第 5 回　二階定数係数斉次常微分方程式の解法

[教科書 2.2, 2.3]

今回は、次の形の微分方程式 (**二階 定数係数 斉次 常微分方程式**) の解法を学ぶ。

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0 \qquad (a, b : \text{定数}) \tag{5.1}$$

5.1　復習: $a = 0$ の場合

前回の講義で、$a = 0$ の場合には以下の通りに一般解が得られることを説明した。

$$y'' + b\,y = 0 \qquad y(x) = \begin{cases} C_1 \sin(\sqrt{b}\,x) + C_2 \cos(\sqrt{b}\,x) & (b > 0) \\ C_1\,x + C_2 & (b = 0) \\ C_1\,e^{\sqrt{-b}\,x} + C_2\,e^{-\sqrt{-b}\,x} & (b < 0) \end{cases} \qquad (C_1, C_2 : \text{定数}) \tag{5.2}$$

方程式 $y'' + b\,y = 0$ が二階微分方程式であることに対応して、一般解は二つの任意定数 (C_1, C_2) を含む。

式 (5.2) のうち、特に $b < 0$ の場合には、**解の形を指数関数** $y(x) = e^{\lambda x}$ **に仮定する**ことで解が得られる。ただし、λ は定数で、微分方程式が満たされるように決める。$y(x) = e^{\lambda x}$ を $y'' + b\,y = 0$ に代入してみると

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad \Rightarrow \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \tag{5.3}$$

$$\therefore \quad y'' + b\,y = \lambda^2 e^{\lambda x} + b \times e^{\lambda x} = \left(\lambda^2 + b\right) e^{\lambda x} = 0\ . \tag{5.4}$$

式 (5.4) が満たされるためには、係数 $\lambda^2 + b$ がちょうどゼロになってればよい。$b < 0$ と仮定しているため、その解は

$$\lambda^2 + b = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = +\sqrt{-b},\ -\sqrt{-b}\ . \tag{5.5}$$

式 (5.5) が λ の 2 次方程式であることに対応して、解 λ も 2 つ得られた。

- $\lambda = \sqrt{-b} \ \Rightarrow\ y = e^{\sqrt{-b}\,x}$, $\lambda = -\sqrt{-b} \ \Rightarrow\ y = e^{-\sqrt{-b}\,x}$ は、どちらも微分方程式 $y'' + b\,y = 0$ の解になっている。
- 方程式 $y'' + b\,y = 0$ は y **について線形なので、2 つの解の線形結合も解となる。**

以上より、方程式 $y'' + b\,y = 0$ の**一般解**が以下の通り得られる。

$$y'' + b\,y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = C_+\,e^{\sqrt{-b}\,x} + C_-\,e^{-\sqrt{-b}\,x} \quad \left(C_+, C_- : \text{定数}\right) \tag{5.6}$$

5.2　一般の場合: 特性方程式

前節で使った**解を指数関数** $y(x) = e^{\lambda x}$ **の形に仮定する方法**は、実は一般の場合について微分方程式 (5.1) を解く際にもそのまま使える。実際、$y(x) = e^{\lambda x}$ を方程式 (5.1) に代入してみると

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad \Rightarrow \quad y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \tag{5.7}$$

$$\therefore \quad y'' + a\,y' + b\,y = \lambda^2 e^{\lambda x} + a \times \lambda e^{\lambda x} + b \times e^{\lambda x} = \left(\lambda^2 + a\,\lambda + b\right) e^{\lambda x} = 0\ . \tag{5.8}$$

式 (5.8) を満たすためには、係数 $\lambda^2 + a\,\lambda + b$ がゼロになればよい。この方程式は微分方程式 (5.1) の**特性方程式**と呼ばれており、これを解くことで指数 λ が得られる。導出方法からも見て取れる通り、**元の微分方程式 (5.1) について** $y'' \to \lambda$, $y' \to \lambda$, $y \to 1$ **と置き換えた式になっている。**

方程式 (5.1) の特性方程式

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\ . \tag{5.9}$$

特性方程式の二つの解 λ を $y(x) = e^{\lambda x}$ に代入することで、微分方程式 (5.1) の解が二つ得られる。それらの線型結合を取ることで、一般解が以下のように得られる。

方程式 (5.1) の一般解

$$y = C_+\, e^{\left(-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}\right)x} + C_-\, e^{\left(-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}\right)x} \qquad \left(C_+, C_- : 定数\right) \tag{5.10}$$

方程式 (5.1) を単に解くだけであれば、解 (5.10) が一般解になっているので話は終わりである。しかし、この講義で出てくる様々な例のように、微分方程式の解として実数解だけを考える場合にはもう少し注意が必要である。以下、順を追って説明する。

5.3 特性方程式が実数解を持つ場合

まず、**特性方程式 (5.9) が 2 つの異なる実数解を持つ場合**を考える。この場合には、任意定数 C_+, C_- を実数に取りさえすれば、一般解 (5.10) は実数解を与える。

■ 例） 次の初期値問題を解く。

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{5.11}$$

(解答例)
指数関数型の解 $y = e^{\lambda\, x}$ を仮定して、方程式 (5.11) の特性方程式を導出すると

$$y'' + y' - 2y = \left(\lambda^2 + \lambda - 2\right) e^{\lambda} = 0 \qquad \therefore\ \ \lambda^2 + \lambda - 2 = 0\ . \tag{5.12}$$

この特性方程式を解くことで、今回の場合には 2 つの実数解 λ が得られる。

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)\,(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2, 1\ . \tag{5.13}$$

これらの λ の値を $y = e^{\lambda\, x}$ に代入し、それらの線型結合を取れば方程式 (5.11) の一般解が得られる。

$$y = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x} \qquad \left(C_1, C_2 : 定数\right)\ . \tag{5.14}$$

あとは、初期条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ が満たされるように定数 C_1, C_2 を定めてやればよい。一般解 (5.14) から $y(0), y'(0)$ の値を求めて、初期条件を課すと

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x}\Big|_{x=0} = C_1 + C_2 = 1\ , \\ y'(0) &= \frac{d}{dx}\left(C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x}\right)\Big|_{x=0} = -2C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x}\Big|_{x=0} = -2C_1 + C_2 = 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\therefore \quad C_1 = \frac{1}{3}\ , \quad C_2 = \frac{2}{3}\ , \qquad y(x) = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x} = \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{x}\ . \tag{5.16}$$

5.4 特性方程式が複素解を持つ場合

次に、**特性方程式 (5.9) が複素解を持つ場合、すなわちこの方程式の判別式が負** ($a^2 - 4b < 0$) **となる場合**について考える。この場合でも方程式 (5.1) の一般解は式 (5.10) で与えられるが、解 $y(x)$ が実数値をとることを要求すると以下のような調整が必要となる。

♦ 特性方程式の複素解:

判別式が負 ($a^2 - 4b < 0$) となる場合、**特性方程式 (5.9) の解は共役複素数のペアとなる**。

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4b - a^2} \equiv -\frac{a}{2} \pm i\,\omega \tag{5.17}$$

ただし、表式を簡単化するために $\omega \equiv \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$ と略記した。

♦ オイラーの公式:

式 (5.17) の λ を使って一般解 (5.10) を書き下すにあたり、複素指数関数の式である**オイラーの公式**が必要になるので導入する。導出はこの講義では省略する。

オイラーの公式

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}\,(\cos\beta + i\sin\beta) \qquad \big(\alpha, \beta : (\text{実})\ \text{定数}\big) \tag{5.18}$$

♦ 一般解の表式:

式 (5.17) の λ を $y(x) = e^{\lambda x}$ に代入して解を二つ求め、それらの線形結合を取り一般解を構成すると

$$\begin{aligned} y(x) &= C_+\,e^{\left(-\frac{a}{2}+i\,\omega\right)x} + C_-\,e^{\left(-\frac{a}{2}-i\,\omega\right)x} \qquad\qquad (C_+, C_- : \text{定数}) \\ &= e^{-\frac{a}{2}x}\left\{C_+\,[\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)] + C_-\,[\cos(-\omega x) + i\sin(-\omega x)]\right\} \\ &= e^{-\frac{a}{2}x}\left[(C_+ + C_-)\cos(\omega x) + (C_+ - C_-)\,i\sin(\omega x)\right]\ . \end{aligned} \tag{5.19}$$

2 番目の等号ではオイラーの公式 (5.18) を用いて指数関数を三角関数で表した。

ここで、**一般解 (5.19) が実数値を取る**ことを要求する。やや天下り的ではあるが、そのためには C_+ **と** C_- **を互いに共役な複素数**にとればよい。

$$C_+ = A + B\,i\ , \quad C_- = A - B\,i \qquad (A, B : \text{実定数}) \tag{5.20}$$

$$\Rightarrow \quad C_+ + C_- = 2A\ , \quad C_+ - C_- = 2B\,i \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad y(x) &= e^{-\frac{a}{2}x}\left[(C_+ + C_-)\cos(\omega x) + (C_+ - C_-)\,i\sin(\omega x)\right] \\ &= e^{-\frac{a}{2}x}\left[2A\cos(\omega x) - 2B\sin(\omega x)\right]\ . \end{aligned} \tag{5.22}$$

表式を簡単化するために任意定数を $C_0 = 2A,\ C_1 = -2B$ と定義し直すと、以下の表式が得られる。

特性方程式が複素解を持つ場合の一般解

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\left[C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)\right] \qquad \left(C_1, C_2 : \text{定数},\ \ \omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}\right)\ . \tag{5.23}$$

この式は、以前導出した一般解の表式 (5.10) とほぼ同じものであることを強調しておく。これについて、表式に実数値だけが現れるように任意定数を調整して書き換えたものが式 (5.23) である。

特性方程式の解 $\lambda = -\frac{a}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4b - a^2} = -\frac{a}{2} \pm i\omega$ について、**λ の実部 $-\frac{a}{2}$ は右辺全体にかかる指数関数 $e^{-\frac{a}{2}x}$ の指数に、λ の虚部 ω は三角関数の角振動数 ($\sin(\omega x), \cos(\omega x)$) になる**点が特徴。

■ 例） 次の微分方程式の一般解を求める。

$$y'' + y' + y = 0 \tag{5.24}$$

(解答例)

式 (5.24) に対応する特性方程式を解くと

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\ . \tag{5.25}$$

この λ に基づいて一般解を求めると

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \qquad \bigl(C_1, C_2 : \text{定数}\bigr)\ . \tag{5.26}$$

5.5 特性方程式が重解を持つ場合

最後に、**特性方程式 (5.9) が重解を持つ場合**、すなわちこの方程式の判別式がゼロ ($a^2 - 4b = 0$) となる場合について考える。このとき、指数関数型の解 $y = e^{\lambda x}$ は一つしか得られず、これだけを使って二階微分方程式 (5.1) の一般解を構成することができない。

この場合、まず特性方程式の解としては重解が一つ得られる。

$$0 = \lambda^2 + a\,\lambda + b = \lambda^2 + a\,\lambda + \frac{a^2}{4} = \left(\lambda + \frac{a}{2}\right)^2 \qquad \therefore\quad \lambda = -\frac{a}{2}\ . \tag{5.27}$$

この λ に対応して、方程式 (5.1) の一般解は以下のようになることが示せる。

特性方程式が重解 $\lambda = -\frac{a}{2}$ を持つ場合の一般解

$$y(x) = (C_0 + C_1\,x)\,e^{-\frac{a}{2}x} \qquad \bigl(C_0, C_1 : \text{定数}\bigr) \tag{5.28}$$

($\because$) まず、判別式がゼロ ($a^2 - 4b = 0$) となる場合の特性方程式の解 λ は

$$0 = \lambda^2 + a\,\lambda + b = \lambda^2 + a\,\lambda + \frac{a^2}{4} = \left(\lambda + \frac{a}{2}\right)^2 \qquad \therefore\quad \lambda = -\frac{a}{2}\ . \tag{5.29}$$

この λ に対応して、$a^2 - 4b = 0$ の場合の微分方程式 (5.1) の解が一つ得られる。

$$y'' + a\,y' + b\,y = y'' + a\,y' + \frac{a^2}{4}\,y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = C\,e^{\lambda x} = C\,e^{-\frac{a}{2}x} \quad \bigl(C : \text{定数}\bigr) \tag{5.30}$$

方程式 (5.1) の一般解を構成するためには、式 (5.30) とは独立なもう一つの解を作る必要がある。以下では、その解を定数変化法で求める。
式 (5.30) の解 $y(x)$ について、定数 C を x の関数 $C(x)$ に置き換えて得られる $y(x) = C(x)e^{-\frac{a}{2}x}$ を元の微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned}
0 &= y'' + a\,y' + \frac{a^2}{4}\,y \\
&= \left(C(x)e^{-\frac{a}{2}x}\right)'' + a\,\left(C(x)e^{-\frac{a}{2}x}\right)' + \frac{a^2}{4}\,C(x)e^{-\frac{a}{2}x} \\
&= C''(x)e^{-\frac{a}{2}x} - a\,C'(x)e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{4}C(x)e^{-\frac{a}{2}x} + a\,\left(C'(x)e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2}C(x)e^{-\frac{a}{2}x}\right) + \frac{a^2}{4}\,C(x)e^{-\frac{a}{2}x} \\
&= C''(x)e^{-\frac{a}{2}x}\ .
\end{aligned} \tag{5.31}$$

この方程式は、右辺の係数 $C''(x)$ がゼロになれば満たされる。そのとき、$C(x)$ は一般に

$$C''(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C(x) = C_0 + C_1\,x \quad (C_0, C_1 : \text{定数})\ . \tag{5.32}$$

この $C(x)$ を $y(x) = C(x)e^{-\frac{a}{2}x}$ に代入することで、微分方程式 (5.30) の一般解が得られる。

$$y(x) = (C_0 + C_1\,x)\,e^{-\frac{a}{2}x}\ . \tag{5.33}$$