第 7 回　二階非斉次常微分方程式の解法 (続き)

[教科書 2.8～2.10]

今回の内容：

- 復習: 二階非斉次方程式の解の性質
- 特解の構成法 (未定係数法)
- 一般的な解法 (定数変化法)

7.1　復習: 二階非斉次方程式の解

$$y'' + a\,y' + b\,y = r(x) \qquad (a, b : \text{定数}) \tag{7.1}$$

は、$y(x)$ について 1 次以外の項を持つ**非斉次**微分方程式である。この方程式の解は次で与えられる。

[非斉次方程式の一般解] = [非斉次方程式の特解] + [斉次方程式の一般解 (2 つの定数を含む)]

この性質の説明については前回の講義ノートを参照すること。

非斉次方程式 (7.1) の解法

1. 非斉次方程式 (7.1) を満たす解 (**特解**) $y = y_*(x)$ を一つ見つける。
$$y_*'' + a\,y_*' + b\,y_* = r(x)\ . \tag{7.2}$$
2. 式 (7.1) に対応する**斉次方程式**の一般解を求める。
$$y'' + a\,y' + b\,y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2 \quad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{7.3}$$
3. 非斉次方程式 (7.1) の一般解は、特解 (7.2) と斉次方程式の一般解 (7.3) の和で与えられる。
$$y(x) = y_*(x) + C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2 \qquad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{7.4}$$

7.2　特解の構成法 (未定係数法)

非斉次方程式の一般解を求める問題は、その**非斉次方程式の特解**さえ構成できれば、あとは前回までに学んできた斉次方程式の一般解を求める問題に帰着する。

特解を求めるための一般的な公式は次の節で学ぶが、やや複雑で使いづらい。一方、微分方程式が比較的簡単な場合には、この公式を使わずとも特解を求められる場合がある。そのための方法 (**未定係数法**) をこの節で解説する。

どの場合についても、**方程式 (7.1) の右辺** $r(x)$ **の関数形に応じて特解** $y = y(x)$ **の関数形を予想し**、その係数をうまく調節することで特解を求める。

- **右辺が指数関数 (**$r(x) \propto e^{\alpha x}$**)**　$\Rightarrow$　$y = K\,e^{\alpha x}$ **(**K**: 定数)**

  方程式の右辺 (7.1) が指数関数 $r(x) \propto e^{\alpha x}$ となる時には、それに合わせて特解の形を $e^{\alpha x}$ の定数倍にとってみる。係数 K は、方程式 (7.1) が満たされるように調節する。

例） 次の非斉次方程式の特解を求める。

$$y'' + y' + y = e^{2x} \tag{7.5}$$

右辺の形に合わせて、特解の形を

$$y(x) = K\,e^{2x} \qquad (C : \text{定数}) \tag{7.6}$$

と仮定し、式 (7.5) に代入してみる。すると

$$\left(K\,e^{2x}\right)'' + \left(K\,e^{2x}\right)' + K\,e^{2x} = 4K\,e^{2x} + 2K\,e^{2x} + K\,e^{2x} = 7K\,e^{2x} = e^{2x}\ . \tag{7.7}$$

これが満たされるためには $K = 1/7$ であればよい。したがって、式 (7.5) の特解は

$$y(x) = K\,e^{2x} = \frac{1}{7}e^{2x}\ . \tag{7.8}$$

非斉次方程式 (7.5) の一般解をさらに求めるためには、対応する斉次方程式の一般解を求めて特解に足せばよい。まず、式 (7.5) に対応する斉次方程式は

$$y'' + y' + y = 0\ . \tag{7.9}$$

この方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\ . \tag{7.10}$$

したがって、斉次方程式 (7.9) の一般解は

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \qquad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{7.11}$$

で与えられる。

非斉次方程式 (7.5) の一般解は、この式の特解 (7.8) と、斉次方程式 (7.9) の特解 (7.11) の和を取ることで得られる。

$$y(x) = \frac{1}{7}e^{2x} + e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \qquad (C_1, C_2 : \text{定数})\ . \tag{7.12}$$

- **右辺がべき関数 ($r(x) \propto x^n\ (n = 0, 1, \ldots)$) $\Rightarrow$ $y = K_0 + K_1\,x + \cdots + K_n\,x^n$ ($K_{0,1,\ldots,n}$: 定数)**

右辺がべき関数 $r(x) = x^n$ で与えられるとき、特解としては x^n を最高次の項として持つ x の多項式を持ってくる。

例） 次の非斉次方程式の特解を求める。

$$y'' + y' + y = x^2 \tag{7.13}$$

この場合には、特解を次の形に仮定する。

$$y(x) = K_0 + K_1\,x + K_2\,x^2 \qquad (K_{0,1,2} : \text{定数}) \tag{7.14}$$

これを式 (7.13) に代入すると

$$\begin{aligned}
&\left(K_0 + K_1\,x + K_2\,x^2\right)'' + \left(K_0 + K_1\,x + K_2\,x^2\right)' + \left(K_0 + K_1\,x + K_2\,x^2\right) \\
&= 2K_2 + (K_1 + 2K_2\,x) + \left(K_0 + K_1\,x + K_2\,x^2\right) \\
&= 2K_2 + K_1 + K_0 + (2K_2 + K_1)\,x + K_2\,x^2 \\
&= x^2\ .
\end{aligned} \tag{7.15}$$

この式が満たされるためには

$$2K_2+K_1+K_0=0\,,\quad 2K_2+K_1=0\,,\quad K_2=1 \quad\Leftrightarrow\quad K_2=1\,,\quad K_1=-2\,,\quad K_0=0\;. \tag{7.16}$$

したがって、方程式 (7.13) の特解は

$$y(x)=K_0+K_1\,x+K_2\,x^2=-2x+x^2\;. \tag{7.17}$$

- **右辺が三角関数 ($r(x)\propto\sin(kx),\cos(kx)$)** $\quad\Rightarrow\quad$ $y=K_1\cos(kx)+K_2\sin(kx)$ **(K_1,K_2: 定数)**

例）次の非斉次方程式の特解を求める。

$$y''+y'+y=\sin(2x) \tag{7.18}$$

この場合には、特解を次の形に仮定する。

$$y(x)=K_1\cos(2x)+K_2\sin(2x) \qquad (K_{1,2}:\text{定数}) \tag{7.19}$$

これを式 (7.18) に代入すると

$$\begin{aligned}
&[K_1\cos(2x)+K_2\sin(2x)]''+[K_1\cos(2x)+K_2\sin(2x)]'+[K_1\cos(2x)+K_2\sin(2x)]\\
&=[-4K_1\cos(2x)-4K_2\sin(2x)]+[-2K_1\sin(2x)+2K_2\cos(2x)]+K_1\cos(2x)+K_2\sin(2x)\\
&=(-3K_1+2K_2)\cos(2x)+(-2K_1-3K_2)\sin(2x)\\
&=\sin(2x)
\end{aligned} \tag{7.20}$$

この式が満たされるためには

$$-3K_1+2K_2=0\,,\quad -2K_1-3K_2=1 \qquad\Leftrightarrow\qquad K_1=-\frac{2}{13}\,,\quad K_2=-\frac{3}{13}\,. \tag{7.21}$$

したがって、式 (7.18) の特解は

$$y(x)=K_1\cos(2x)+K_2\sin(2x)=-\frac{2}{13}\cos(2x)-\frac{3}{13}\sin(2x)\;. \tag{7.22}$$

注意点)

- **上記の方法がうまくいくのは、特解の形を正しく仮定できたときだけである。**間違った関数形を仮定してしまった場合には、係数をどう選んでも両辺が (恒等的には) 等しくならず、特解も求まらないので注意すること。

- $r(x)$ の関数形が以上で扱った例の和となっている場合には、以上で用いた特解の関数形の和をとって計算するとうまくいく。

  例）$y''+y'+1=e^x+x^2$ の特解を求めるとする。

  この場合には、特解の形を $y(x)=K\,e^x+K_0+K_1x+K_2x^2$ ($K,K_{0,1,2}$: 定数) と仮定する。途中計算は省略するが、この $y(x)$ を $y''+y'+1=e^x+x^2$ に代入して両辺を比較することで、$K=1/7,K_2=1,K_1=-2,K_0=0$ が得られる。この結果を $y(x)=K\,e^x+K_0+K_1x+K_2x^2$ に代入することで、特解が $y(x)=\frac{1}{7}e^x-2x+x^2$ と得られる。

  計算中に仮定した特解の形も、最終的に得られた特解も、全て上記で解説した例に出てくる特解の和を取ったものになっていることに注意する。

- 非斉次方程式によっては、上記の計算法で仮定する特解が、斉次方程式方程式の解 (7.3) と一致してしまう場合がある。この場合には、上記の方法で用意する特解の候補に x をかけたものを代わりに使う。

  例）$r(x)=e^x$ で、e^x が斉次方程式の解の一つと一致 $\quad\Rightarrow\quad$ 特解の形を $r(x)=C\,x\,e^x$ と仮定

- さらに例外的な場合として、斉次方程式の特性方程式が重解を持ち、その重解に対応する斉次方程式の解と $r(x)$ が一致してしまう場合もある。この場合には、上述の特解の候補に x^2 をかけたものを代わりに使うとうまくいく。

  例）$y'' - 2y' + 1 = e^x$ の一般解を求めるとする。

  この式に対応する斉次方程式は $y'' - 2y' + 1 = 0$ で、その特性方程式を解くと $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (重解) となる t。したがって、この場合の斉次方程式の一般解は $y(x) = (C_0 + C_1 x)\, e^{\lambda x}$ である。一方、元の非斉次方程式の特解を求めるために、**特解の形を** $y(x) = C\, x^2 e^x$ **(**C**: 定数) と仮定**して代入すると

  $$\left(Cx^2e^x\right)'' - 2\left(Cx^2e^x\right)' + Cx^2e^x = \cdots = 2Ce^x = e^x \qquad \therefore \;\; C = \frac{1}{2}$$

  となり、$y(x) = C\, x^2 e^x = \frac{1}{2}x^2e^x$ が非斉次方程式 $y'' - 2y' + 1 = e^x$ の特解として得られる。

7.3 一般的な解法 (定数変化法)

前節の方法は、非斉次項 $r(x)$ が比較的単純で、特解の関数形を事前に予測できる場合にしか使えない。一方、**定数変化法**を使うことで、任意の関数 $r(x)$ に対して非斉次方程式 (7.1) の特解を求めるための公式を作ることができる。

ただし、**できる限り前節の方法を使った方が簡単に特解を求められる**ので注意すること。

非斉次方程式 (7.1) の特解の公式

$$y(x) = -\left(\int_{x_1}^{x} \frac{y_2(\hat{x})r(\hat{x})}{W(\hat{x})}d\hat{x}\right) y_1(x) + \left(\int_{x_2}^{x} \frac{y_1(\hat{x})r(\hat{x})}{W(\hat{x})}d\hat{x}\right) y_2(x) \tag{7.23}$$

ここで、

- $y_1(x), y_2(x)$: 式 (7.1) に対応する斉次方程式 $(y'' + ay' + by = 0)$ の、互いに独立な解
- x_1, x_2: 任意の定数
- $W(x)$ は以下で定義される x の関数 (**ロンスキアン**と呼ばれる)

$$W(x) \equiv y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \tag{7.24}$$

($\because$) 公式 (7.23) を得るためには、非斉次方程式 (7.1) の特解 $y(x)$ をあえて次の形に書き表すところから計算をスタートする。

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{7.25}$$

ただし、$C_1(x), C_2(x)$ は任意関数で、方程式 (7.1) が満たされるように決める。

この式は単に、未知関数 $r(x)$ を別の未知関数 $C_1(x), C_2(x)$ で書き換えているに過ぎない。さらに、特解 $y(x)$ を書き換えるだけなら未知関数が 1 つだけあれば十分である。そこで、2 つの未知関数 $C_1(x), C_2(x)$ を結びつける関係式 (7.27) を後ほど導入し、未知関数の個数を減らすことにする。

特解を求めるためには、上記の $y(x)$ を非斉次方程式 (7.1) に代入して、式が満たされるように $C_1(x)$, $C_2(x)$ を決めればよい。そのために、まず $y'(x)$ を計算すると

$$y'(x) = (C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x))' = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\ . \tag{7.26}$$

以下の計算では未知関数 $C_1(x), C_2(x)$ を求めていくことになるが、その際に C_1, C_2 の微分項がなるべく少ない方が計算が簡単になる。そこで、$C_1(x), C_2(x)$ が次の関係式を満たすと仮定する:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0\ . \tag{7.27}$$

こう仮定すると、$C_1(x)$ と $C_2(x)$ のどちらかを決めればもう一方が決まるため、式 (7.25) の右辺に含まれる未知関数の個数が実質的に一つになる。

仮定 (7.27) を課すと、$y'(x)$ の表式は

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\ . \tag{7.28}$$

このとき、$y''(x)$ は

$$y''(x) = \big(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\big)' = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x)\ . \tag{7.29}$$

式 (7.28), (7.29) より、式 (7.25) の $y(x)$ を非斉次方程式 (7.1) に代入したものは

$$\begin{aligned} r(x) = y'' + ay' + by &= C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2'' + a\left(C_1y_1' + C_2y_2'\right) + C_1y_1 + C_2y_2 \\ &= C_1\left(y_1'' + ay_1' + by_1\right) + C_2\left(y_2'' + ay_2' + by_2\right) + C_1'y_1' + C_2'y_2' \\ &= C_1'y_1' + C_2'y_2' \end{aligned}$$

$$\therefore\quad C_1'y_1' + C_2'y_2' = r(x) \qquad \big(\text{ただし } C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0\big)\ . \tag{7.30}$$

あとは、式 (7.30) を解いて $C_1(x), C_2(x)$ を決めればよい。まず、(7.30) の 2 つの式を組み合わせて $C_1(x)$ だけの式を作る。$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$ より、$C_2' = -(y_1/y_2)C_1'$ と書き換えられるので

$$r(x) = C_1'y_1' + C_2'y_2' = C_1'y_1' - \frac{y_1}{y_2}C_1'\cdot y_2' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_2}C_1' = -\frac{W(x)}{y_2(x)}C_1'(x) \tag{7.31}$$

$$\therefore\quad C_1'(x) = -\frac{y_2(x)r(x)}{W(x)} \qquad \Rightarrow \qquad C_1(x) = -\int_{x_1}^{x}\frac{y_2(\hat{x})r(\hat{x})}{W(\hat{x})}d\hat{x}\ . \tag{7.32}$$

ただし、x_1 は任意の定数で、$C_1'(x)$ の式を積分する際に生じる積分定数に相当する。また、式を単純化するために、式 (7.24) で定義されるロンスキアン $W(x)$ を用いた。

同様に、$C_2(x)$ だけの式を作って積分すると

$$C_2'(x) = \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)} \qquad \Rightarrow \qquad C_2(x) = \int_{x_2}^{x}\frac{y_1(\hat{x})r(\hat{x})}{W(\hat{x})}d\hat{x}\ . \tag{7.33}$$

先ほどと同様、x_2 は任意の定数である。

式 (7.32), (7.33) を最初に仮定した特解の表式 (7.25) に代入して、公式 (7.23) を得る。