第 6 回　二階非斉次常微分方程式の解法

[教科書 2.5, 2.8]

今回の内容：

- 自然現象のモデル化
- 初期値問題、境界値問題
- 二階非斉次方程式

6.1　復習: 二階 定数係数 斉次 常微分方程式

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0 \qquad (a, b : \text{定数}) \tag{6.1}$$

解法の手順：

1. 解を $y(x) = e^{\lambda x}$ (x: 定数) の形に仮定する。
2. この $y(x)$ を式 (6.1) に代入することで**特性方程式**を求める。
$$0 = y'' + a\,y' + b\,y = e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + a\,\lambda + b\right) \qquad \therefore\ \ \lambda^2 + a\,\lambda + b = 0$$
3. 特性方程式を解いて λ を求める。
$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \equiv \lambda_\pm$$
4. 得られた λ を $y(x) = e^{\lambda x}$ に代入して 2 つの特解を作り、それらの線型結合を取れば、式 (6.1) の一般解が得られる。
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_+ x} + C_2 e^{\lambda_- x} \qquad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{6.2}$$

ただし、$y(x)$ を実数だけを使って表すには、特性方程式の判別式 $a^2 - 4b$ の符号によって場合分けをする必要がある。

- $a^2 - 4b > 0$ の場合: $\lambda_\pm$ は実数となる。そのため、式 (6.2) の $y(x)$ がそのまま式 (6.1) の実数解を与える (ただし C_1, C_2: 実数)。
- $a^2 - 4b < 0$ の場合: $\lambda_\pm$ は互いに共役な複素数になる。ここで
$$\lambda_\pm = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} = -\frac{a}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4b - a^2} \equiv -\frac{a}{2} \pm i\omega$$
この $\lambda_\pm$ を用いて一般解 (6.2) を書き下し、オイラーの公式 $\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ を用いて変形することで次の表式を得る。
$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)\right) \qquad \left(C_1, C_2 : \text{定数}\right) \tag{6.3}$$
ただし、表式を単純化するために式 (6.2) の定数 C_1, C_2 を再定義した。
- $a^2 - 4b = 0$ の場合: $\lambda_+ = \lambda_- = -a/2$ となり、$y(x) = e^{\lambda_+ x}$ と $y(x) = e^{\lambda_- x}$ が互いに等しくなってしまうために、式 (6.2) が一般解にならない。この場合の一般解は
$$y(x) = (C_0 + C_1\,x)\,e^{-\frac{a}{2}x} \tag{6.4}$$
となることが示せる (導出は前回の講義ノート参照)。

6.2 自然現象のモデル化

方程式 (6.1) は、物体の振動や回路を流れる電流の振る舞いなど、様々な自然現象を表すのに使える。その例を少しだけ紹介する。

気分の問題だが、この章では独立変数として x の代わりに時刻 t を使い、$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$ と表す。

6.2.1 ばねの振動

質量 m の点粒子が、原点 $y = 0$ とばね定数 k のばねでつながれており、また粒子には速度に比例する抵抗力 $c\,v(t)$ がかかるとする。このとき、粒子の運動は次の微分方程式に従う:

$$m\,a(t) = -c\,v(t) - k\,y(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad m\,\ddot{y} + c\,\dot{y} + k\,y = 0\ .$$

$$\therefore \quad \ddot{y} + \frac{c}{m}\,\dot{y} + \frac{k}{m}\,y = 0\ . \tag{6.5}$$

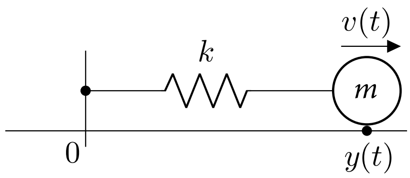


図 1: ばねでつながれた質量 m の質点の運動。ばねは原点の向きに $ky(t)$ の力をおよぼし、また点粒子には速度 $v(t) = \dot{y}(t)$ と逆向きに $c\,v(t)$ の抵抗力がかかるものとする。

式 (6.5) は定数係数の二階斉次方程式なので、先ほど説明した方法で解くことができる。$a = c/m$, $b = k/m$ と置き換えれば直ちに解が得られて

$$\lambda_\pm = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk} \tag{6.6}$$

ここで、よく想定する状況 ($m > 0$, $c > 0$, $k > 0$) であれば $\lambda_\pm < 0$ となる。

- $c^2 - 4mk > 0$ の場合:

  ばねの力 $k\,y(t)$ と比べて抵抗力 $c\,v(t)$ が大きい場合に相当する。点粒子の位置は

  $$y(t) = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}$$

  で与えられる。$\lambda_\pm < 0$ より、位置 $y(t)$ は時間がたつにつれて原点に指数的に収束する ($y(t) \to 0$)。

- $c^2 - 4mk < 0$ の場合: 抵抗力と比べてばねの力が大きい場合に相当する。点粒子の位置は

  $$y(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\right) \qquad \left(\omega = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2}\right)$$

  点粒子の位置は原点を中心とした**減衰振動**をする。振動の振幅は時間について指数的に減衰する ($\propto e^{-\frac{c}{2m}t}$)。

- $c^2 - 4mk = 0$ の場合:

  $$y(t) = (C_0 + C_1\,x)\,e^{-\frac{c}{2m}t}\ .$$

  上記 2 つの場合の中間的な状態で、点粒子の位置は振動せずに原点に収束していく。

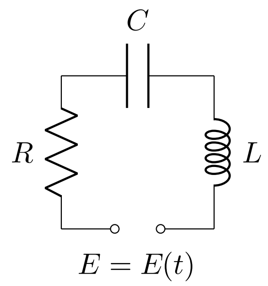


図 2: LRC 回路。回路に電流 $I(t)$ が流れているとする。

6.2.2　LRC 回路

図 2 で表されるような、抵抗 R, コンデンサ C, コイル L で構成される回路があったとする。この回路に電圧 $E(t)$ がかけられたときに流れる電流 $I(t)$ を求めてみる。

電流 $I(t)$ が抵抗 R, コンデンサ C, コイル L に流れるとき、各素子における電圧降下は

$$E_R = R\,I\ ,\quad E_C = \frac{1}{C}\int I(t)dt\ ,\quad E_L = L\frac{dI}{dt}\ . \tag{6.7}$$

この合計が回路にかける電圧 $E(t)$ に等しくなるので、次の方程式が成立する。

$$R\,I + \frac{1}{C}\int I(t)dt + L\frac{dI}{dt} = E(t)\ . \tag{6.8}$$

この方程式全体の時間微分を取れば、次のような二階微分方程式が得られる。

$$L\ddot{I} + R\,\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{E} \tag{6.9}$$

特に、回路にかける電圧をゼロ ($E = 0$) とすれば、式 (6.2) の形の微分方程式が得られる。

式 (6.5) と比較して、インダクタンス L, 抵抗 R, キャパシタンスの逆数 $1/C$ がそれぞれ点粒子の質量 m, 抵抗力の係数 c, ばね定数 k にちょうど対応していることが分かる。微分方程式として全く同じ形をしているので、解として得られる電流 $I(t)$ と粒子の位置 $y(t)$ の時間発展も互いに一致する。

6.3　初期値問題・境界値問題

式 (6.1) の一般解 (6.2) には二つの任意定数 C_1, C_2 が含まれる。これらの値を決めて特定の解を得るためには、解について 2 つの境界条件を課す必要がある。以下ではその代表例を見てみる。

6.3.1　初期値問題

x の初期値 x_0 における y とその一階微分 y' の値を指定することで、任意定数の値を決めて特定の解を得ることができる。この種類の問題は**初期値問題**と呼ばれる。

例）$x = 0$ における初期条件が課された次の問題を解いてみる。

$$y'' + 4y' + 8y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0 \tag{6.10}$$

まず、微分方程式 $y'' + 4y' + 8y = 0$ の一般解を求める。この方程式に対応する特性方程式を立てて解くと

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -2 + 2i\ . \tag{6.11}$$

したがって、一般解は

$$y(x) = e^{-2x}\left(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\right) \quad \left(C_1, C_2 : \text{定数}\right) \ . \tag{6.12}$$

この一般解に初期条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ を課して任意定数を決める。

$$1 = y(0) = e^0\left(C_1\cos(0) + C_2\sin(0)\right) = C_1 \qquad \therefore \quad C_1 = 1 \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned} 0 = y'(0) &= \frac{d}{dx}\left[e^{-2x}\left(C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)\right)\right]\Big|_{x=0} \\ &= -2e^{-2x}\left(C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)\right) + e^{-2x}\left(-2C_1\sin(2x)+2C_2\cos(2x)\right)\Big|_{x=0} \\ &= -2C_1 + 2C_2 \qquad \therefore \quad C_2 = C_1 = 1 \end{aligned} \tag{6.14}$$

上記で得られた C_1, C_2 を代入することで、初期条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ を満たす解が得られる。

$$y(x) = e^{-2x}\left(\cos(2x)+\sin(2x)\right) \ . \tag{6.15}$$

6.3.2 境界値問題

2 つの異なる x の値 $(x = x_1,\ x = x_2)$ における $y(x)$（やその微分など）の値を指定することでも、任意定数を一意に決めることができる。この種の問題を**境界値問題**と言う。
例）$x = 0,\ x = \pi/4$ における初期条件が課された次の問題を解いてみる。

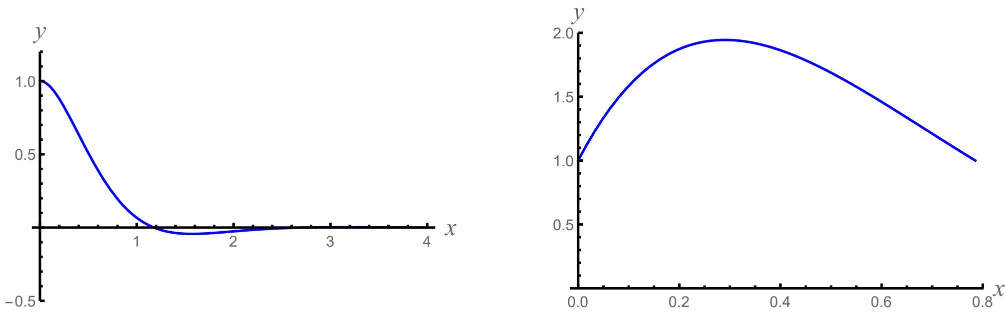
$$y'' + 4y' + 8y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \tag{6.16}$$

まず、この式の一般解は式 (6.12) で与えられる。これに境界条件を課すと

$$y(0) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 1 \tag{6.17}$$

$$1 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}\left(C_1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}C_2 \qquad \therefore \quad C_2 = e^{\frac{\pi}{2}} \tag{6.18}$$

$$\therefore \quad y(x) = e^{-2x}\left(\cos(2x) + e^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\right) \ . \tag{6.19}$$



(a) 初期値問題の解 (6.15)　　(b) 境界値問題の解 (6.19)

図 3: 本節で解いた初期値問題 (6.10)、境界値問題 (6.16) の解。

6.4 二階非斉次方程式

今回と次回の講義で、**非斉次**な二階微分方程式の解法を学ぶ。

$$y'' + a\,y' + b\,y = r(x) \qquad (a, b : \text{定数}) \tag{6.20}$$

ただし、簡単のため斉次方程式の部分 (左辺) は定数の係数を持つとする。

この方程式について、一般に以下の性質が成立する。第 3 回の講義で取り扱った**一階非斉次方程式**の性質とほぼ同様である。

まず、$y = y_*(x)$ が式 (6.20) を満たす**特解**であるとする。すなわち

$$y_*'' + a\,y_*' + b\,y_* = r(x)\ . \tag{6.21}$$

さらに、式 (6.20) で $r(x) = 0$ として得られる**斉次方程式**の 2 つの独立な解を $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ とする。すなわち

$$y_1'' + a\,y_1' + b\,y_1 = 0\ , \tag{6.22}$$

$$y_2'' + a\,y_2' + b\,y_2 = 0\ . \tag{6.23}$$

この時、$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (C_1, C_2: 定数) は**斉次方程式** $y'' + a\,y' + b\,y = 0$ **の一般解**となる。以上の解を用いて、**非斉次方程式 (6.20) の一般解**は

$$y(x) = y_*(x) + C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) \qquad \big(C_1, C_2 : \text{定数}\big) \tag{6.24}$$

(∵) 式 (6.24) の $y(x)$ が微分方程式 (6.20) の左辺に代入してみると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} y'' + a\,y' + b\,y &= (y_* + C_1\,y_1 + C_2\,y_2)'' + a\,(y_* + C_1\,y_1 + C_2\,y_2)' + y_* + C_1\,y_1 + C_2\,y_2 \\ &= \big(y_*'' + a\,y_*' + b\,y_*\big) + \big(y_1'' + a\,y_1' + b\,y_1\big) + \big(y_2'' + a\,y_2' + b\,y_2\big) \\ &= r + 0 + 0 = r\ . \end{aligned} \tag{6.25}$$

式変形のために、方程式 (6.20) の左辺が y について線形であるために y_*, y_1, y_2 それぞれについての式に分解でき、それらを式 (6.21), (6.22), (6.23) で書き換えられることを用いた。
したがって、式 (6.24) は式 (6.20) の解である。また、式 (6.24) は 2 つの定数パラメタを持つため、式 (6.20) の一般解となる。

以上をまとめると、非斉次方程式 (6.20) の解は以下のように与えられる。

(非斉次方程式の一般解) = (非斉次方程式の特解) + (斉次方程式の一般解)

したがって、手段を問わず**非斉次方程式の特解を一つ見つけられれば、それに斉次方程式の一般解を足し合わせることで、非斉次方程式の一般解が得られる。**一般的な解法については次回の講義で解説する。

例) 次の微分方程式の一般解を求める。

$$y'' + 4y' + 8y = e^x \tag{6.26}$$

まず、**式 (6.20) の特解**を求めるために、$y(x) = C\,e^x$ **(C: 定数) の形に解を仮定**して方程式に代入してみる。すると

$$e^x = y'' + 4y' + 8y = (C\,e^x)'' + 4\,(C\,e^x)' + 8C\,e^x = 13C\,e^x \qquad C = \frac{1}{13}\ . \tag{6.27}$$

したがって、$y(x) = \frac{1}{11}e^x$ は方程式 (6.26) の解（特解)）となっている。

次に、式 (6.26) の右辺をゼロにして得られる**斉次方程式の一般解**を求める。これは、式 (6.10) を解くときに既に求めており、式 (6.12) のとおり

$$y'' + 4y' + 8y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{-2x}\,(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) \qquad \big(C_1, C_2 : \text{定数}\big)\ . \tag{6.28}$$

以上の結果より、**式 (6.26) の一般解**は、上記の特解と一般解を足し合わせることで得られる。

$$y(x) = \frac{1}{13}e^x + e^{-2x}\,(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) \qquad \big(C_1, C_2 : \text{定数}\big)\ . \tag{6.29}$$