

第4回 一階常微分方程式の応用、二階微分方程式

[教科書 1.6, 2.2]

今回の内容：

- 一階非線形常微分方程式 (定数変化法の復習)
- 二階定数係数斉次常微分方程式

4.1 一階非線形常微分方程式

これまでに取り扱ってきた方程式は、未知関数 $y(x)$ とその微分について線形な方程式であった。この場合には一般解の公式 (3.12) が構築でき、定数変化法などを使って直接解く事もできた。

今回は、 $y(x)$ について非線形な項を含む一階非線形常微分方程式を扱う。線形微分方程式に比べて解くのが一般に難しいため、以下では工夫をすることで解ける次の例だけを紹介する。

ベルヌーイの方程式

$$y' + p(x)y = g(x)y^a \quad (a : \text{定数}) \quad (4.1)$$

この方程式は、変数変換 $u(x) = y^{1-a}(x)$ を行うことで線形常微分方程式に帰着して解ける。

$a \neq 0, 1$ のときには、式 (4.1) の右辺は $y(x)$ について非線形項となり、これまでに学んだ方法では解けない。これを解く準備として、まず式全体に y^{-a} をかけて整理すると

$$y^{-a}y' + p(x)y^{1-a} = g(x). \quad (4.2)$$

この式の左辺に出てくる y^{1-a} をそのまま新変数 $u(x)$ にとってみよう。

$$u(x) = y^{1-a}(x) \quad (4.3)$$

この新変数 $u(x)$ で式 (4.2) を表すためには、式 (4.3) を微分して $y'(x)$ と $u'(x)$ との関係式を作り、代入すればよい。

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy^{1-a}}{dx} = \frac{dy^{1-a}}{dy} \frac{dy}{dx} = (1-a)y^{-a} \frac{dy}{dx} \quad \therefore y^{-a}y' = \frac{1}{1-a}u'. \quad (4.4)$$

これと式 (4.3) を用いれば、式 (4.2) は

$$\frac{1}{1-a}u' + p(x)u = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad u' + (1-a)p(x)u = (1-a)g(x) \quad (4.5)$$

と、前回の講義で扱った線形常微分方程式に変形できる。あとは、前回同様に定数変化法などを用いてこれを解き、式 (4.3) に従って解 $y(x)$ を書き下せばよい。

例) ある生命体の量 $y(t)$ (人口でも微生物の個数でも何でもよい) が、次の方程式に従うとする。

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) - By^2(t) \quad (A, B : \text{定数}, A > 0) \quad (4.6)$$

右辺の $Ay(t)$ 項は、生物の量 $y(t)$ に比例して単位時間当たりの生物の増加分が増大することを示す。一方、 $-By^2(t)$ 項は、生物が過密となると生物の量 $y(t)$ が減少し、その単位時間当たりの減少量が生物量の2乗に比例することを示す。この方程式を解き、この生命体の運命を占ってみよう。

[u の線形微分方程式に変換する] 式 (4.6) を整理すると、式 (4.1) で $a = 2$ としたものと等価になる。

$$y' - Ay = -By^2 \quad (4.7)$$

これを上記と同じ要領で解いてみる。まず、式全体を y^2 で割ると

$$\frac{1}{y^2}y' - A\frac{1}{y} = -B. \quad (4.8)$$

ここで、式の左辺に出てくる $1/y(t)$ を新変数 $u(t)$ と定義してみる。

$$u(t) = \frac{1}{y(t)} \quad (4.9)$$

この式全体を t で微分すると

$$u' = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{y(t)} \right) = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt}. \quad (4.10)$$

この式を使って式 (4.8) を書き換えると

$$u' + Au = B \quad (4.11)$$

と、 $u(x)$ について線形な (非斉次) 微分方程式が得られる。

[u の一般解を求める] 式 (4.11) は非斉次の線形常微分方程式であり、定数変化法を用いて以下のように解くことができる。まず、式 (4.6) に対応する斉次方程式は

$$u' + Au = 0 \quad (4.12)$$

であり、この一般解は

$$u' = -Au \quad \Rightarrow \quad u = Ce^{-At} \quad (C: \text{定数}). \quad (4.13)$$

定数変化法では、この一般解に含まれる定数 C を x の関数 $C(x)$ に直した式

$$u = C(x)e^{-At} \quad (4.14)$$

を元の非斉次方程式 (4.11) に代入する。こうすることで

$$\begin{aligned} B = u' + Au &= \frac{d}{dx} (C(x)e^{-At}) + AC(x)e^{-At} \\ &= C'(x)e^{-At} - C(x)Ae^{-At} + AC(x)e^{-At} \\ &= C'(x)e^{-At} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\therefore C'(x) = Be^{At} \quad (4.16)$$

この方程式を x で積分して、関数 $C(x)$ を求めると

$$C(x) = \frac{B}{A}e^{At} + \tilde{C} \quad (\tilde{C}: \text{定数}). \quad (4.17)$$

この $C(x)$ を式 (4.14) に代入することで、 $u(x)$ の微分方程式 (4.11) の一般解が得られる:

$$u(x) = C(x)e^{-At} = \left(\frac{B}{A}e^{At} + \tilde{C} \right) e^{-At} = \frac{B}{A} + \tilde{C}e^{-At} \quad (\tilde{C}: \text{定数}) \quad (4.18)$$

[解 y の表式に書き直す] 最後に、もともとの変数 $y(t)$ についてこの解を表すと

$$y(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{\frac{B}{A} + \tilde{C}e^{-At}} \quad (\tilde{C}: \text{定数}) \quad (4.19)$$

これが、もともとの微分方程式 (4.6) の一般解である。

(得られた解の性質) $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-At} = 0$ となることに気を付けると、解 (4.19) は初期時刻と長時間経過後に以下のようにふるまうことが分かる。

$$y(t) = \frac{1}{\frac{B}{A} + \tilde{C}e^{-At}} = \begin{cases} \frac{1}{\frac{B}{A} + \tilde{C}} = (\text{定数}) & (t = 0) \\ \frac{1}{\frac{B}{A}} & (t \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (4.20)$$

すなわち、生物の量 $y(t)$ は初期値 $\frac{1}{\frac{B}{A} + \tilde{C}}$ からスタートし、時間がたつにつれて最終値 $\frac{A}{B}$ に収束する。

この最終値は、 $y(t)$ の増加分 (A に比例) と減少分 (B に比例) がちょうど釣り合う点に相当する。

4.2 二階 定数係数 斉次 常微分方程式

本節以降では、未知関数 $y(x)$ の二階微分を含む微分方程式を取り扱う。最も簡単な例を挙げると

$$y'' = 0. \quad (4.21)$$

これは、次のように x 積分を 2 回行うことで解 $y(x)$ が得られる。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (4.22)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int 0 dx = C_1 \quad (C_1 : \text{定数}) \quad (4.23)$$

$$\Rightarrow y(x) = \int \frac{dy}{dx} dx = \int C_1 dx = C_1 x + C_2 \quad (C_1, C_2 : \text{定数}) \quad (4.24)$$

式 (4.21) が二階微分 y'' を持つことに対応して、一般解 (4.24) は 2 つの積分定数 C_1, C_2 を持つ。より正確には、 $y(x) = C_1 x$ と $y(x) = C_2$ は各々単独で方程式 (4.21) の解になっており、一般解 (4.24) はそれらの足し合わせになっている。これは、線形の 2 階常微分方程式に共通の性質となっている。

以下では、本節のタイトルとなっている二階 定数係数 斉次 常微分方程式を扱う。この意味は、3.1 節で説明した 1 階常微分方程式の場合と同様で

$$y'' + a y' + b y = 0 \quad (a, b : \text{定数}) \quad (4.25)$$

という、未知関数 $y(x)$ とその微分 y', y'' について 1 次の項だけで構成された、定数係数の二階常微分方程式のことを指す。

二階線形常微分方程式の一般解

方程式 (4.25) の 2 つの独立な解を $y(x) = y_1(x)$, $y(x) = y_2(x)$ としよう。方程式 (4.25) が y について線形であるため、2 つの解を足し合わせた

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (C_1, C_2 : \text{定数}) \quad (4.26)$$

も解となる。この解は 2 つの任意定数 C_1, C_2 を含むため、式 (4.25) の一般解となる。

(\because) y_1, y_2 はどちらも式 (4.25) の解なので

$$y_1'' + a y_1' + b y_1 = 0, \quad y_2'' + a y_2' + b y_2 = 0. \quad (4.27)$$

一方、 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ を方程式 (4.25) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} y'' + a y' + b y &= (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + a (C_1 y_1 + C_2 y_2)' + b (C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= C_1 \times (y_1'' + a y_1' + b y_1) + C_2 \times (y_2'' + a y_2' + b y_2) \\ &= C_1 \times 0 + C_2 \times 0 = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

したがって、 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ は式 (4.25) を満たす解であり、2 つの任意定数を含むことから二階常微分方程式 (4.25) の一般解となっている。

この計算では、方程式 (4.25) が y について線形であるために、 y_1, y_2 それぞれだけについての式に分解できることを使っている。また、式の最後の行では式 (4.27)、すなわち y_1, y_2 のそれぞれが式 (4.25) の解であることを用いた。

4.2.1 $y'' + b y = 0$ の解法

$a = 0$ の時に得られる方程式

$$y'' + b y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' = -b y \quad (4.29)$$

の一般解を構成してみよう。

上で説明したとおり、2つの任意定数を含む解を構成できれば、その二階線形微分方程式の一般解を構成できたことになる。式(4.29)については、そのような解を直接見つけることができ¹

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \sin(\sqrt{b}x) + C_2 \cos(\sqrt{b}x) & (b > 0) \\ C_1 x + C_2 & (b = 0) \\ C_1 e^{\sqrt{-b}x} + C_2 e^{-\sqrt{-b}x} & (b < 0) \end{cases} \quad (C_1, C_2 : \text{定数}) \quad (4.30)$$

となる。

4.2.2 初期値問題

2階微分方程式の一般解は2つの任意定数を含むため、それらの定数の値を決定するためには2つの条件が必要となる。その一つの与え方は、初期位置 $x = x_0$ における $y(x = x_0)$ とその微分 $y'(x = x_0)$ の値を指定することである。このような設定で特定の解を求める問題のことを初期値問題と呼ぶ。

一階微分方程式の時には $y(x_0)$ の値を指定するだけで解が一つに定まったが、微分方程式が2階になったことで必要となる条件が2つに増えている。

例) 次の初期値問題を解け。

$$y''(x) = -\pi^2 y(x), \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0 \quad (4.31)$$

(解答例) まず、方程式 $y''(x) = -\pi^2 y(x)$ の一般解は

$$y(x) = C_1 \sin(\pi x) + C_2 \cos(\pi x) \quad (C_1, C_2 : \text{定数}). \quad (4.32)$$

あとは、任意定数 C_1, C_2 を初期条件 $y(1) = 2, y'(1) = 0$ が満たされるように決めてやればよい。

$$y'(x) = \pi [C_1 \cos(\pi x) - C_2 \sin(\pi x)] \quad (4.33)$$

となることから、

$$y(1) = C_1 \sin(\pi) + C_2 \cos(\pi) \Big|_{x=1} = C_1 \sin(\pi) + C_2 \cos(\pi) = -C_2 = 2 \quad (4.34)$$

$$y'(1) = \pi [C_1 \cos(\pi) - C_2 \sin(\pi)] \Big|_{x=1} = \pi [C_1 \cos(\pi) - C_2 \sin(\pi)] = -\pi C_1 = 0 \quad (4.35)$$

$$\therefore C_1 = 0, \quad C_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = -2 \cos(\pi x). \quad (4.36)$$

¹次回導入するオイラーの公式

$$e^{i\lambda x} = \cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)$$

を用いれば、 $b < 0$ の場合の解は

$$y(x) = c_1 e^{i\sqrt{-b}x} + c_2 e^{-i\sqrt{-b}x} \quad (c_1, c_2 : \text{定数})$$

と、 $b > 0$ の場合の解と同様の形で書き表せる。ただし、 $y(x)$ が実数となるためには $c_1 = \bar{c}_2$ 、つまり c_2 は c_1 の共役複素数でなければならない。