第 9 回　高階常微分方程式、連立微分方程式

[教科書 2.13, 2.14, 3.0〜3.2]

今回の内容： 以下の項目について、基礎と概要だけを解説する。

- 高階常微分方程式
- 高階常微分方程式 $\to$ 連立一階常微分方程式
- 連立一階常微分方程式

9.1　高階常微分方程式

これまでの講義では、一階ないし二階までの微分方程式を取り扱ってきた。より高階の微分方程式 $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ で、未知関数 $y(x)$ について線形な非斉次方程式

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = r(x) \qquad \left(y^{(m)}(x) \equiv \frac{d^m}{dx^m}y(x)\right) \tag{9.1}$$

を考える。

この種の方程式の性質を調べるために、簡単な具体例を見てみることにする。

$$y''''(x) = e^x \tag{9.2}$$

この方程式の解を得るためには、単に両辺を x について 4 回積分すればよい。

$$\begin{aligned}
& y'''' = e^x \\
\xrightarrow{\int dx} \quad & y''' = e^x + C_0 \\
\xrightarrow{\int dx} \quad & y'' = e^x + C_0\, x + C_1 \\
\xrightarrow{\int dx} \quad & y' = e^x + \frac{1}{2}C_0\, x^2 + C_1\, x + C_2 \\
\xrightarrow{\int dx} \quad & y = e^x + \frac{1}{6}C_0\, x^3 + \frac{1}{2}C_1\, x + C_2\, x + C_3\ .
\end{aligned} \tag{9.3}$$

ただし、$C_{0,1,2,3}$ は x 積分を行った際に生じた積分定数である。

解 (9.3) の構成要素を観察してみよう。

- 解 (9.3) の右辺第一項は、方程式 (9.2) を満たす特解である。
$$y(x) = e^x \qquad \Rightarrow \qquad y'''' = e^x\ .$$
- 式 (9.3) の第二項以降は、方程式 (9.2) に対応する斉次方程式 $y'''' = 0$ の独立な解
$$y(x) = (\text{定数}),\ x,\ x^2,\ x^3$$
の線型結合を取ったものになっている。

以上の性質は、一般の**線形な**高階微分方程式に共通の性質である。

- 式 (9.1) に対応する**斉次方程式**
$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0 \tag{9.4}$$
の一般解は、この方程式の独立な解 $y = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の線型結合で与えられる:
$$y(x) = C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x) \qquad \bigl(C_1, \ldots, C_n : \text{定数}\bigr) \tag{9.5}$$
特に、n 次の斉次方程式は n 個の独立な解を持ち、一般解は n 個の任意定数を含む。

- 非斉次方程式 (9.1) の一般解は以下の形をとる。

$$y(x) = \big(\text{非斉次方程式の特解}\big) + (\text{斉次方程式の一般解}) \tag{9.6}$$

どちらの性質も、線形の二階微分方程式の解の性質と同様である。方程式が n 階微分までを含むことに対応して、斉次解の独立な解の個数と、一般解が含むパラメタの個数が n に増えている点に注意。

9.2 定数係数 斉次 高階微分方程式

二階微分方程式の場合と同様に、斉次方程式 (9.4) で、係数が定数の場合を考えてみる。

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1 y'(x) + p_0 y(x) = 0 \tag{9.7}$$

この場合には、解を指数関数型 ($y(x) = e^{\lambda x}$, λ は定数) と仮定することで解を求めることができる。$y(x) = e^{\lambda x}$ を式 (9.8) に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= y^{(n)}(x) + p_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1 y'(x) + p_0 y(x) \\ &= \lambda^n e^{\lambda x} + p_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + p_1\lambda e^{\lambda x} + p_0 e^{\lambda x} = \big(\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0\big)\, e^{\lambda x}\ . \end{aligned} \tag{9.8}$$

この方程式を恒等的に満たすためには、右辺に現れた係数がゼロであればよい。

$$\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 = 0\ . \tag{9.9}$$

この方程式は**斉次方程式 (9.8) の特性方程式**と呼ばれる。λ の n 次方程式であることから、一般には独立な解が n 個存在する。それらの解を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とすると、

$$y(x) = e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x} \tag{9.10}$$

は斉次方程式 (9.8) の独立な解となる。それらの線形結合を取ることで、**斉次方程式 (9.8) の一般解**が得られる:

$$y(x) = C_1\, e^{\lambda_1 x} + C_2\, e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n\, e^{\lambda_n x} \qquad \big(C_1, C_2, \ldots, C_n : \text{定数}\big) \tag{9.11}$$

例）

$$y'''(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0 \tag{9.12}$$

この方程式に対応する**特性方程式**は、式 (9.12) の微分を λ に置き換えた式で与えられる:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0\ . \tag{9.13}$$

この方程式を λ の 3 次方程式として解けば

$$\lambda = 2, 1, -1\ . \tag{9.14}$$

これらの λ の値を $y(x) = e^{\lambda x}$ に代入することで、方程式 (9.12) の独立な解が得られる。それらの線型結合を取れば方程式 (9.12) の一般解が得られる:

$$y(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{x} + C_3\, e^{-x}\ . \tag{9.15}$$

初期値問題や境界値問題も二階微分方程式の場合と同様に解くことができるが、**n 階微分方程式の解を一つに定めるには n 個の初期条件・境界条件が必要**となることに注意する。

9.3　高階微分方程式 → 一階連立微分方程式

これまでは一つの未知変数 $y(x)$ についての微分方程式だけを取り扱ってきた。これを 2 つの変数 $y_1(x), y_2(x)$ についての微分方程式に拡張してみよう。ただし、簡単のため一階微分までを含む定数係数の方程式について考えることにする。

$$\begin{cases} y_1'(x) = a\, y_1(x) + b\, y_2(x) \\ y_2'(x) = c\, y_1(x) + d\, y_2(x) \end{cases} \tag{9.16}$$

実は、これまでに学んできた高階微分方程式を、一階の連立微分方程式に書き換えることができる。例として

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0 \qquad (\alpha, \beta : \text{定数}) \tag{9.17}$$

を書き換えてみることにしよう。

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y' \tag{9.18}$$

と新変数 $y_1(x), y_2(x)$ を定義すると、まず定義式からして

$$y_2 = y' = y_1' \ . \tag{9.19}$$

次に、式 (9.17) を書き換える。$y'' = (y')' = y_2'$ と書けることに気を付けると

$$0 = y'' + \alpha y' + \beta y = y_2' + \alpha y_2 + \beta y_1 \ . \tag{9.20}$$

以上を整理すると、方程式 (9.17) が式 (9.19), (9.20) の 2 つの式に書き換えられたことになる。

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\beta y_1 - \alpha y_2 \end{cases} \tag{9.21}$$

これは、先ほど導入した連立一階微分方程式 (9.16) の形になっている。

上記の例では二階微分方程式を扱ったが、より高階の微分方程式についても

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \ldots \tag{9.22}$$

と新変数 $y_1, y_2, y_3, \ldots$ を導入することで一階微分方程式の組に書き換えることができる。どちらの書き方で解いたとしても、互いに等価な解が得られる。

9.4　連立一階微分方程式の解法

連立一階常微分方程式 (9.16) は、以下のように**行列**を使って書き表せる。

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ . \tag{9.23}$$

この方程式を解くためには、行列 $\mathbf{A}$ の**固有値**、**固有ベクトル**を使うと便利である。

例)

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{9.24}$$

まず、**行列** $\mathbf{A}$ の**固有値** λ を求めてみよう。この行列の**固有方程式**は

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 2^2 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \ . \tag{9.25}$$

ただし、$\mathbf{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は単位行列。この方程式を λ について解くことで固有値 λ が得られる。

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \qquad \therefore \lambda = 3, -1 \tag{9.26}$$

各固有値に対応する固有ベクトル $\mathbf{v}$ は次の式で定義される。

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \qquad (\mathbf{v} \neq 0) \ . \tag{9.27}$$

固有値 $\lambda = 3$ については

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_1 + 2v_2 \\ 2v_1 - 2v_2 \end{pmatrix} = 0 \ . \tag{9.28}$$

この式を満たす固有ベクトル $\mathbf{v}$ は次のように求められる。

$$-2v_1 + 2v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9.29}$$

同様に、固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは

$$(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + 2v_2 \\ 2v_1 + 2v_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ . \tag{9.30}$$

ここで、連立微分方程式 (9.23) の解が固有ベクトルに変数 $C(x)$ をかけたもので与えられると仮定する。

$$\mathbf{y} = C(x)\mathbf{v} \tag{9.31}$$

これを方程式 (9.23) に代入すると

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad C'(x)\mathbf{v} = C(x)\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda C(x)\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = \lambda\, C(x) \tag{9.32}$$

この $C(x)$ についての微分方程式を解き、最初に仮定した解 (9.31) に代入すると

$$C'(x) = \lambda\, C(x) \quad \Leftrightarrow \quad C(x) = \tilde{C}\, e^{\lambda x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{y} = \tilde{C}\, e^{\lambda x}\mathbf{v} \quad (\tilde{C} : \text{定数}) \tag{9.33}$$

これは方程式 (9.23) を満たす解になっている。固有値・固有ベクトルの組が 2 つあることに対応して、この形の解も 2 つ得られる。それらの線型結合を取れば方程式 (9.23) の一般解が得られる。今回の場合は

$$\mathbf{y} = C_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} \\ y_2 = C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x} \end{cases} \qquad \big(C_1, C_2 : \text{定数}\big) \ . \tag{9.34}$$

一般に、連立微分方程式 (9.23) の解は次の式で与えられる。

$$\mathbf{y} = C_1\, e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1 + C_2\, e^{\lambda_2 x}\mathbf{v}_2 \qquad \big(C_1, C_2 : \text{定数}\big) \tag{9.35}$$

ただし、$(\lambda_1, \mathbf{v}_1)$ $(\lambda_2, \mathbf{v}_2)$ は係数行列 $\mathbf{A}$ の固有値・固有ベクトルの組である。

2 つの固有値 λ_1, λ_2 が一致する場合にはより詳細な解析が必要になるが、本講義では割愛する。より多くの変数の連立方程式の場合には、変数の個数と同じ大きさを持つ係数行列 $\mathbf{A}$ を考えれば同様の解析を行うことができる。詳細については教科書を参照のこと。