}{2}$ は右辺全体にかかる指数関数 $e^{-\frac{a}{2}x}$ の指数に、λ の虚部 ω は三角関数の角振動数 ($\sin(\omega x),\cos(\omega x)$) になる**点が特徴。

■ 例） 次の微分方程式の一般解を求める。

$$y''+y'+y=0 \tag{5.24}$$

(解答例)

式 (5.24) に対応する特性方程式を解くと

$$\lambda^2+\lambda+1=0 \qquad\Rightarrow\qquad \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\ . \tag{5.25}$$

この λ に基づいて一般解を求めると

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right] \qquad \left(C_1, C_2 : \text{定数}\right) \ . \tag{5.26}$$

5.5 特性方程式が重解を持つ場合

最後に、特性方程式 (5.9) が重解を持つ場合、すなわちこの方程式の判別式がゼロ ($a^2 - 4b = 0$) となる場合について考える。このとき、指数関数型の解 $y = e^{\lambda x}$ は一つしか得られず、これだけを使って二階微分方程式 (5.1) の一般解を構成することができない。

この場合、まず特性方程式の解としては重解が一つ得られる。

$$0 = \lambda^2 + a\,\lambda + b = \lambda^2 + a\,\lambda + \frac{a^2}{4} = \left(\lambda + \frac{a}{2}\right)^2 \qquad \therefore \quad \lambda = -\frac{a}{2} \ . \tag{5.27}$$

この λ に対応して、方程式 (5.1) の一般解は以下のようになることが示せる。

特性方程式が重解 $\lambda = -\frac{a}{2}$ を持つ場合の一般解

$$y(x) = (C_0 + C_1\,x)\,e^{-\frac{a}{2}x} \qquad \left(C_0, C_1 : \text{定数}\right) \tag{5.28}$$

($\because$) まず、判別式がゼロ ($a^2 - 4b = 0$) となる場合の特性方程式の解 λ は

$$0 = \lambda^2 + a\,\lambda + b = \lambda^2 + a\,\lambda + \frac{a^2}{4} = \left(\lambda + \frac{a}{2}\right)^2 \qquad \therefore \quad \lambda = -\frac{a}{2} \ . \tag{5.29}$$

この λ に対応して、$a^2 - 4b = 0$ の場合の微分方程式 (5.1) の解が一つ得られる。

$$y'' + a\,y' + b\,y = y'' + a\,y' + \frac{a^2}{4}\,y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = C\,e^{\lambda x} = C\,e^{-\frac{a}{2}x} \quad \left(C : \text{定数}\right) \tag{5.30}$$

方程式 (5.1) の一般解を構成するためには、式 (5.30) とは独立なもう一つの解を作る必要がある。以下では、その解を定数変化法で求める。

式 (5.30) の解 $y(x)$ について、定数 C を x の関数 $C(x)$ に置き換えて得られる $y(x) = C(x)e^{-\frac{a}{2}x}$ を元の微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned}
0 &= y'' + a\,y' + \frac{a^2}{4}\,y \\
&= \left(C(x)e^{-\frac{a}{2}x}\right)'' + a\,\left(C(x)e^{-\frac{a}{2}x}\right)' + \frac{a^2}{4}\,C(x)e^{-\frac{a}{2}x} \\
&= C''(x)e^{-\frac{a}{2}x} - a\,C'(x)e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{4}C(x)e^{-\frac{a}{2}x} + a\,\left(C'(x)e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2}C(x)e^{-\frac{a}{2}x}\right) + \frac{a^2}{4}\,C(x)e^{-\frac{a}{2}x} \\
&= C''(x)e^{-\frac{a}{2}x} \ .
\end{aligned} \tag{5.31}$$

この方程式は、右辺の係数 $C''(x)$ がゼロになれば満たされる。そのとき、$C(x)$ は一般に

$$C''(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C(x) = C_0 + C_1\,x \quad (C_0, C_1 : \text{定数}) \ . \tag{5.32}$$

この $C(x)$ を $y(x) = C(x)e^{-\frac{a}{2}x}$ に代入することで、微分方程式 (5.30) の一般解が得られる。

$$y(x) = (C_0 + C_1\,x)\,e^{-\frac{a}{2}x} \ . \tag{5.33}$$

第 6 回　二階非斉次常微分方程式の解法

[教科書 2.5, 2.8]

今回の内容：

- 自然現象のモデル化
- 初期値問題、境界値問題
- 二階非斉次方程式

6.1　復習: 二階 定数係数 斉次 常微分方程式

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0 \qquad (a, b : \text{定数}) \tag{6.1}$$

解法の手順：

1. 解を $y(x) = e^{\lambda x}$ (x: 定数) の形に仮定する。
2. この $y(x)$ を式 (6.1) に代入することで**特性方程式**を求める。
$$0 = y'' + a\,y' + b\,y = e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + a\,\lambda + b\right) \qquad \therefore \quad \lambda^2 + a\,\lambda + b = 0$$
3. 特性方程式を解いて λ を求める。
$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \equiv \lambda_\pm$$
4. 得られた λ を $y(x) = e^{\lambda x}$ に代入して 2 つの特解を作り、それらの線型結合を取れば、式 (6.1) の一般解が得られる。
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_+ x} + C_2 e^{\lambda_- x} \qquad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{6.2}$$

ただし、$y(x)$ を実数だけを使って表すには、特性方程式の判別式 $a^2 - 4b$ の符号によって場合分けをする必要がある。

- $a^2 - 4b > 0$ の場合: $\lambda_\pm$ は実数となる。そのため、式 (6.2) の $y(x)$ がそのまま式 (6.1) の実数解を与える (ただし C_1, C_2: 実数)。

- $a^2 - 4b < 0$ の場合: $\lambda_\pm$ は互いに共役な複素数になる。ここで
$$\lambda_\pm = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} = -\frac{a}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4b - a^2} \equiv -\frac{a}{2} \pm i\omega$$
この $\lambda_\pm$ を用いて一般解 (6.2) を書き下し、オイラーの公式 $\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ を用いて変形することで次の表式を得る。
$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)\right) \qquad \left(C_1, C_2 : \text{定数}\right) \tag{6.3}$$
ただし、表式を単純化するために式 (6.2) の定数 C_1, C_2 を再定義した。

- $a^2 - 4b = 0$ の場合: $\lambda_+ = \lambda_- = -a/2$ となり、$y(x) = e^{\lambda_+ x}$ と $y(x) = e^{\lambda_- x}$ が互いに等しくなってしまうために、式 (6.2) が一般解にならない。この場合の一般解は
$$y(x) = (C_0 + C_1\,x)\,e^{-\frac{a}{2}x} \tag{6.4}$$
となることが示せる (導出は前回の講義ノート参照)。

6.2　自然現象のモデル化

方程式 (6.1) は、物体の振動や回路を流れる電流の振る舞いなど、様々な自然現象を表すのに使える。その例を少しだけ紹介する。

気分の問題だが、この章では独立変数として x の代わりに時刻 t を使い、$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$ と表す。

6.2.1　ばねの振動

質量 m の点粒子が、原点 $y = 0$ とばね定数 k のばねでつながれており、また粒子には速度に比例する抵抗力 $c\,v(t)$ がかかるとする。このとき、粒子の運動は次の微分方程式に従う:

$$m\,a(t) = -c\,v(t) - k\,y(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad m\,\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = 0\ .$$

$$\therefore \quad \ddot{y} + \frac{c}{m}\,\dot{y} + \frac{k}{m}\,y = 0\ . \tag{6.5}$$

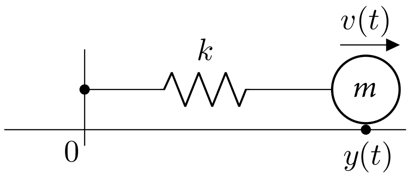


図 1: ばねでつながれた質量 m の質点の運動。ばねは原点の向きに $ky(t)$ の力をおよぼし、また点粒子には速度 $v(t) = \dot{y}(t)$ と逆向きに $c\,v(t)$ の抵抗力がかかるものとする。

式 (6.5) は定数係数の二階斉次方程式なので、先ほど説明した方法で解くことができる。$a = c/m$, $b = k/m$ と置き換えれば直ちに解が得られて

$$\lambda_\pm = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk} \tag{6.6}$$

ここで、よく想定する状況 ($m > 0$, $c > 0$, $k > 0$) であれば $\lambda_\pm < 0$ となる。

- $c^2 - 4mk > 0$ の場合:

  ばねの力 $k\,y(t)$ と比べて抵抗力 $c\,v(t)$ が大きい場合に相当する。点粒子の位置は

  $$y(t) = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}$$

  で与えられる。$\lambda_\pm < 0$ より、位置 $y(t)$ は時間がたつにつれて原点に指数的に収束する ($y(t) \to 0$)。

- $c^2 - 4mk < 0$ の場合: 抵抗力と比べてばねの力が大きい場合に相当する。点粒子の位置は

  $$y(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\right) \qquad \left(\omega = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2}\right)$$

  点粒子の位置は原点を中心とした**減衰振動**をする。振動の振幅は時間について指数的に減衰する ($\propto e^{-\frac{c}{2m}t}$)。

- $c^2 - 4mk = 0$ の場合:

  $$y(t) = (C_0 + C_1\,x)\,e^{-\frac{c}{2m}t}\ .$$

  上記 2 つの場合の中間的な状態で、点粒子の位置は振動せずに原点に収束していく。

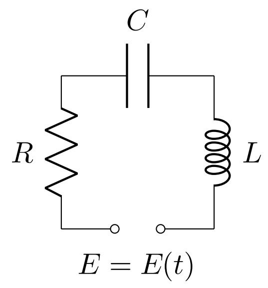


図 2: LRC 回路。回路に電流 $I(t)$ が流れているとする。

6.2.2　LRC 回路

図 2 で表されるような、抵抗 R, コンデンサ C, コイル L で構成される回路があったとする。この回路に電圧 $E(t)$ がかけられたときに流れる電流 $I(t)$ を求めてみる。

電流 $I(t)$ が抵抗 R, コンデンサ C, コイル L に流れるとき、各素子における電圧降下は

$$E_R = R\,I\ , \quad E_C = \frac{1}{C}\int I(t)dt\ , \quad E_L = L\frac{dI}{dt}\ . \tag{6.7}$$

この合計が回路にかける電圧 $E(t)$ に等しくなるので、次の方程式が成立する。

$$R\,I + \frac{1}{C}\int I(t)dt + L\frac{dI}{dt} = E(t)\ . \tag{6.8}$$

この方程式全体の時間微分を取れば、次のような二階微分方程式が得られる。

$$L\ddot{I} + R\,\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{E} \tag{6.9}$$

特に、回路にかける電圧をゼロ ($E = 0$) とすれば、式 (6.2) の形の微分方程式が得られる。

式 (6.5) と比較して、インダクタンス L, 抵抗 R, キャパシタンスの逆数 $1/C$ がそれぞれ点粒子の質量 m, 抵抗力の係数 c, ばね定数 k にちょうど対応していることが分かる。微分方程式として全く同じ形をしているので、解として得られる電流 $I(t)$ と粒子の位置 $y(t)$ の時間発展も互いに一致する。

6.3　初期値問題・境界値問題

式 (6.1) の一般解 (6.2) には二つの任意定数 C_1, C_2 が含まれる。これらの値を決めて特定の解を得るためには、解について 2 つの境界条件を課す必要がある。以下ではその代表例を見てみる。

6.3.1　初期値問題

x の初期値 x_0 における y とその一階微分 y' の値を指定することで、任意定数の値を決めて特定の解を得ることができる。この種類の問題は**初期値問題**と呼ばれる。

例）$x = 0$ における初期条件が課された次の問題を解いてみる。

$$y'' + 4y' + 8y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{6.10}$$

まず、微分方程式 $y'' + 4y' + 8y = 0$ の一般解を求める。この方程式に対応する特性方程式を立てて解くと

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -2 + 2i\ . \tag{6.11}$$

したがって、一般解は

$$y(x) = e^{-2x}\left(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\right) \quad \left(C_1, C_2 : \text{定数}\right) \ . \tag{6.12}$$

この一般解に初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ を課して任意定数を決める。

$$1 = y(0) = e^0\left(C_1\cos(0) + C_2\sin(0)\right) = C_1 \qquad \therefore \quad C_1 = 1 \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned} 0 = y'(0) &= \frac{d}{dx}\left[e^{-2x}\left(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\right)\right]\Big|_{x=0} \\ &= -2e^{-2x}\left(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\right) + e^{-2x}\left(-2C_1\sin(2x) + 2C_2\cos(2x)\right)\Big|_{x=0} \\ &= -2C_1 + 2C_2 \qquad \therefore \quad C_2 = C_1 = 1 \end{aligned} \tag{6.14}$$

上記で得られた C_1, C_2 を代入することで、初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ を満たす解が得られる。

$$y(x) = e^{-2x}\left(\cos(2x) + \sin(2x)\right) \ . \tag{6.15}$$

6.3.2 境界値問題

2 つの異なる x の値 $(x = x_1,\ x = x_2)$ における $y(x)$（やその微分など）の値を指定することでも、任意定数を一意に決めることができる。この種の問題を**境界値問題**と言う。
例）$x = 0,\ x = \pi/4$ における初期条件が課された次の問題を解いてみる。

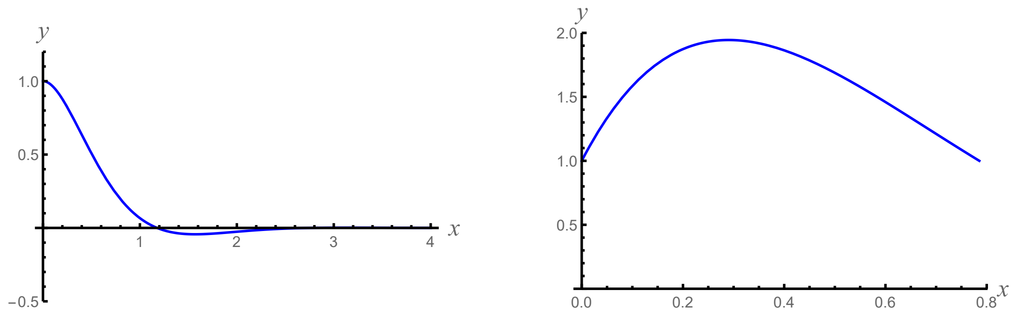
$$y'' + 4y' + 8y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \tag{6.16}$$

まず、この式の一般解は式 (6.12) で与えられる。これに境界条件を課すと

$$y(0) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 1 \tag{6.17}$$

$$1 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}\left(C_1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}C_2 \qquad \therefore \quad C_2 = e^{\frac{\pi}{2}} \tag{6.18}$$

$$\therefore \quad y(x) = e^{-2x}\left(\cos(2x) + e^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\right) \ . \tag{6.19}$$



(a) 初期値問題の解 (6.15)　　(b) 境界値問題の解 (6.19)

図 3: 本節で解いた初期値問題 (6.10)、境界値問題 (6.16) の解。

6.4 二階非斉次方程式

今回と次回の講義で、**非斉次**な二階微分方程式の解法を学ぶ。

$$y'' + a\,y' + b\,y = r(x) \qquad (a, b : \text{定数}) \tag{6.20}$$

ただし、簡単のため斉次方程式の部分 (左辺) は定数の係数を持つとする。

この方程式について、一般に以下の性質が成立する。第 3 回の講義で取り扱った**一階非斉次方程式**の性質とほぼ同様である。

まず、$y = y_*(x)$ が式 (6.20) を満たす**特解**であるとする。すなわち

$$y_*'' + a\,y_*' + b\,y_* = r(x)\ . \tag{6.21}$$

さらに、式 (6.20) で $r(x) = 0$ として得られる**斉次方程式**の 2 つの独立な解を $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ とする。すなわち

$$y_1'' + a\,y_1' + b\,y_1 = 0\ , \tag{6.22}$$

$$y_2'' + a\,y_2' + b\,y_2 = 0\ . \tag{6.23}$$

この時、$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ (C_1, C_2: 定数) は**斉次方程式** $y'' + a\,y' + b\,y = 0$ **の一般解**となる。以上の解を用いて、**非斉次方程式 (6.20) の一般解**は

$$y(x) = y_*(x) + C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) \qquad \big(C_1, C_2 : \text{定数}\big) \tag{6.24}$$

($\because$) 式 (6.24) の $y(x)$ が微分方程式 (6.20) の左辺に代入してみると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} y'' + a\,y' + b\,y &= (y_* + C_1\,y_1 + C_2\,y_2)'' + a\,(y_* + C_1\,y_1 + C_2\,y_2)' + y_* + C_1\,y_1 + C_2\,y_2 \\ &= \big(y_*'' + a\,y_*' + b\,y_*\big) + \big(y_1'' + a\,y_1' + b\,y_1\big) + \big(y_2'' + a\,y_2' + b\,y_2\big) \\ &= r + 0 + 0 = r\ . \end{aligned} \tag{6.25}$$

式変形のために、方程式 (6.20) の左辺が y について線形であるために y_*, y_1, y_2 それぞれについての式に分解でき、それらを式 (6.21), (6.22), (6.23) で書き換えられることを用いた。

したがって、式 (6.24) は式 (6.20) の解である。また、式 (6.24) は 2 つの定数パラメタを持つため、式 (6.20) の一般解となる。

以上をまとめると、非斉次方程式 (6.20) の解は以下のように与えられる。

(非斉次方程式の一般解) = (非斉次方程式の特解) + (斉次方程式の一般解)

したがって、手段を問わず**非斉次方程式の特解を一つ見つけられれば、それに斉次方程式の一般解を足し合わせることで、非斉次方程式の一般解が得られる**。一般的な解法については次回の講義で解説する。

例) 次の微分方程式の一般解を求める。

$$y'' + 4y' + 8y = e^x \tag{6.26}$$

まず、**式 (6.20) の特解**を求めるために、$y(x) = C\,e^x$ **(C: 定数) の形に解を仮定**して方程式に代入してみる。すると

$$e^x = y'' + 4y' + 8y = (C\,e^x)'' + 4\,(C\,e^x)' + 8C\,e^x = 13C\,e^x \qquad C = \frac{1}{13}\ . \tag{6.27}$$

したがって、$y(x) = \frac{1}{11}e^x$ は方程式 (6.26) の解（特解)）となっている。

次に、式 (6.26) の右辺をゼロにして得られる**斉次方程式の一般解**を求める。これは、式 (6.10) を解くときに既に求めており、式 (6.12) のとおり

$$y'' + 4y' + 8y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{-2x}\,(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)) \qquad \big(C_1, C_2 : \text{定数}\big)\ . \tag{6.28}$$

以上の結果より、**式 (6.26) の一般解**は、上記の特解と一般解を足し合わせることで得られる。

$$y(x) = \frac{1}{13}e^x + e^{-2x}\,(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)) \qquad \big(C_1, C_2 : \text{定数}\big)\ . \tag{6.29}$$

第7回　二階非斉次常微分方程式の解法 (続き)

[教科書 2.8∼2.10]

今回の内容：

- 復習: 二階非斉次方程式の解の性質
- 特解の構成法 (未定係数法)
- 一般的な解法 (定数変化法)

7.1　復習: 二階非斉次方程式の解

$$y'' + a\,y' + b\,y = r(x) \qquad (a, b : \text{定数}) \tag{7.1}$$

は、$y(x)$ について1次以外の項を持つ**非斉次**微分方程式である。この方程式の解は次で与えられる。

> [非斉次方程式の一般解] = [非斉次方程式の特解] + [斉次方程式の一般解 (2つの定数を含む)]

この性質の説明については前回の講義ノートを参照すること。

非斉次方程式 (7.1) の解法

1. 非斉次方程式 (7.1) を満たす解 (**特解**) $y = y_*(x)$ を一つ見つける。
$$y_*'' + a\,y_*' + b\,y_* = r(x)\ . \tag{7.2}$$
2. 式 (7.1) に対応する**斉次方程式**の一般解を求める。
$$y'' + a\,y' + b\,y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2 \quad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{7.3}$$
3. 非斉次方程式 (7.1) の一般解は、特解 (7.2) と斉次方程式の一般解 (7.3) の和で与えられる。
$$y(x) = y_*(x) + C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2 \qquad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{7.4}$$

7.2　特解の構成法 (未定係数法)

非斉次方程式の一般解を求める問題は、その**非斉次方程式の特解**さえ構成できれば、あとは前回までに学んできた斉次方程式の一般解を求める問題に帰着する。

特解を求めるための一般的な公式は次の節で学ぶが、やや複雑で使いづらい。一方、微分方程式が比較的簡単な場合には、この公式を使わずとも特解を求められる場合がある。そのための方法 (**未定係数法**) をこの節で解説する。

どの場合についても、**方程式 (7.1) の右辺** $r(x)$ **の関数形に応じて特解** $y = y(x)$ **の関数形を予想し**、その係数をうまく調節することで特解を求める。

- **右辺が指数関数 (**$r(x) \propto e^{\alpha x}$**)**　$\Rightarrow$　$y = K\,e^{\alpha x}$ **(**K**: 定数)**

  方程式の右辺 (7.1) が指数関数 $r(x) \propto e^{\alpha x}$ となる時には、それに合わせて特解の形を $e^{\alpha x}$ の定数倍にとってみる。係数 K は、方程式 (7.1) が満たされるように調節する。

例） 次の非斉次方程式の特解を求める。

$$y'' + y' + y = e^{2x} \tag{7.5}$$

右辺の形に合わせて、特解の形を

$$y(x) = K\,e^{2x} \qquad \bigl(C : \text{定数}\bigr) \tag{7.6}$$

と仮定し、式 (7.5) に代入してみる。すると

$$\bigl(K\,e^{2x}\bigr)'' + \bigl(K\,e^{2x}\bigr)' + K\,e^{2x} = 4K\,e^{2x} + 2K\,e^{2x} + K\,e^{2x} = 7K\,e^{2x} = e^{2x}\ . \tag{7.7}$$

これが満たされるためには $K = 1/7$ であればよい。したがって、式 (7.5) の特解は

$$y(x) = K\,e^{2x} = \frac{1}{7}e^{2x}\ . \tag{7.8}$$

非斉次方程式 (7.5) の一般解をさらに求めるためには、対応する斉次方程式の一般解を求めて特解に足せばよい。まず、式 (7.5) に対応する斉次方程式は

$$y'' + y' + y = 0\ . \tag{7.9}$$

この方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\ . \tag{7.10}$$

したがって、斉次方程式 (7.9) の一般解は

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \qquad \bigl(C_1, C_2 : \text{定数}\bigr) \tag{7.11}$$

で与えられる。

非斉次方程式 (7.5) の一般解は、この式の特解 (7.8) と、斉次方程式 (7.9) の特解 (7.11) の和を取ることで得られる。

$$y(x) = \frac{1}{7}e^{2x} + e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \qquad \bigl(C_1, C_2 : \text{定数}\bigr)\ . \tag{7.12}$$

- **右辺がべき関数 ($r(x) \propto x^n\ (n = 0, 1, \ldots)$)** $\Rightarrow$ $y = K_0 + K_1\,x + \cdots + K_n\,x^n$ **($K_{0,1,\ldots,n}$: 定数)**

右辺がべき関数 $r(x) = x^n$ で与えられるとき、特解としては x^n を最高次の項として持つ x の多項式を持ってくる。

例） 次の非斉次方程式の特解を求める。

$$y'' + y' + y = x^2 \tag{7.13}$$

この場合には、特解を次の形に仮定する。

$$y(x) = K_0 + K_1\,x + K_2\,x^2 \qquad \bigl(K_{0,1,2} : \text{定数}\bigr) \tag{7.14}$$

これを式 (7.13) に代入すると

$$\begin{aligned}
&\bigl(K_0 + K_1\,x + K_2\,x^2\bigr)'' + \bigl(K_0 + K_1\,x + K_2\,x^2\bigr)' + \bigl(K_0 + K_1\,x + K_2\,x^2\bigr) \\
&= 2K_2 + (K_1 + 2K_2\,x) + \bigl(K_0 + K_1\,x + K_2\,x^2\bigr) \\
&= 2K_2 + K_1 + K_0 + (2K_2 + K_1)\,x + K_2\,x^2 \\
&= x^2\ .
\end{aligned} \tag{7.15}$$

この式が満たされるためには

$$2K_2 + K_1 + K_0 = 0\,,\quad 2K_2 + K_1 = 0\,,\quad K_2 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad K_2 = 1\,,\quad K_1 = -2\,,\quad K_0 = 0\ . \tag{7.16}$$

したがって、方程式 (7.13) の特解は

$$y(x) = K_0 + K_1\,x + K_2\,x^2 = -2x + x^2\ . \tag{7.17}$$

- **右辺が三角関数 ($r(x) \propto \sin(kx), \cos(kx)$)　$\Rightarrow$　$y = K_1\cos(kx) + K_2\sin(kx)$ (K_1, K_2: 定数)**

例）次の非斉次方程式の特解を求める。

$$y'' + y' + y = \sin(2x) \tag{7.18}$$

この場合には、特解を次の形に仮定する。

$$y(x) = K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x) \qquad \big(K_{1,2} : 定数\big) \tag{7.19}$$

これを式 (7.18) に代入すると

$$\begin{aligned}
&[K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x)]'' + [K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x)]' + [K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x)] \\
&= [-4K_1\cos(2x) - 4K_2\sin(2x)] + [-2K_1\sin(2x) + 2K_2\cos(2x)] + K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x) \\
&= (-3K_1 + 2K_2)\cos(2x) + (-2K_1 - 3K_2)\sin(2x) \\
&= \sin(2x)
\end{aligned} \tag{7.20}$$

この式が満たされるためには

$$-3K_1 + 2K_2 = 0\,,\quad -2K_1 - 3K_2 = 1 \qquad\Leftrightarrow\qquad K_1 = -\frac{2}{13}\,,\quad K_2 = -\frac{3}{13}\,. \tag{7.21}$$

したがって、式 (7.18) の特解は

$$y(x) = K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x) = -\frac{2}{13}\cos(2x) - \frac{3}{13}\sin(2x)\ . \tag{7.22}$$

注意点)

- **上記の方法がうまくいくのは、特解の形を正しく仮定できたときだけである。**間違った関数形を仮定してしまった場合には、係数をどう選んでも両辺が (恒等的には) 等しくならず、特解も求まらないので注意すること。

- $r(x)$ の関数形が以上で扱った例の和となっている場合には、以上で用いた特解の関数形の和をとって計算するとうまくいく。

  例）$y'' + y' + 1 = e^x + x^2$ の特解を求めるとする。

  この場合には、特解の形を $y(x) = K\,e^x + K_0 + K_1x + K_2x^2$ ($K, K_{0,1,2}$: 定数) と仮定する。途中計算は省略するが、この $y(x)$ を $y'' + y' + 1 = e^x + x^2$ に代入して両辺を比較することで、$K = 1/7, K_2 = 1, K_1 = -2, K_0 = 0$ が得られる。この結果を $y(x) = K\,e^x + K_0 + K_1x + K_2x^2$ に代入することで、特解が $y(x) = \frac{1}{7}e^x - 2x + x^2$ と得られる。

  計算中に仮定した特解の形も、最終的に得られた特解も、全て上記で解説した例に出てくる特解の和を取ったものになっていることに注意する。

- 非斉次方程式によっては、上記の計算法で仮定する特解が、斉次方程式方程式の解 (7.3) と一致してしまう場合がある。この場合には、上記の方法で用意する特解の候補に x をかけたものを代わりに使う。

  例）$r(x) = e^x$ で、e^x が斉次方程式の解の一つと一致　$\Rightarrow$　特解の形を $r(x) = C\,x\,e^x$ と仮定

- さらに例外的な場合として、斉次方程式の特性方程式が重解を持ち、その重解に対応する斉次方程式の解と $r(x)$ が一致してしまう場合もある。この場合には、上述の特解の候補に x^2 をかけたものを代わりに使うとうまくいく。

  例）$y'' - 2y' + 1 = e^x$ の一般解を求めるとする。

  この式に対応する斉次方程式は $y'' - 2y' + 1 = 0$ で、その特性方程式を解くと $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = 1$ (重解) となる t。したがって、この場合の斉次方程式の一般解は $y(x) = (C_0 + C_1\,x)\,e^{\lambda x}$ である。一方、元の非斉次方程式の特解を求めるために、**特解の形を** $y(x) = C\,x^2 e^x$ **(**C**: 定数) と仮定**して代入すると

  $$\left(Cx^2e^x\right)'' - 2\left(Cx^2e^x\right)' + Cx^2e^x = \cdots = 2Ce^x = e^x \qquad \therefore\ \ C = \frac{1}{2}$$

  となり、$y(x) = C\,x^2e^x = \frac{1}{2}x^2e^x$ が非斉次方程式 $y'' - 2y' + 1 = e^x$ の特解として得られる。

7.3 一般的な解法 (定数変化法)

前節の方法は、非斉次項 $r(x)$ が比較的単純で、特解の関数形を事前に予測できる場合にしか使えない。一方、**定数変化法**を使うことで、任意の関数 $r(x)$ に対して非斉次方程式 (7.1) の特解を求めるための公式を作ることができる。

ただし、**できる限り前節の方法を使った方が簡単に特解を求められる**ので注意すること。

非斉次方程式 (7.1) の特解の公式

$$y(x) = -\left(\int_{x_1}^{x} \frac{y_2(\hat{x})r(\hat{x})}{W(\hat{x})}d\hat{x}\right)y_1(x) + \left(\int_{x_2}^{x} \frac{y_1(\hat{x})r(\hat{x})}{W(\hat{x})}d\hat{x}\right)y_2(x) \tag{7.23}$$

ここで、

- $y_1(x), y_2(x)$: 式 (7.1) に対応する斉次方程式 ($y'' + ay' + by = 0$) の、互いに独立な解
- x_1, x_2: 任意の定数
- $W(x)$ は以下で定義される x の関数 (**ロンスキアン**と呼ばれる)

$$W(x) \equiv y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \tag{7.24}$$

($\because$) 公式 (7.23) を得るためには、非斉次方程式 (7.1) の特解 $y(x)$ をあえて次の形に書き表すところから計算をスタートする。

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{7.25}$$

ただし、$C_1(x), C_2(x)$ は任意関数で、方程式 (7.1) が満たされるように決める。

この式は単に、未知関数 $r(x)$ を別の未知関数 $C_1(x), C_2(x)$ で書き換えているに過ぎない。さらに、特解 $y(x)$ を書き換えるだけなら未知関数が 1 つだけあれば十分である。そこで、2 つの未知関数 $C_1(x), C_2(x)$ を結びつける関係式 (7.27) を後ほど導入し、未知関数の個数を減らすことにする。

特解を求めるためには、上記の $y(x)$ を非斉次方程式 (7.1) に代入して、式が満たされるように $C_1(x)$, $C_2(x)$ を決めればよい。そのために、まず $y'(x)$ を計算すると

$$y'(x) = (C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x))' = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\ . \tag{7.26}$$

以下の計算では未知関数 $C_1(x), C_2(x)$ を求めていくことになるが、その際に C_1, C_2 の微分項がなるべく少ない方が計算が簡単になる。そこで、$C_1(x), C_2(x)$ が次の関係式を満たすと仮定する:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0\ . \tag{7.27}$$

こう仮定すると、$C_1(x)$ と $C_2(x)$ のどちらかを決めればもう一方が決まるため、式 (7.25) の右辺に含まれる未知関数の個数が実質的に一つになる。

仮定 (7.27) を課すと、$y'(x)$ の表式は

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\ . \tag{7.28}$$

このとき、$y''(x)$ は

$$y''(x) = \big(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\big)' = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x)\ . \tag{7.29}$$

式 (7.28), (7.29) より、式 (7.25) の $y(x)$ を非斉次方程式 (7.1) に代入したものは

$$\begin{aligned} r(x) = y'' + ay' + by &= C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2'' + a\left(C_1y_1' + C_2y_2'\right) + C_1y_1 + C_2y_2 \\ &= C_1\left(y_1'' + ay_1' + by_1\right) + C_2\left(y_2'' + ay_2' + by_2\right) + C_1'y_1' + C_2'y_2' \\ &= C_1'y_1' + C_2'y_2' \end{aligned}$$

$$\therefore \quad C_1'y_1' + C_2'y_2' = r(x) \qquad \big(\text{ただし } C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0\big)\ . \tag{7.30}$$

あとは、式 (7.30) を解いて $C_1(x), C_2(x)$ を決めればよい。まず、(7.30) の 2 つの式を組み合わせて $C_1(x)$ だけの式を作る。$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$ より、$C_2' = -(y_1/y_2)C_1'$ と書き換えられるので

$$r(x) = C_1'y_1' + C_2'y_2' = C_1'y_1' - \frac{y_1}{y_2}C_1' \cdot y_2' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_2}C_1' = -\frac{W(x)}{y_2(x)}C_1'(x) \tag{7.31}$$

$$\therefore \quad C_1'(x) = -\frac{y_2(x)r(x)}{W(x)} \qquad \Rightarrow \qquad C_1(x) = -\int_{x_1}^{x} \frac{y_2(\hat{x})r(\hat{x})}{W(\hat{x})}d\hat{x}\ . \tag{7.32}$$

ただし、x_1 は任意の定数で、$C_1'(x)$ の式を積分する際に生じる積分定数に相当する。また、式を単純化するために、式 (7.24) で定義されるロンスキアン $W(x)$ を用いた。

同様に、$C_2(x)$ だけの式を作って積分すると

$$C_2'(x) = \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)} \qquad \Rightarrow \qquad C_2(x) = \int_{x_2}^{x} \frac{y_1(\hat{x})r(\hat{x})}{W(\hat{x})}d\hat{x}\ . \tag{7.33}$$

先ほどと同様、x_2 は任意の定数である。

式 (7.32), (7.33) を最初に仮定した特解の表式 (7.25) に代入して、公式 (7.23) を得る。

第 9 回　高階常微分方程式、連立微分方程式

[教科書 2.13, 2.14, 3.0∼3.2]

今回の内容： 以下の項目について、基礎と概要だけを解説する。

- 高階常微分方程式
- 高階常微分方程式 → 連立一階常微分方程式
- 連立一階常微分方程式

9.1　高階常微分方程式

これまでの講義では、一階ないし二階までの微分方程式を取り扱ってきた。より高階の微分方程式 $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ で、未知関数 $y(x)$ について線形な非斉次方程式

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = r(x) \qquad \left(y^{(m)}(x) \equiv \frac{d^m}{dx^m} y(x) \right) \tag{9.1}$$

を考える。

この種の方程式の性質を調べるために、簡単な具体例を見てみることにする。

$$y''''(x) = e^x \tag{9.2}$$

この方程式の解を得るためには、単に両辺を x について 4 回積分すればよい。

$$\begin{aligned}
& y'''' = e^x \\
\xrightarrow{\int dx} \quad & y''' = e^x + C_0 \\
\xrightarrow{\int dx} \quad & y'' = e^x + C_0\, x + C_1 \\
\xrightarrow{\int dx} \quad & y' = e^x + \frac{1}{2} C_0\, x^2 + C_1\, x + C_2 \\
\xrightarrow{\int dx} \quad & y = e^x + \frac{1}{6} C_0\, x^3 + \frac{1}{2} C_1\, x + C_2\, x + C_3\ .
\end{aligned} \tag{9.3}$$

ただし、$C_{0,1,2,3}$ は x 積分を行った際に生じた積分定数である。

解 (9.3) の構成要素を観察してみよう。

- 解 (9.3) の右辺第一項は、方程式 (9.2) を満たす特解である。
$$y(x) = e^x \qquad \Rightarrow \qquad y'''' = e^x\ .$$
- 式 (9.3) の第二項以降は、方程式 (9.2) に対応する斉次方程式 $y'''' = 0$ の独立な解
$$y(x) = (\text{定数}),\ x,\ x^2,\ x^3$$
の線型結合を取ったものになっている。

以上の性質は、一般の**線形な**高階微分方程式に共通の性質である。

- 式 (9.1) に対応する**斉次方程式**
$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0 \tag{9.4}$$
の一般解は、この方程式の独立な解 $y = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の線型結合で与えられる:
$$y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x) \qquad \big(C_1, \ldots, C_n : \text{定数}\big) \tag{9.5}$$
特に、n 次の斉次方程式は n 個の独立な解を持ち、一般解は n 個の任意定数を含む。

- 非斉次方程式 (9.1) の一般解は以下の形をとる。

$$y(x) = \big(\text{非斉次方程式の特解}\big) + (\text{斉次方程式の一般解}) \tag{9.6}$$

どちらの性質も、線形の二階微分方程式の解の性質と同様である。方程式が n 階微分までを含むことに対応して、斉次解の独立な解の個数と、一般解が含むパラメタの個数が n に増えている点に注意。

9.2 定数係数 斉次 高階微分方程式

二階微分方程式の場合と同様に、斉次方程式 (9.4) で、係数が定数の場合を考えてみる。

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1 y'(x) + p_0 y(x) = 0 \tag{9.7}$$

この場合には、解を指数関数型 ($y(x) = e^{\lambda x}$, λ は定数) と仮定することで解を求めることができる。$y(x) = e^{\lambda x}$ を式 (9.7) に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= y^{(n)}(x) + p_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1 y'(x) + p_0 y(x) \\ &= \lambda^n e^{\lambda x} + p_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + p_1 \lambda e^{\lambda x} + p_0 e^{\lambda x} = \big(\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0\big)\, e^{\lambda x}\ . \end{aligned} \tag{9.8}$$

この方程式を恒等的に満たすためには、右辺に現れた係数がゼロであればよい。

$$\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 = 0\ . \tag{9.9}$$

この方程式は**斉次方程式 (9.7) の特性方程式**と呼ばれる。λ の n 次方程式であることから、一般には独立な解が n 個存在する。それらの解を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とすると、

$$y(x) = e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x} \tag{9.10}$$

は斉次方程式 (9.7) の独立な解となる。それらの線形結合を取ることで、**斉次方程式 (9.7) の一般解**が得られる:

$$y(x) = C_1\, e^{\lambda_1 x} + C_2\, e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n\, e^{\lambda_n x} \qquad \big(C_1, C_2, \ldots, C_n : \text{定数}\big) \tag{9.11}$$

例)

$$y'''(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0 \tag{9.12}$$

この方程式に対応する**特性方程式**は、式 (9.12) の微分を λ に置き換えた式で与えられる:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0\ . \tag{9.13}$$

この方程式を λ の 3 次方程式として解けば

$$\lambda = 2, 1, -1\ . \tag{9.14}$$

これらの λ の値を $y(x) = e^{\lambda x}$ に代入することで、方程式 (9.12) の独立な解が得られる。それらの線型結合を取れば方程式 (9.12) の一般解が得られる:

$$y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{x} + C_3\, e^{-x}\ . \tag{9.15}$$

初期値問題や境界値問題も二階微分方程式の場合と同様に解くことができるが、n **階微分方程式の解を一つに定めるには** n **個の初期条件・境界条件が必要**となることに注意する。

9.3　高階微分方程式 $\to$ 一階連立微分方程式

これまでは一つの未知変数 $y(x)$ についての微分方程式だけを取り扱ってきた。これを 2 つの変数 $y_1(x), y_2(x)$ についての微分方程式に拡張してみよう。ただし、簡単のため一階微分までを含む定数係数の方程式について考えることにする。

$$\begin{cases} y_1'(x) = a\,y_1(x) + b\,y_2(x) \\ y_2'(x) = c\,y_1(x) + d\,y_2(x) \end{cases} \tag{9.16}$$

実は、これまでに学んできた高階微分方程式を、一階の連立微分方程式に書き換えることができる。例として

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0 \qquad (\alpha, \beta : \text{定数}) \tag{9.17}$$

を書き換えてみることにしよう。

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y' \tag{9.18}$$

と新変数 $y_1(x), y_2(x)$ を定義すると、まず定義式からして

$$y_2 = y' = y_1' \ . \tag{9.19}$$

次に、式 (9.17) を書き換える。$y'' = (y')' = y_2'$ と書けることに気を付けると

$$0 = y'' + \alpha y' + \beta y = y_2' + \alpha y_2 + \beta y_1 \ . \tag{9.20}$$

以上を整理すると、方程式 (9.17) が式 (9.19), (9.20) の 2 つの式に書き換えられたことになる。

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\beta y_1 - \alpha y_2 \end{cases} \tag{9.21}$$

これは、先ほど導入した連立一階微分方程式 (9.16) の形になっている。

上記の例では二階微分方程式を扱ったが、より高階の微分方程式についても

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \ldots \tag{9.22}$$

と新変数 $y_1, y_2, y_3, \ldots$ を導入することで一階微分方程式の組に書き換えることができる。どちらの書き方で解いたとしても、互いに等価な解が得られる。

9.4　連立一階微分方程式の解法

連立一階常微分方程式 (9.16) は、以下のように**行列**を使って書き表せる。

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ . \tag{9.23}$$

この方程式を解くためには、行列 $\mathbf{A}$ の**固有値**、**固有ベクトル**を使うと便利である。

例)

$$\begin{cases} y_1' = \ \ y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + \ \ y_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{9.24}$$

まず、**行列 $\mathbf{A}$ の固有値** λ を求めてみよう。この行列の**固有方程式**は

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 2^2 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \ . \tag{9.25}$$

ただし、$\mathbf{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は単位行列。この方程式を λ について解くことで固有値 λ が得られる。

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \qquad \therefore \lambda = 3, -1 \tag{9.26}$$

各固有値に対応する固有ベクトル $\mathbf{v}$ は次の式で定義される。

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \qquad (\mathbf{v} \neq 0)\ . \tag{9.27}$$

固有値 $\lambda = 3$ については

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_1 + 2v_2 \\ 2v_1 - 2v_2 \end{pmatrix} = 0\ . \tag{9.28}$$

この式を満たす固有ベクトル $\mathbf{v}$ は次のように求められる。

$$-2v_1 + 2v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9.29}$$

同様に、固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは

$$(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + 2v_2 \\ 2v_1 + 2v_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\ . \tag{9.30}$$

ここで、連立微分方程式 (9.23) の解が固有ベクトルに変数 $C(x)$ をかけたもので与えられると仮定する。

$$\mathbf{y} = C(x)\mathbf{v} \tag{9.31}$$

これを方程式 (9.23) に代入すると

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad C'(x)\mathbf{v} = C(x)\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda C(x)\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = \lambda\, C(x) \tag{9.32}$$

この $C(x)$ についての微分方程式を解き、最初に仮定した解 (9.31) に代入すると

$$C'(x) = \lambda\, C(x) \quad \Leftrightarrow \quad C(x) = \tilde{C}\, e^{\lambda x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{y} = \tilde{C}\, e^{\lambda x}\mathbf{v} \quad (\tilde{C} : \text{定数}) \tag{9.33}$$

これは方程式 (9.23) を満たす解になっている。固有値・固有ベクトルの組が 2 つあることに対応して、この形の解も 2 つ得られる。それらの線型結合を取れば方程式 (9.23) の一般解が得られる。今回の場合は

$$\mathbf{y} = C_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} \\ y_2 = C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x} \end{cases} \qquad \left(C_1, C_2 : \text{定数}\right). \tag{9.34}$$

一般に、連立微分方程式 (9.23) の解は次の式で与えられる。

$$\mathbf{y} = C_1\, e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1 + C_2\, e^{\lambda_2 x}\mathbf{v}_2 \qquad \left(C_1, C_2 : \text{定数}\right) \tag{9.35}$$

ただし、$(\lambda_1, \mathbf{v}_1)$ $(\lambda_2, \mathbf{v}_2)$ は係数行列 $\mathbf{A}$ の固有値・固有ベクトルの組である。

2 つの固有値 λ_1, λ_2 が一致する場合にはより詳細な解析が必要になるが、本講義では割愛する。より多くの変数の連立方程式の場合には、変数の個数と同じ大きさを持つ係数行列 $\mathbf{A}$ を考えれば同様の解析を行うことができる。詳細については教科書を参照のこと。

第 10 回　ラプラス変換の基礎

[教科書 (フーリエ解析と偏微分方程式) 1.1, 1.2]

今回の内容：

- ラプラス変換とはなにか
- ラプラス変換の基礎
  - ラプラス変換の定義と逆変換
  - ラプラス変換の諸性質

今回の講義以降、**未知関数 y は t の関数 ($y = y(t)$) であるとする**。時刻 t の関数 $y(t)$ についての時間発展を調べるようなことをだいたい想定している。微分記号 $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ も使う。

10.1　ラプラス変換

この講義において、**ラプラス変換とは常微分方程式 (特に定数係数の初期値問題) を機械的に解くための道具である**。

これまでの講義で常微分方程式の解法をいくつも勉強してきたわけだが、それに重ねて新たな解き方をなぜさらに学ぶのか、と思われる向きもあるかもしれない。説明は様々にできようが、ひとまずこの方法を使って常微分方程式を一つ解いてみよう。

例）次の初期値問題を解く。

$$y'' + \omega^2 y = \sin t\ , \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \tag{10.1}$$

まずは、ラプラス変換を定義しよう。

ラプラス変換の定義

関数 $f(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ **(ただし $s \geq 0$)** は

$$\mathcal{L}[f] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-s\,t}\, dt\ . \tag{10.2}$$

関数 $f(t)$ に e^{-st} をかけてから、t について原点から∞まで積分 したものがラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ である。**結果として得られる $F(s)$ は s の関数**となる。

このラプラス変換は、**微分を変数 s のかけ算に変換する**という特徴がある。導出は後でやる。

$$\mathcal{L}[f'] = s\,\mathcal{L}[f] \ \ \Big(-f(0)\Big) \tag{10.3}$$

$$\mathcal{L}[f''] = s^2\,\mathcal{L}[f] \ \ \Big(-f(0) - s\,f'(0)\Big) \tag{10.4}$$

かっこの中の $f(0), f'(0)$ は、今回の問題では初期条件のためすべてゼロになる。

以下、ラプラス変換を使って方程式 (10.1) を解いていく。図 4 を参照のこと。

1. **微分方程式をラプラス変換する**

   方程式 (10.1) 全体をラプラス変換すると以下のようになる。なお、$Y(s) \equiv \mathcal{L}[y]$ と表す。

   $$\mathcal{L}[y'' + \omega^2 y] = \mathcal{L}[\sin t] \qquad \Leftrightarrow \qquad s^2\,Y(s) + \omega^2 Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\ . \tag{10.5}$$

   ただし、$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$ となることを使った。これも、導出は今後する。

2. 方程式を $Y(s)$ について解く

式 (10.5) は、$Y(s)$ について直ちに解ける。

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+\omega^2}=\frac{1}{\omega^2-1}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\ . \tag{10.6}$$

後の計算の都合上、少しだけ部分分数分解して式を整理した。

3. $Y(s)$ にラプラス逆変換をかけて解 $y(t)$ を得る

最後に、式 (10.6) の $Y(s)$ から方程式 (10.1) の解 $y(t)$ を得る必要がある。このためには、ラプラス変換の逆変換である**ラプラス逆変換**を用いる。

ラプラス逆変換の定義

関数 $F(s)$ のラプラス逆変換 $\mathcal{L}^{-1}[F]=f(t)$ は

$$\mathcal{L}[f]=F(s)\qquad\Rightarrow\qquad\mathcal{L}^{-1}[F]=f(t) \tag{10.7}$$

ラプラス変換した時にちょうど $F(s)$ になるような関数 $f(s)$ がラプラス逆変換 $\mathcal{L}^{-1}[F]$ の結果である。

ラプラス逆変換の詳しい性質は後ほど述べることにして、ひとまず使ってみる。式 (10.6) に関連して、実は次の式が成立する：

$$\mathcal{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\qquad\Rightarrow\qquad\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]=\sin\omega t\ . \tag{10.8}$$

これを使って式 (10.6) のラプラス逆変換を計算すると

$$\begin{aligned}y(t)&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2-1}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right]\\&=\frac{1}{\omega^2-1}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]-\frac{1}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]\right)\\&=\frac{1}{\omega^2-1}\left(\sin t-\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)\ .\end{aligned} \tag{10.9}$$

これが初期値問題 (10.1) の解となる。

比較のため、同じ問題 (10.1) をこれまでに学んできた方法で解いてみよう。

1. **非斉次方程式の特解を求める**

$$y''+\omega^2y=\sin t\qquad\Rightarrow\qquad\cdots\qquad\Rightarrow\qquad y(t)=-\frac{1}{\omega\left(\omega^2-1\right)}\sin\omega t \tag{10.10}$$

2. **斉次方程式の一般解を求める**

$$y''+\omega^2y=0\qquad\Rightarrow\qquad\cdots\qquad\Rightarrow\qquad y(t)=C_1\sin t+C_2\cos t\qquad(C_1,C_2:\text{定数}) \tag{10.11}$$

これに非斉次方程式の特解を加えることで、**非斉次方程式の一般解**が得られる:

$$y(t)=-\frac{1}{\omega\left(\omega^2-1\right)}\sin\omega t+C_1\sin t+C_2\cos t \tag{10.12}$$

3. **非斉次方程式の一般解に、初期条件を課す**

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0\qquad\Rightarrow\qquad\cdots\qquad\Rightarrow\qquad y(t)=-\frac{1}{\omega\left(\omega^2-1\right)}\sin\omega t+\frac{1}{\omega^2-1}\sin t\ . \tag{10.13}$$

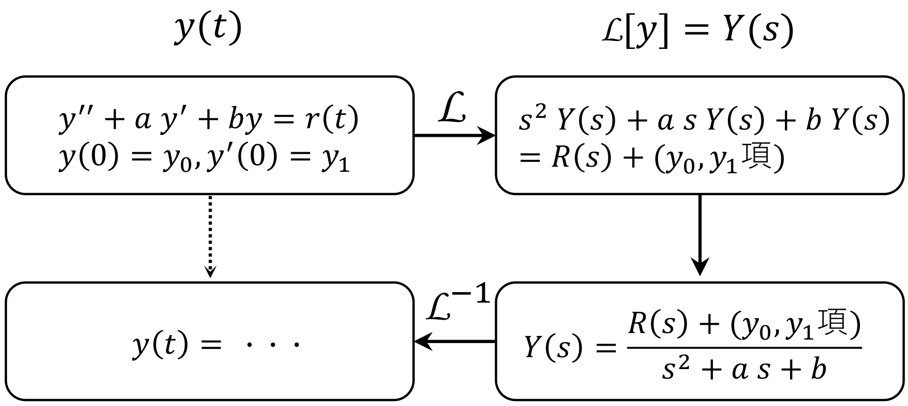


図 4: ラプラス変換による初期値問題の解法の手順。左側がラプラス変換前の関数 $y(t)$, 右側がラプラス変換後の関数 $\mathcal{L}[y] = Y(s)$ に関する式。以前の方法では、左上から左下を直接求めていた。

どちらの解法を簡単に感じるかは意見の分かれるところかもしれないが、ひとまず**ラプラス変換を用いた解法の特徴**をまとめると以下のようになるだろう。

ラプラス変換による解法の特徴

- **関数の微分が s の掛け算に置き換わる。**[式 (10.5)]
- 微分方程式を直接解く代わりに、**代数演算** (足し算・掛け算) だけで式が解ける。[式 (10.6)]
- 以前の解法で必須だった**特解・一般解の導出、初期条件を使った任意定数の決定が不要。**
- 特に、**非斉次項 $r(t)$ が複雑な場合でも、それに対応する特解を求める必要がない。**
  ただし、$r(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[r]$ は求める必要がある。

非斉次項 $r(t)$ は、系に加えられる外力や回路にかけられる電圧などといった**入力**に相当する。一方、微分方程式の解 $y(t)$ は、運動する物体の位置や回路に流れる電流などといった**出力**に相当する。上記の性質により、**複雑な入力 $r(t)$ に対する出力 $y(t)$ を効率よく求められる**のがラプラス変換による解法の長所と言えるかもしれない。

逆に、**ラプラス変換による解法の欠点**としては以下が挙げられよう。

- **定数係数の線形微分方程式**は効率よく解けるようになるが、それ以外（係数が変化する場合、非線形、. . . ）の場合はあまり効力を発揮しない。
- 計算の最初にラプラス変換を、計算の最後に逆ラプラス変換を行う必要があるが、これは個別に計算して求める必要がある。特に、**複雑な関数の (逆) ラプラス変換はうまく求まらない場合もある。**

ただし、**簡単な関数の (逆) ラプラス変換の一覧表**を事前に作っておけば計算の労力をいくらか減らせる。応用上は、そのような一覧表と、**ラプラス変換にまつわる種々の公式**を駆使して計算を進めることになる。

10.2 ラプラス変換の例

ラプラス変換の定義は式 (10.2) に与えた通りである。これを使って、いくつか例を計算してみよう。

- **定数：** $f(t) = C$ (定数) のラプラス変換は
$$\mathcal{L}[C] = \int_0^\infty C\, e^{-st} dt = \frac{C}{-s}\left[e^{-st}\right]_0^\infty = -\frac{C}{s}\left[\left(\lim_{t\to 0} e^{-st}\right) - 1\right] = -\frac{C}{s}[0-1] = \frac{C}{s}\ . \tag{10.14}$$
特に、**1 のラプラス変換は** $\mathcal{L}[1] = 1/s$ となる。

- **指数関数：** $f(t) = e^{\alpha t}$ (α: 定数) のラプラス変換 $\mathcal{L}[e^{\alpha t}]$ は
$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{(\alpha - s)t} dt = \left[\frac{1}{\alpha - s} e^{(\alpha-s)t}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{\alpha - s}\left[\left(\lim_{t\to\infty} e^{(\alpha-s)t}\right) - 1\right]\ . \tag{10.15}$$
このとき、$\alpha - s < 0$ であれば、$\lim_{t\to\infty} e^{(\alpha-s)t} = 0$ となることから
$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{\alpha - s}[0-1] = \frac{1}{s-\alpha}\ . \tag{10.16}$$
一方、$\alpha - s > 0$ のときには $\lim_{t\to\infty} e^{(\alpha-s)t} = \infty$ となり、$\mathcal{L}[e^{\alpha t}]$ も発散してしまって定まらない。

- **べき関数：** $f(t) = t$ のラプラス変換は**部分積分**で計算できる。e^{-st} を先に積分する。
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t] &= \int_0^\infty t\, e^{-st} dt = \left[t \times \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)\right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) dt \\ &= 0 - \frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty} = -\frac{1}{s^2}[0-1] = \frac{1}{s^2}\ .\end{aligned} \tag{10.17}$$
ただし、$\lim_{t\to\infty} t\, e^{-st} = 0$ となることを用いた。

  $\mathcal{L}[t^2]$ を求めるには、上記のような部分積分を 2 回行えばよい。
$$\mathcal{L}[t^2] = \int_0^\infty t^2\, e^{-st} dt = -\frac{1}{s}\left[t^2 e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty 2t\, e^{-st} dt \quad \left[= 0 + \frac{2}{s}\mathcal{L}[t]\right] \tag{10.18}$$
$$\begin{aligned} &= 0 + \frac{2}{s}\left(-\frac{1}{s}\left[t\, e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} dt\right) \\ &= \frac{2}{s}\left(0 - \frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^\infty\right) = \frac{2}{s^3}\ .\end{aligned} \tag{10.19}$$
もちろん、1 行目の式 (10.18) の段階で先ほどの結果 $\mathcal{L}[t] = 1/s^2$ を代入しても同じ結果が得られる。

  一般に、$\mathcal{L}[t^n] = n!/s^{n+1}$ (n : 正の整数) が示せる。導出は別件と併せて次回以降に行う。

10.3 ラプラス変換の性質

- **ラプラス変換の線形性：** ラプラス変換の定義より、以下が従う。
  - (関数の和のラプラス変換) = (ラプラス変換の和)
  - (関数の定数倍のラプラス変換) = (ラプラス変換の定数倍)

2 つの関数 $f(t), g(t)$ の線形結合 $C_1\, f(t) + C_2\, g(t)$ (C_1, C_2 : 定数) をラプラス変換すると
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[C_1\, f + C_2\, g\right] &= \int_0^\infty \left(C_1 f(t) + C_2 g(t)\right) e^{-st} dt = C_1 \int_0^\infty f(t) dt + C_2 \int_0^\infty g(t) dt \\ &= C_1\, \mathcal{L}[f] + C_2\, \mathcal{L}[g]\end{aligned} \tag{10.20}$$
と、$\mathcal{L}[f], \mathcal{L}[g]$ の線形結合に分解できる。係数 C_1, C_2 もラプラス変換の外に出してよい。

その他の性質については次回以降解説する。

第 11 回　ラプラス変換の基礎（続き）

[教科書 (フーリエ解析と偏微分方程式) 1.1, 1.3]

今回の内容：

- ラプラス変換の諸性質（存在条件、一意性）
- 階段関数
- ラプラス変換の第 1・第 2 移動定理

11.1　ラプラス変換の諸性質

前回導入したラプラス変換の定義式

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{11.1}$$

に基づき、その諸性質を説明していく。$\mathcal{L}[f] = F(s)$ とも書く。

11.1.1　存在条件（ラプラス変換が存在する s の範囲）

定義式 (11.1) の積分が発散してしまうと、ラプラス変換 $\mathcal{L}[f]$ も発散してしまって意味をなさない。特に、**被積分関数 $f(t)$ が t について激しく増大する場合には、ラプラス変換も発散する**可能性がある。これを防ぐための条件が必要になる。

ラプラス変換の存在条件

次の式が**全ての $t \geq 0$ について成立**しているとする。

$$|f(t)| \leq Me^{kt} \qquad \big(M > 0, k : 定数\big) \tag{11.2}$$

このとき、**ラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ は $s > k$ を満たす全ての s について存在**する。
すなわち、$s > k$ ならば $F(s)$ は有限値をとる。

$$\because \qquad |F(s)| = \left|\int_0^\infty f(s)e^{-st}dt\right| \leq \int_0^\infty |f(s)|\, e^{-st}dt \leq \int_0^\infty Me^{kt}e^{-st}dt = M\int_0^\infty e^{(k-s)t}dt$$

右辺の積分は $s > k$ $(\Leftrightarrow k - s < 0)$ なら有限値 $\frac{M}{k-s}$ をとる。逆に $k - s \geq 0$ のときには発散する。

例）　$f(t) = -1 - e^{\alpha t}$ (α : 実定数) のラプラス変換が存在するような s の範囲は何か？

まず、$|f(t)|$ の振る舞いを調べてみると、次の式が**全ての $t > 0$** について成り立つことがわかる。

$$|f(t)| = \left|-1 - e^{\alpha t}\right| = 1 + e^{\alpha t} \leq 2e^{\alpha t}\ .$$

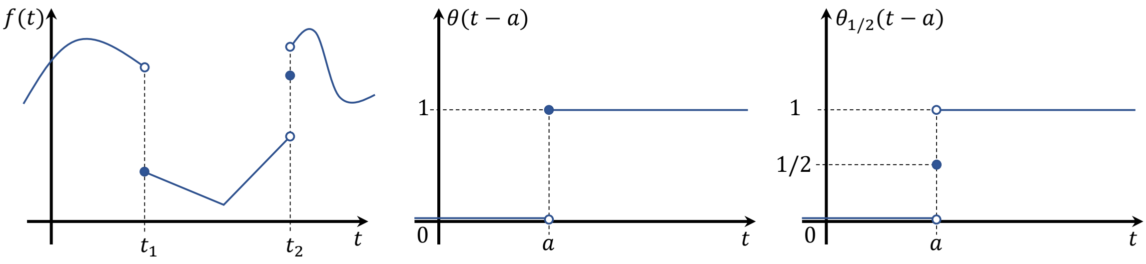
よって、上記の存在条件によれば**ラプラス変換 $F(s)$ は $s > \alpha$ の範囲で存在する**ことがわかる。[2]

11.2　区分的に連続な関数のラプラス変換

ラプラス変換 (10.2) は、$f(t)$ が連続な場合だけでなく、孤立した点で不連続になるような**区分的に連続な関数** (図 5(a) 参照) についても問題なく求められる。[3]

[2]存在条件 (11.2) の式で $k = \alpha, M = 2$ とした場合に相当する。$F(s)$ の存在範囲を求めるだけであれば M はより大きな値に取ってもよく、結果にも影響しない。

[3]より正確には、条件 (11.2) に加えて、関数 $f(t)$ が区間 $(0, \infty)$ で区分的に連続であることがラプラス変換 $\mathcal{L}[f]$ の存在のために必要となる。



(a) 区分的に連続な関数　(b) 階段関数 $\theta(t-a)$　(c) 階段関数 $\theta_{1/2}(t-a)$

図 5: 区分的に連続な関数の例。

区分的に連続な関数の例としては、次で定義される**階段関数** $\theta(t-a)$ が挙げられる (図 5(b) 参照)。

$$\theta(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ 1 & (t \geq a) \end{cases} \qquad (a : \text{定数}) \tag{11.3}$$

階段関数 $\theta(t-a)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[\theta(t-a)]$ を求めてみよう。定義に従って計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\theta(t-a)] &= \int_0^\infty \theta(t-a)e^{-st}dt = \int_0^a \theta(t-a)e^{-st}dt + \int_a^\infty \theta(t-a)e^{-st}dt \\ &= 0 + \int_a^\infty 1 \times e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_a^\infty = -\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-st}\right) - \left(-\frac{1}{s}e^{-s\times a}\right) = \frac{1}{s}e^{-as} \ . \end{aligned} \tag{11.4}$$

11.3　ラプラス変換の一意性 / 逆変換の非一意性

ある関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は、存在さえすれば**一意に定まる**。すなわち、2 つの関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ が任意の $t \geq 0$ で一致するならば、それらのラプラス変換 $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1], F_2(s) = \mathcal{L}[f_2]$ も互いに等しくなる:

$$f_1(t) = f_2(t) \quad (\forall t \geq 0) \qquad \Rightarrow \qquad F_1(s) = F_2(s) \ .$$

逆に、**ラプラス逆変換は一意には定まらない**。すなわち、ラプラス変換後の関数 $F_1(s), F_2(s)$ が一致していても、そのラプラス逆変換 $f_1(t), f_2(t)$ は一致しない場合がある。ただし、**$f_1(t), f_2(t)$ の差は不連続点での値の差だけに限られる**ので、工学などでの実用上は問題にならない場合が多い。

例) 式 (11.3) とは異なる階段関数 $\theta_{1/2}(t-a)$ を次で定義する (図 5(c) 参照)。

$$\theta_{1/2}(t-a) = \begin{cases} 0 & (t < a) \\ 1/2 & (t = a) \\ 1 & (t > a) \end{cases} \tag{11.5}$$

このラプラス変換を計算すると、式 (11.4) とほぼ同じ操作をすることになり、結果も一致する:

$$\mathcal{L}\left[\theta_{1/2}(t-a)\right] = \frac{1}{s}e^{-st} \ . \tag{11.6}$$

それでは、関数 $\frac{1}{s}e^{-st}$ の逆ラプラス変換 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}e^{-st}\right]$ はどのような関数になるだろうか？

逆変換の定義は「ラプラス変換すると $\frac{1}{s}e^{-st}$ になる t の関数」だったから、式 (11.3) の $\theta(t-a)$ も式 (11.6) の $\theta_{1/2}(t-a)$ もその条件を満たす。このように、**不連続点での値だけが異なるような関数はどれもラプラス逆変換の候補となり、一つに定めることはできない**。実用上は、それらの候補の中から性質の良いもの（不連続点が少ないものなど）を適当に選ぶことが多い。この講義でもそうする。

11.4　$f(t)$ の平行移動、ラプラス変換の第 2 移動定理

階段関数のラプラス変換 (11.4) に話を戻そう。式 (11.4) の右辺をよく観察すると、実は 1 のラプラス変換に e^{-as} をかけたものになっている。

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)] = \frac{1}{s}e^{-as} \ , \quad \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \qquad \therefore \quad \mathcal{L}[\theta(t-s)] = e^{-as}\mathcal{L}[1] \ . \tag{11.7}$$

この関係式の起源はなんだろうか？それを見切るために図 5(b) を改めて観察してみると、階段関数 $\theta(t-a)$ のグラフは、定数関数 $f(t)=1$ のグラフの $t \geq 0$ の部分を a だけ右に**平行移動**した形になっていることが見てとれる。

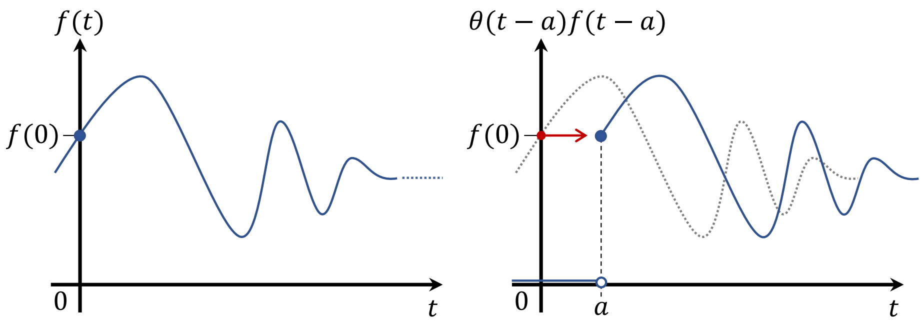
実は、このグラフの平行移動と、式 (11.7) に出てきた係数 e^{-as} には密接な関係がある。

準備：グラフの平行移動

- 関数 $y=f(t-a)$ のグラフは、関数 $y=f(t)$ のグラフを t 軸方向に a だけ平行移動したもので与えられる。
- 関数 $y=f(t-a)$ のグラフのうち、$t \geq 0$ の部分だけを t 軸方向に a だけ平行移動したいとする。このためには、階段関数 $\theta(t-a)$ を用いて

$$y = \theta(t-a)f(t-a) = \begin{cases} 0 & (t<a) \\ f(t-a) & (t \geq a) \end{cases} \tag{11.8}$$

と定義すると、ちょうどそのような性質を持つ関数になっている (図 6 参照)。



(a) $y=f(t)$　　(b) $y=\theta(t-a)f(t-a)$

図 6: $y=\theta(t-a)f(t-a)$ のグラフは、グラフ $y=f(t)$ の $t \geq 0$ の部分だけを t 方向に a だけ平行移動したもので与えられる。

ラプラス変換の第 2 移動定理

関数 $f(t)$ の $t \geq 0$ 部分を t 方向に $a \geq 0$ だけ平行移動した関数 $\theta(t-a)f(t-a)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)]$ は、元の関数のラプラス変換 $\mathcal{L}[f]$ の e^{-as} 倍になる:

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[f] \qquad (a \geq 0) \ . \tag{11.9}$$

($\because$) $\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)]$ の式に出てくる項を $e^{-st} = e^{-s(t-a)-sa} = e^{-as}e^{-s(t-a)}$ と書き換えると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)] &= \int_0^\infty \theta(t-a)f(t-a)e^{-st}dt = \int_0^\infty \theta(t-a)f(t-a)e^{-as}e^{-s(t-a)}dt \\ &= e^{-as}\int_0^\infty \theta(t-a)f(t-a)e^{-s(t-a)}dt \ . \end{aligned} \tag{11.10}$$

この式の右辺の積分は $\mathcal{L}[f]$ そのものであることが以下のように示せる。$a \geq 0$ が定数なので $dt = d(t-a)$ となることを使っていることと、二行目に移るところの等号で $t-a \to t$ と書き換えていることに注意。

$$\int_0^\infty \theta(t-a)f(t-a)e^{-s(t-a)}dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-s(t-a)}dt = \int_{t-a=0}^{t-a=\infty} f(t-a)e^{-s(t-a)}d(t-a)$$
$$= \int_{t=0}^{t=\infty} f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[f]\ . \qquad (11.11)$$

式 (11.10), (11.11) を合わせれば第 2 移動定理 (11.9) が得られる。

式 (11.9) のように、ある関数 $f(t)$ に階段関数をかけたものは応用上しばしば必要となる (例: スイッチを入れた直後の電圧など)。第 2 移動定理の式はそのような場合に用いられる。

11.5 ラプラス変換の第 1 移動定理

第 2 移動定理 (11.9) と対になるような変換もある。こちらは、**ラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ を平行移動した際に起こる変化**を書き下したものである。

ラプラス変換の第 1 移動定理

関数 $f(t)$ に e^{at} をかけてからラプラス変換すると、s 方向に a だけ平行移動したラプラス変換 $F(s-a)$ が得られる。

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \qquad \Big(\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t) \Big) \qquad (11.12)$$

式 (11.12) のかっこの中の表式の方が、第 2 移動定理 (11.9) との対応を見て取りやすいかもしれない。

($\because$) 定義通り $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]$ を計算すれば直ちに示せる。どちらかと言うと、以下のように元のラプラス変換の式 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ について $s \to s-a$ と置き換える式からスタートしたほうが覚えやすいかもしれない。

$$F(s-a) = F(s)\Big|_{s\to s-a} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\Big|_{s\to s-a} = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$$
$$= \int_0^\infty f(t)e^{at} \times e^{-st}dt = \mathcal{L}[f(t)e^{at}]\ . \qquad (11.13)$$

第 1 移動定理を用いると、少し複雑な関数のラプラス変換を求められるようになる。

例） 前回も少し紹介したが、$\mathcal{L}[t^n]$ は以下のように求められる。[4]

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\int_0^\infty t^{n-2}e^{-st}dt\right) = \cdots$$
$$= \left(-\frac{d}{ds}\right)^n \int_0^\infty e^{-st}dt = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n \frac{1}{s} = \left(-\frac{d}{ds}\right)^{n-1}\frac{1}{s^2} = \left(-\frac{d}{ds}\right)^{n-2}\frac{2}{s^3} = \cdots = \frac{n!}{s^{n+1}}\ . \qquad (11.14)$$

この結果に第 1 移動定理を適用すると、$f(t) = e^{at}t^n$ のラプラス変換を求めることができる。

$$\mathcal{L}[e^{at}t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}\Bigg|_{s\to s-a} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\ . \qquad (11.15)$$

[4] n が整数でない場合は次のようになる。$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ はガンマ関数。途中計算にて $st = x$ と置き換えていることに注意する。

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^n e^{-x}\frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\ .$$

第 12 回　微分と積分のラプラス変換、微分方程式

[教科書 (フーリエ解析と偏微分方程式) 1.2, 1.4]

今回の内容：

- これまでの内容の復習
- 微分・積分のラプラス変換、ラプラス変換の微分・積分
- ラプラス変換と微分方程式

12.1　これまでの内容の復習

関数 $f(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ とその性質について学んでいた。

$$\mathcal{L}[f] = F(s) \equiv \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \ . \tag{12.1}$$

12.1.1　ラプラス変換の例

- 定数

$$\mathcal{L}[C] = \int_0^\infty C e^{-st} dt = \frac{C}{s} \tag{12.2}$$

- 指数関数

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{(\alpha - s)t} dt = \frac{1}{s - \alpha} \tag{12.3}$$

- べき関数

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n \int_0^\infty e^{-st} dt = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{12.4}$$

- 三角関数

  指数関数のラプラス変換 (12.3) に $\alpha = i\omega$ を代入すると

$$\mathcal{L}[e^{i\omega t}] = \frac{1}{s - i\omega} = \frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \ . \tag{12.5}$$

  一方、オイラーの公式を使って $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ とすると

$$\mathcal{L}[e^{i\omega t}] = \mathcal{L}[\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] = \mathcal{L}[\cos(\omega t)] + i\mathcal{L}[\sin(\omega t)] \ . \tag{12.6}$$

  ただし、ラプラス変換の線型性を使って式を実部と虚部に分けた。
  式 (12.5), (12.6) の実部・虚部を比較すれば、$\sin \omega t, \cos \omega t$ のラプラス変換が得られる。

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \ , \qquad \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \ . \tag{12.7}$$

12.1.2　ラプラス変換の性質・定理

- 線形性

$$\mathcal{L}[C_1 f(t) + C_2 g(t)] = C_1 \mathcal{L}[f(t)] + C_2 \mathcal{L}[g(t)] \tag{12.8}$$

- ラプラス変換の存在条件

  全ての $t \geq 0$ について

$$|f(t)| \leq M e^{kt} \qquad (M > 0, k : \text{定数}) \tag{12.9}$$

  が満たされるとき、$s > k$ を満たす全ての s についてラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ が存在する。

- **第 1 移動定理**：関数 $f(t)$ に e^{at} をかけて変換 $\Rightarrow$ ラプラス変換 $F(s)$ が s 方向に a 平行移動
$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \tag{12.10}$$
- **第 2 移動定理**：関数 $f(t)$ の $t \geq 0$ 部分を $a \geq 0$ だけ平行移動 $\Rightarrow$ ラプラス変換が e^{-as} 倍に
$$\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s) \tag{12.11}$$
ただし、$\theta(t-a)$ は階段関数 ($t-a \geq 0$ のとき $\theta(t-a) = 1$, $t-a < 0$ のとき 0)。

12.2　微分・積分のラプラス変換

関数 $f(t)$ を微分してからラプラス変換すると、微分を取る前のラプラス変換に s をかけた式が得られる。ただし、初期時刻 $t = 0$ における関数 $f(t)$ やその微分の値、すなわち $f(t)$ の初期条件で決まる項も式に出てくることに注意。

$f(t)$ の微分のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \tag{12.12}$$
$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0) \tag{12.13}$$

($\because$) ラプラス変換の定義式からスタートして、部分積分を繰り返すことで示せる。

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\,(-s)\,e^{-st}dt = -f(0) + s\mathcal{L}[f]\ , \tag{12.14}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)] &= \int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = \left[f'(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f'(t)(-s)e^{-st}dt \\ &= \left[f'(t)e^{-st}\right]_0^\infty + s\left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty - s\int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st}dt \\ &= -f'(0) - sf(0) + s^2\mathcal{L}[f]\ .\end{aligned} \tag{12.15}$$

注）$f(t)$ の n 階微分のラプラス変換の式も同様に導出でき、以下のようになる。

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}[f] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{n-1}(0) - f^n(0)\ . \tag{12.16}$$

例）式 (12.13) を使って $f(t) = \cos(\omega t)$ のラプラス変換を求めてみる。
$\cos\omega t$ の 2 階微分は自分自身に比例するので、それらのラプラス変換同士も比例する。

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos\omega t = -\omega^2\cos\omega t \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}\cos\omega t\right] = -\omega^2\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right]\ . \tag{12.17}$$

一方、2 階微分のラプラス変換は微分する前のラプラス変換と式 (12.13) で結ばれている。

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}\cos\omega t\right] = s^2\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right] - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}\left[\cos\omega t\right] - s\ . \tag{12.18}$$

ただし、$f(0) = \cos 0 = 1,\ f'(0) = -\omega\sin 0 = 0$ を使った。式 (12.17), (12.18) を組み合わせることで

$$-\omega^2\mathcal{L}[\cos\omega t] = s^2\mathcal{L}[\cos\omega t] - s \qquad \therefore\ \ \mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}\ . \tag{12.19}$$

一方で、関数 $f(t)$ を積分してからラプラス変換すると、$f(t)$ のラプラス変換に $1/s$ をかけた式が得られる。

$f(t)$ の積分のラプラス変換

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] \tag{12.20}$$

(∵) 部分積分で、積分 $\int_0^t f(\tau)d\tau$ を微分するように計算する。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) e^{-st}dt \\ &= \left[\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}dt \\ &= 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] \ . \end{aligned} \tag{12.21}$$

なお、途中計算では $\left(\int_0^\infty f(\tau)d\tau\right)e^{-st} \xrightarrow{t\to\infty} 0$ となることを使った。これは $f(t)$ のラプラス変換の存在条件 $|f(t)| \leq Me^{kt}$ が満たされていれば成立するが、計算の詳細については省略する。教科書を参照のこと。

例）$F(s) = \dfrac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)}$ のラプラス逆変換 $f(t)$ を求める。

$\sin\omega t$ のラプラス変換が $\mathcal{L}[\sin\omega t] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ となることを使う。この結果と比較すると、先ほど与えられた $F(s)$ は

$$F(s) = \frac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right] \ . \tag{12.22}$$

積分のラプラス変換の公式 (12.21) と比較すると、右辺は $\int_0^t \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau d\tau$ をラプラス変換したものだとわかる。

$$F(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau d\tau\right] \ . \tag{12.23}$$

したがって、$F(s)$ のラプラス逆変換は

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \int_0^t \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau d\tau = \left[-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega\tau\right]_0^t = \frac{1-\cos\omega t}{\omega^2} \ . \tag{12.24}$$

12.3 ラプラス変換の微分・積分

$f(t)$ の微分・積分のラプラス変換の式と対応関係にある、**ラプラス変換の微分・積分**を与える式を紹介しておく。それぞれ**関数に t, $1/t$ をかけてからラプラス変換**したものになっているが、マイナス符号がついたり積分区間が特殊だったりと注意が必要である。

ラプラス変換の微分・積分

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s) \ , \qquad \mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma \tag{12.25}$$

(∵) ラプラス変換の定義式を s について微分・積分する式を書き、微分・積分の順序を交換すれば式 (12.25) が得られる。

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\left[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right] = \int_0^\infty f(t)\frac{d}{ds}e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-st}dt = -\mathcal{L}[tf(t)] \tag{12.26}$$

$$\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma = \int_s^\infty\left[\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}dt\right]d\sigma = \int_0^\infty\left[\int_s^\infty e^{-\sigma t}d\sigma\right]f(t)dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-st}dt = \mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] \tag{12.27}$$

例) $\mathcal{L}\left[t\sin(\omega t)\right]$ を求めてみよう。ラプラス変換の微分の式 (12.25) によれば、$\sin\omega t$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ について s 微分を取り -1 倍したものがそれに相当するので

$$\mathcal{L}\left[t\sin(\omega t)\right]=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin\omega t]=-\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\ . \tag{12.28}$$

12.4 ラプラス変換と微分方程式

微分のラプラス変換の式を応用することで、微分方程式を機械的に解けるようになる。

例）初期値問題 $y'+2y=1,\ y(0)=1$ を解く。

微分のラプラス変換 (12.12) に従うと、この微分方程式の両辺のラプラス変換は、それぞれ

$$\mathcal{L}[y'+2y]=sY(s)-Y(0)+2Y=(s+2)\,Y(s)-1\ ,\qquad \mathcal{L}[1]=\frac{1}{s}\ . \tag{12.29}$$

ただし、定数のラプラス変換が $\mathcal{L}[C]=C/s$ となることを使った。この方程式を $y(t)$ のラプラス変換 $Y(s)$ について解くと

$$Y(s)=\frac{s+1}{s(s+2)}\ . \tag{12.30}$$

あとはこの式の逆ラプラス変換 $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ を求めればよい。式 (12.30) のままだと扱いに困るので、この式を部分分数分解してみる。この式が $1/s$ と $1/(s+2)$ の線型結合で与えられるとすると

$$Y(s)=\frac{s+1}{s(s+2)}=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{s+2}=\frac{(C_1+C_2)\,s+2C_1}{s(s+2)}\qquad (C_1,C_2:\text{定数}) \tag{12.31}$$

この式の両辺を比較すると $C_1=1/2, C_2=1/2$ でなければならないことが分かる。すなわち

$$Y(s)=\frac{s+1}{s(s+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2}\right) \tag{12.32}$$

したがって、$Y(s)$ の逆ラプラス変換は

$$\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]\right)=\frac{1}{2}\left(1+e^{-2t}\right)\ . \tag{12.33}$$

ただし、指数関数のラプラス変換が $\mathcal{L}[e^{\alpha t}]=1/(s-\alpha)$ となることを用いた。

注）最終的に得られた解 (12.33) は、初期条件 $y(0)=1$ を自動的に満たす。
以前の方法では、得られた一般解に初期条件を課すことで特定の解を得ていた。
今回のラプラス変換を使った解法では、計算途中で出てきた $\mathcal{L}[y']=sY(s)-y(0)$ の右辺の値を書き下すときに初期条件 $y(0)=1$ を使っている。その結果として得られる解は、その初期条件を満たすようなものになっている。

第 13 回　ラプラス変換と微分方程式 (2)

[教科書 (フーリエ解析と偏微分方程式) 1.3, 1.6]

今回の内容：

- 部分分数分解による解法
- δ 関数とラプラス変換

13.1　部分分数分解による解法

13.1.1　復習：ラプラス変換と微分方程式

前回、ラプラス変換を用いて微分方程式を解くための手順を学んだ。$y(t)$ についての初期値問題

$$y''(t) + ay'(t) + b = r(t)\,, \quad y(0) = y_0\,, \quad y'(0) = y_1 \qquad (a, b : \text{定数}) \tag{13.1}$$

を解くための手順を軽く復習する。以下では $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ と表す。

1. **微分方程式の両辺をラプラス変換して等置する。**
   まず、式 (13.1) の左辺をラプラス変換する。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[y''(t) + ay'(t) + b\right] &= s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + a\big[s\,Y(s) - y(0)\big] + b\,Y(s) \\ &= \left(s^2 + a\,s + b\right) Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - a\,y(0) \\ &= \left(s^2 + a\,s + b\right) Y(s) - s\,y_0 - y_1 - a\,y_0\ .\end{aligned} \tag{13.2}$$

   一方、式 (13.1) の右辺のラプラス変換は $\mathcal{L}[r(t)] = R(s)$ と表すことにする。
   方程式 (13.1) の両辺をラプラス変換したものは互いに等しくなるので、

$$\big[\ \text{式 (13.1)}\ \big] \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(s^2 + a\,s + b\right) Y(s) - s\,y_0 - y_1 - a\,y_0 = R(s)\ . \tag{13.3}$$

2. **$Y(s)$ を求める。** 式 (13.3) を $Y(s)$ について解けばよい。

$$Y(s) = \frac{R(s) + s\,y_0 + y_1 + a\,y_0}{s^2 + a\,s + b} \tag{13.4}$$

3. **ラプラス逆変換で $y(t)$ を求める。**
   $Y(s)$ をラプラス逆変換したものが $y(t)$ であり、これが初期値問題 (13.1) の解となる。

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R(s) + s\,y_0 + y_1 + a\,y_0}{s^2 + a\,s + b}\right]\ . \tag{13.5}$$

   逆変換の実際の計算要領は $Y(s)$ の関数形に応じて様々である。次節で詳しく述べる。

13.1.2　部分分数分解

上記の手順 3 のラプラス逆変換の計算は、**まず $Y(s)$ の関数形を単純化**し、それについて逆変換を取ることで行われる。$Y(s)$ は分数式の形をとる (式 (13.3) 参照) ため、これを**部分分数分解**して単純化する必要が出てくる。よくあるパターンを以下でまとめる。

逆ラプラス変換をするにあたり、これまでに導出した以下の結果を使う。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1,\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t,\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at},\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t),\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \cos(\omega t). \tag{13.6}$$

- **分母が $(s-a)$ (a: 実数) の積**

説明のための例題として、次の初期値問題を考える。

$$y''+y'-6y=1, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1 \tag{13.7}$$

先ほどの手順に従って、まず方程式をラプラス変換すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[y''+y'-6y\right] &= \left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+\left(sY(s)-y(0)\right)-6Y(s)\\ &= \left(s^2+s-6\right)Y(s)-1\end{aligned} \tag{13.8}$$

$$\therefore \quad \left(s^2+s-6\right)Y(s)-1=\mathcal{L}[1]=\frac{1}{s} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s)=\frac{1}{s^2+s-6}\left(\frac{1}{s}+1\right)=\frac{s+1}{s(s-2)(s+3)}\ . \tag{13.9}$$

このように**分母が $(s-a)$ (a:実数) の積で与えられるときは、分母の各因子を分母に持つ分数の和に分解**できる。

$$Y(s)=\frac{s+1}{s(s-2)(s+3)}=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{s-2}+\frac{C_3}{s+3} \qquad \left(C_1,C_2,C_3:\text{定数}\right) \tag{13.10}$$

定数 $C_{1,2,3}$ を決定するには、右辺を一つの分数にまとめなおし、元の分数と比較すればよい。

$$Y(s)=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{s-2}+\frac{C_3}{s+3}=\frac{\left(C_1+C_2+C_3\right)s^2+\left(C_1+3C_2-2C_3\right)s-6C_1}{s(s-2)(s+3)}=\frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} \tag{13.11}$$

$$\therefore\ C_1+C_2+C_3=0,\ C_1+3C_2-2C_3=1,\ -6C_1=1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1=-\frac{1}{6},\ C_2=\frac{3}{10},\ C_3=-\frac{2}{15} \tag{13.12}$$

$$\therefore \quad Y(s)=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{s-2}-\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{s+3}\ . \tag{13.13}$$

微分方程式の解 $y(t)$ は、この $Y(s)$ をラプラス逆変換すれば得られる。$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}$ を使うと

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=-\frac{1}{6}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\frac{3}{10}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-\frac{2}{15}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]=-\frac{1}{6}+\frac{3}{10}e^{2t}-\frac{2}{15}e^{-3t}\ . \tag{13.14}$$

- **分母に重複因子 $(s-a)^m$ が現れる場合**

場合によっては $(s-a)^m$ のような項が分母に現れることがある。この場合には、$\frac{1}{s-a}$, $\frac{1}{(s-a)^2}$, ..., $\frac{1}{(s-a)^m}$ の和を用いて部分分数分解をすればよい。

例）$Y(s)=\dfrac{1}{s^2(s-2)}$ を逆ラプラス変換する。

分母に s^2 が現れているので、$\frac{1}{s}$ と $\frac{1}{s^2}$ の両方を使って分解する。

$$\frac{1}{s^2(s-2)}=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{s^2}+\frac{C_3}{s-2}=\frac{\left(C_1+C_3\right)s^2+\left(-2C_1+C_2\right)s-2C_2}{s^2(s-2)} \tag{13.15}$$

両辺の分子を比較して

$$C_1+C_3=0, \quad -2C_1+C_2=0, \quad -2C_2=1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1=-\frac{1}{4}, \quad C_2=-\frac{1}{2}, \quad C_3=\frac{1}{4} \tag{13.16}$$

$$\therefore \quad Y(s)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-2} \tag{13.17}$$

逆ラプラス変換 $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ は、右辺の各項を式 (13.6) に従って変換すれば得られる。

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=-\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}e^{2t}\ . \tag{13.18}$$

- **分母に $s^2+a\ (a>0)$ が現れる場合**
  この場合は $\frac{1}{s^2+a}$ を使って部分分数分解し、逆ラプラス変換して $\sin(\sqrt{a}t), \cos(\sqrt{a}t)$ を得るという流れになる。[5]

  例）次の初期値問題を考える。

$$y'' + \omega^2 y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0\ . \tag{13.19}$$

  まず、方程式をラプラス変換すると

$$\mathcal{L}\left[y'' + \omega^2 y\right] = s^2 Y(s) - sy(0) - sy'(0) + \omega^2 Y(s) = \left(s^2+\omega^2\right) Y(s)\ , \qquad \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \tag{13.20}$$

$$\therefore \quad \left(s^2+\omega^2\right) Y(s) = \frac{1}{s} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)}\ . \tag{13.21}$$

  この $Y(s)$ を逆ラプラス変換するために、$\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s^2+\omega^2}$ を用いて部分分数分解する。

$$Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2\, s + C_3}{s^2+\omega^2} = \frac{\left(C_1+C_2\right)s^2 + C_3\, s + \omega^2 C_1}{s\left(s^2+\omega^2\right)} \tag{13.22}$$

  $\frac{1}{s^2+\omega^2}$ 項の分母が s の 2 次式なので、分子として s の 1 次式 $C_2\, s + C_3$ を使っていることに注意。 元の式と分子を比較して $C_{1,2,3}$ を決定すると

$$C_1 + C_2 = 0,\ \ C_3 = 0,\ \ \omega^2 C_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{1}{\omega^2},\ \ C_2 = -\frac{1}{\omega^2},\ \ C_3 = 0 \tag{13.23}$$

$$Y(s) = \frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}\ . \tag{13.24}$$

  逆ラプラス変換を行って $y(t)$ を求めると

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \frac{1}{\omega^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{\omega^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\cos\left(\omega t\right)\ . \tag{13.25}$$

13.1.3　第 1 移動定理の応用

第 1 移動定理 $\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a)$ など、これまでに学んだ諸定理と組み合わせることが必要になる場合もある。

例）以下の初期値問題を解いてみよう。

$$y'' + 2y' + 2y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0\ . \tag{13.26}$$

これまでと同様の方法で $Y(s)$ を求めると

$$\left(s^2+2s+2\right) Y(s) = \frac{1}{s} \qquad \therefore \quad Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2+2s+2\right)}\ . \tag{13.27}$$

s^2+2s+2 は実数の範囲では因数分解できない。ひとまず、$\frac{1}{s}$ と $\frac{1}{s^2+s+2}$ を使って部分分数分解しておく。

$$\frac{1}{s\left(s^2+2s+2\right)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2\, s + C_3}{s^2+2s+2} = \frac{\left(C_1+C_2\right)s^2 + \left(2C_1+C_3\right)s + 2C_1}{s\left(s^2+2s+2\right)} \tag{13.28}$$

$$\therefore \quad C_1 + C_2 = 0,\ \ 2C_1 + C_3 = 0,\ \ 2C_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2},\ \ C_2 = -\frac{1}{2},\ \ C_3 = -1 \tag{13.29}$$

$$\therefore \quad Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{-\frac{1}{2}\, s - 1}{s^2+2s+2}\ . \tag{13.30}$$

[5] 別の方法として、$s^2+a = (s+i\sqrt{a})(s-i\sqrt{a})$ と因数分解し、$\frac{1}{s+i\sqrt{a}}$, $\frac{1}{s-i\sqrt{a}}$ を用いて部分分数分解してから逆ラプラス変換することも可能である。ただし、sin, cos の逆ラプラス変換の式を使う都合上、本文のように計算したほうが若干容易である。

ここで、$Y(s)$ の右辺第二項の分母を平方完成すると、$\frac{1}{s^2+1}$ について $s \to s+1$ と置き換えたような式が得られる。ついでなので、分子の方も $s+1$ をくくりだして書いておく。

$$\frac{-\frac{1}{2}s-1}{s^2+2s+2} = \frac{-\frac{1}{2}s-1}{(s+1)^2+1} = \frac{-\frac{1}{2}(s+1)-\frac{1}{2}}{(s+1)^2+1} \tag{13.31}$$

この項に**第一移動定理** $\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right] = F(s-a)$ を適用すると、それぞれ $\sin(t), \cos(t)$ を使ったラプラス変換で書き直せる。

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1} \ \to\ \mathcal{L}[e^{-t}\sin t] = \frac{1}{(s+1)^2+1}\ , \quad \mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2+1} \ \to\ \mathcal{L}[e^{-t}\cos t] = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \tag{13.32}$$

これを用いて $Y(s)$ の逆ラプラス変換を求めると

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t\ . \end{aligned} \tag{13.33}$$

13.2　δ 関数とラプラス変換

初期値問題 (13.1) の右辺に出てくる $r(t)$ は、微分方程式が表す系への**入力** (点粒子に加えられる力、回路に印加される電圧など) に相当する。その一例として、点粒子をハンマーで叩いた時のように一瞬だけ激力が加えられるような状況が考えられる。その場合の入力 $r(t)$ として活用できる**ディラックの δ 関数**を導入しておく。

ディラックの δ 関数

δ 関数 $\delta(t-a)$ は、$t=a$ 以外の t に対してはゼロで、$t=a$ を含む区間で積分するとちょうど 1 になる関数である。

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & (t=a) \\ 0 & (t \neq a) \end{cases}\ , \qquad \int_0^\infty \delta(t-a)dt = 1\ . \tag{13.34}$$

δ 関数 $\delta(t-a)$ は $t=a$ で発散するため、通常の有現値をとる関数とは別種のものである。例えば、有限幅の区間 $t \in [a, a+k]$ で高さ $1/k$ を取る関数 $\delta_k(t-a)$ を

$$\delta_k(t-a) = \begin{cases} 1/k & (t \in [a, a+k]) \\ 0 & (t : \text{それ以外}) \end{cases} \tag{13.35}$$

と定義すると、式 (13.34) の δ 関数は $\delta_k(t-a)$ の $k \to 0$ 極限として得られる:

$$\lim_{k\to 0}\delta_k(t-a) = \delta(t-a)\ . \tag{13.36}$$

δ 関数の定義式 (13.34) を用いれば、そのラプラス変換を導出するのは容易である。$\delta(t-a)$ $(a>0)$ のラプラス変換を求めてみると、$\delta(t-a)$ は $t=a$ だけで非ゼロとなり、その積分値が 1 となることから、

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right] = \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}dt = \left.e^{-st}\right|_{t=a} = e^{-as}\ . \tag{13.37}$$

この結果について、$a \to 0$ 極限を取ると

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = \lim_{a\to 0} e^{-as} = e^0 = 1\ . \tag{13.38}$$

微妙な点も本当はあるのだが、この授業では $\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1$ と定義して活用することにする。$r(t) = \delta(t)$ となる場合は、初期時刻 $t=0$ に力積が $\int \delta(t)dt = 1$ になるような激力が加えられた場合に相当する。

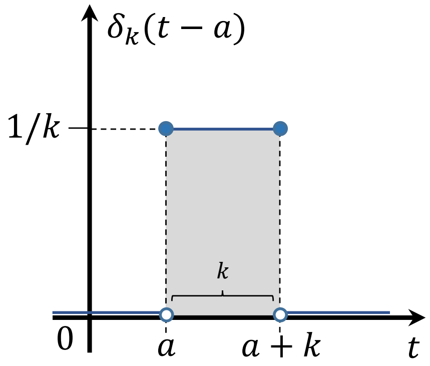


図 7: ディラックの δ 関数 $\delta(t-a)$ は、$\delta_k(t-a)$ について $k \to 0$ 極限を取ったもので得られる。図中の灰色部分の面積を 1 に保ったまま、幅 k をゼロに、高さ $1/k$ を無限大にする極限となっている。

第14回　ラプラス変換と微分方程式（3）

[教科書 (フーリエ解析と偏微分方程式) 1.3, 1.5, 1.6, 1.7]

今回の内容：

- δ 関数と第2移動定理
- ラプラス変換の積と畳み込み積分
- 連立微分方程式への応用

14.1　δ 関数と第2移動定理

14.1.1　復習（δ 関数、第2移動定理）

ディラックの δ 関数は以下の性質を持つ。

$$\delta(t-a)=\begin{cases}\infty & (t=a)\\ 0 & (t\neq a)\end{cases}\ , \qquad \int_0^\infty \delta(t-a)dt=1\ , \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty f(t)\delta(t-a)dt=f(a) \qquad (a:\text{定数}) \tag{14.1}$$

この性質とラプラス変換の定義式を組み合わせると、δ 関数のラプラス変換が以下の通り得られる:

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right]=\int_0^\infty \delta(t-a)\,e^{-st}dt=\left.e^{-st}\right|_{t=a}=e^{-as}\ . \tag{14.2}$$

今回の講義で使う**第2移動定理**も復習しておく。関数 $f(t)$ のグラフの平行移動に関する定理であった。

ラプラス変換の第2移動定理:
関数 $f(t)$ の $t\geq 0$ 部分を t 方向に $a\geq 0$ だけ平行移動した関数 $\theta(t-a)f(t-a)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)]$ は、元の関数のラプラス変換 $\mathcal{L}[f]$ の e^{-as} 倍になる:

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)]=e^{-as}\mathcal{L}[f(t)] \qquad (a\geq 0)\ . \tag{14.3}$$

ただし、$\theta(t-a)$ は階段関数。

14.1.2　第2移動定理の応用

前回、δ 関数を非斉次項（入力）として持つような微分方程式を考えた。

$$y''+A\,y'+B\,y=C\,\delta(t-a)\ , \quad y(0)=0\ , \quad y'(0)=0 \quad (A,B,C,y_0,y_1:\text{定数}) \tag{14.4}$$

これは、微分方程式が表す系（運動する質点や回路を流れる電流）に一瞬だけ作用する**激力**を与えた場合に相当する。方程式の解は、その激力が与えられた後の時間発展の様子を表している。

前回は、簡単のため $a=0$ の場合（$t=0$ に激力が与えられた場合）を考えた。今回は一般の $a>0$ の場合を考えて、式 (14.4) をそのまま解いてみることにしよう。

式 (14.4) の両辺をラプラス変換すると、$\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$ として

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[y''+Ay'+By\right]&=\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+A\left(sY(s)-y(0)\right)-BY(s)\\ &=\left(s^2+As+B\right)Y(s) \end{aligned}\tag{14.5}$$

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right]=e^{-sa} \tag{14.6}$$

$$\therefore \quad \left(s^2+As+B\right)Y(s)=e^{-sa} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s)=\frac{e^{-sa}}{s^2+As+B}\ . \tag{14.7}$$

あとは、この $Y(s)$ の逆ラプラス変換を実行できれば解 $y(t)$ が得られる。$Y(s)$ の関数形をよく見ると、右辺に e^{-as} がかかっており、ちょうど第 2 移動定理を適用できる形になっている。

$$Y(s)=e^{-sa}\times\frac{1}{s^2+As+B}\quad\Rightarrow\quad y(t)=\theta(t-a)f(t-a)\quad\left(f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+As+B}\right]\right) \tag{14.8}$$

$Y(s)$ のうち、$\frac{1}{s^2+As+B}$ の部分をまず逆ラプラス変換しておいて、それについて $t\to t-a$ と平行移動をかけたものが最終結果となっている。

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+As+B}\right]$ は、$a=0$ の場合、すなわち激力が $t=0$ に与えられた場合の解を表している。激力を $t=a$ に与えた場合の解は、その解の時刻 t を a だけずらしたもので与えられる。それを表しているのが式 (14.8) の $y(t)$ である。

例）単振動を記述する微分方程式に、入力として $\delta(t-a)$ を入れると下記のようになる。

$$y''+\omega^2y=\delta(t-a),\quad y(0)=y'(0)=0 \tag{14.9}$$

この方程式をラプラス変換すると

$$\left(s^2+\omega^2\right)Y(s)=e^{-sa}\quad\Leftrightarrow\quad Y(s)=\frac{e^{-sa}}{s^2+\omega^2}\ . \tag{14.10}$$

この $Y(s)$ のうち、$\frac{1}{s^2+\omega^2}$ の逆ラプラス変換は $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\omega^2}\right]=\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$. したがって、式 (14.10) の $Y(s)$ に第 2 移動定理を適用すると

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=\theta(t-a)\times\left(\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\Big|_{t\to t-a}\right)=\frac{1}{\omega}\theta(t-a)\sin\big(\omega(t-a)\big)\ . \tag{14.11}$$

これは、$a=0$ の場合（激力が $t=0$ に加えられた場合）の解 $y(t)=\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$ について、$t>0$ の部分を a だけ平行移動したものになっている。

14.2 畳み込み積分

今回の講義ではあまり活用しないが、**ラプラス変換の積**の逆変換を可能にしてくれる**畳み込み積分**を説明しておく。フーリエ変換についても同様の結果となるほか、理論的には重要な役割を果たす。

畳み込みの定理

2 つの関数 $f(t),g(t)$ の**畳み込み積分**を以下で定義する：

$$\left(f*g\right)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{14.12}$$

これをラプラス変換したものは、$f(t),g(t)$ **各々のラプラス変換** $F(s)=\mathcal{L}[f(t)],G(s)=\mathcal{L}[g(t)]$ **の積**となる。

$$\mathcal{L}\left[\left(f*g\right)(t)\right]=F(s)G(s)\quad\Leftrightarrow\quad\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)G(s)\right]=\left(f*g\right)(t)\ . \tag{14.13}$$

ラプラス変換が 2 つの関数の積で与えられているとき、上記の定理を使えばその逆ラプラス変換を（少なくとも形式的には）書き下せることになる。複雑な関数の逆ラプラス変換を求めるときには有用となりえる。

[式 (14.13) の証明]

ラプラス変換の積 $F(s)\times G(s)$ を書き換えると、ちょうど畳み込み積分のラプラス変換 $\mathcal{L}\left[\left(f*g\right)(t)\right]$

になることを示す。まず、$F(s)\times G(s)$ を定義通り書き下すと

$$F(s)G(s)=\left(\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right)\left(\int_0^\infty g(\tilde{\tau})e^{-s\tilde{\tau}}d\tilde{\tau}\right)=\int_0^\infty d\tau\int_0^\infty d\tilde{\tau}\,f(\tau)g(\tilde{\tau})e^{-s(\tau+\tilde{\tau})} \tag{14.14}$$

ここで、$t\equiv\tau+\tilde{\tau}$ とおき、$\tilde{\tau}$ を消去する。また、積分経路を図 8 のように変形することにして、まず $t=$ (一定) の線上で $\tau\in[0,t]$ について積分し、引き続いて $t\in[0,\infty)$ について積分する。[6] このようにすると、式 (14.14) は

$$\int_0^\infty d\tau\int_0^\infty d\tilde{\tau}\,f(\tau)g(\tilde{\tau})e^{-s(\tau+\tilde{\tau})}=\int_0^\infty dt\int_0^t d\tau f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}=\int_0^\infty\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)e^{-st}dt\,. \tag{14.15}$$

右辺の被積分関数は畳み込み積分 $(f*g)(t)$ に一致しており、その外側の t 積分はラプラス変換の定義そのものである。従って、$F(s)G(s)$ が $\mathcal{L}\left[(f*g)(t)\right]$ に等しくなること (式 (14.13)) が示された。

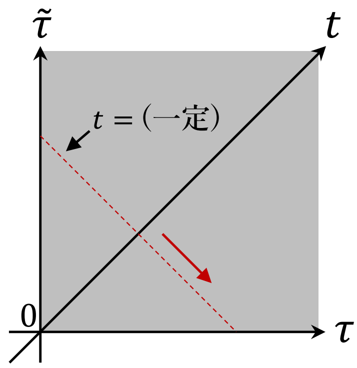


図 8: 式 (14.15) で用いた積分経路。元の変数である $(\tau,\tilde{\tau})$ についての積分範囲は図中の灰色の領域である。式 (14.15) では、同じ領域上の積分を、まず $t=$ (一定) の線分 (赤線) 上に沿って積分し、次いで t について $[0,\infty)$ の範囲で積分することで実行している。

14.2.1 微分方程式と畳み込み積分

改めて、初期条件 $y(0)=y'(0)=0$ のもとでの初期値問題を考えてみよう。非斉次項 $r(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[r(t)]=R(s)$ とすると

$$y''+ay'+by=r(t)\,,\quad y(0)=y'(0)=0\quad\Leftrightarrow\quad Y(s)=\frac{R(s)}{s^2+as+b}\,. \tag{14.16}$$

この $Y(s)$ は非斉次項 $R(s)$ と $\frac{1}{s^2+as+b}$ との積で表されている。従って、畳み込みの定理を用いると

$$Y(s)=R(s)\times\frac{1}{s^2+as+b}=\mathcal{L}\left[(r*f)(t)\right]\qquad\left(f(t)\equiv\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+as+b}\right]\right) \tag{14.17}$$

$$\therefore\quad y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=(r*f)(t)=\int_0^t r(\tau)f(t-\tau)d\tau\,. \tag{14.18}$$

前節でも触れたが、$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+as+b}\right]$ は δ 関数が入力 ($r(t)=\delta(t)$) である場合の微分方程式の解である。従って、一般の $r(t)$ に対する微分方程式 (14.16) は、非斉次項 $r(t)$ と δ 関数に対する微分方程式の解 $f(t)$ との畳み込み積分で与えられることになる。この $f(t)$ は、学問分野によって**応答関数**、**伝搬関数**、**グリーン関数**などと呼ばれるものである。

[6] 面積要素 $d\tau d\tilde{\tau}$ が、座標変換 $(\tau,\tilde{\tau})\to(\tau,t=\tau+\tilde{\tau})$ によって以下のように変換することを計算で用いている。

$$d\tau d\tilde{\tau}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\tau}{\partial\tau} & \frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial\tau}\\ \frac{\partial\tau}{\partial t} & \frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial t}\end{pmatrix}d\tau d\tilde{\tau}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\tau}{\partial\tau} & \frac{\partial(t-\tau)}{\partial\tau}\\ \frac{\partial\tau}{\partial t} & \frac{\partial(t-\tau)}{\partial t}\end{pmatrix}d\tau d\tilde{\tau}=\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}d\tau d\tilde{\tau}=d\tau d\tilde{\tau}$$

14.3 連立微分方程式への応用

最後に、ラプラス変換の連立微分方程式への応用について簡単に説明しておく。以下では一階微分方程式について説明するが、同様の方法で二階微分方程式も解くことができる。

二つの変数 $y_1(t), y_2(t)$ についての一階微分方程式系を考えよう。

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}\, y_1(t) + a_{12}\, y_2(t) + r_1(t)\ , & y_1(0) = C_1 \\ y_2'(t) = a_{21}\, y_1(t) + a_{22}\, y_2(t) + r_2(t)\ , & y_2(0) = C_2 \end{cases} \tag{14.19}$$

連立方程式についても、これまでと同様に方程式をラプラス変換してよい。

$$\begin{cases} s\,Y_1(s) - y_1(0) = a_{11}\, Y_1(s) + a_{12}\, Y_2(s) + R_1(s) \\ s\,Y_2(s) - y_2(0) = a_{21}\, Y_1(s) + a_{22}\, Y_2(s) + R_2(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s - a_{11})\, Y_1(s) \quad - a_{12}\, Y_2(s) = C_1 + R_1(s) \\ -a_{21}\, Y_1(s) + (s - a_{22})\, Y_2(s) = C_2 + R_2(s) \end{cases} \tag{14.20}$$

あとは、この方程式系を $Y_1(s), Y_2(s)$ について代数的に解き、それらを逆ラプラス変換すれば、初期値問題 (14.19) の解 $y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)], y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)]$ が得られる。

例）次の初期値問題を解いてみる。

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 & , \quad y_1(0) = 0 \\ y_2' = \qquad y_2 + 1\ , & y_2(0) = 0 \end{cases} \tag{14.21}$$

方程式をラプラス変換すると

$$\begin{cases} s\,Y_1 = Y_1 + Y_2 \\ s\,Y_2 = \qquad Y_2 + \frac{1}{s} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s-1)Y_1 - Y_2 = 0 \\ (s-1)Y_2 \qquad = \frac{1}{s} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_1 = \frac{1}{s(s-1)^2} \\ Y_2 = \frac{1}{s(s-1)} \end{cases} \ . \tag{14.22}$$

あとは、得られた Y_1, Y_2 を逆ラプラス変換すれば解 y_1, y_2 が得られる。そのために、Y_1, Y_2 を部分分数分解すると

$$Y_1(s) = \frac{1}{s(s-1)^2} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{(s-1)^2} + \frac{C_3}{s-1} = \frac{(C_1 + C_3)s^2 + (-2C_1 + C_2 - C_3)s + C_1}{s(s-1)^2} \tag{14.23}$$

$$\therefore \quad C_1 = 1\ , \quad C_2 = 1\ , \quad C_3 = -1\ , \quad Y_1(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1}\ , \tag{14.24}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\ . \tag{14.25}$$

これらの表式を逆ラプラス変換して解 $y_1(t), y_2(t)$ を求めると

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = 1 + t\,e^t - e^t\ , \tag{14.26}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y_2(s)\right] \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = e^t - 1\ . \tag{14.27}$$

ただし、これまでに導出したラプラス変換 $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$、および $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$ とラプラス変換の微分の公式 $\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$ とを組み合わせて得られる $\mathcal{L}\left[te^{at}\right] = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-a} = \frac{1}{(s-a)^2}$ を計算のため使った。

連立方程式系で表される系には応用上も重要となるものが数多くあるが、本講義では説明を割愛する。詳しくは教科書を参照のこと。