第3回　1階線形常微分方程式（一般解、定数変化法）

[教科書 1.6]

今回の内容：

- 復習：完全微分型方程式、積分因子の方法
- 1階線形常微分方程式
- 定数変化法

3.1　1階線形常微分方程式

今回は、次の形の常微分方程式の解法を学ぶ。

$$y' + p(x)y = r(x) \tag{3.1}$$

この方程式は、未知関数 $y(x)$ **について線形** ($y(x)$ とその微分 $y'(x)$ の1次式) である。
式 (3.1) をさらに以下のように分類する。

- $r(x) = 0$ **の場合**：$y' + p(x)y = 0$ と、式全体が $y(x)$ について1次の項だけになる
  $\Leftrightarrow$ 式 (3.1) は $y(x)$ の**斉次方程式**
- $r(x) \neq 0$ **の場合**：$y' + p(x)y = r(x)$ と、$y(x)$ について1次の項と0次の項が現れる
  $\Leftrightarrow$ 式 (3.1) は $y(x)$ の**非斉次方程式**

斉次方程式は**同次方程式**と呼ばれることもある。

3.1.1　斉次方程式の解法

$r(x) = 0$ の時には、方程式 (3.1) は

$$y' + p(x)y = 0 \tag{3.2}$$

と単純化する。これは、変数分離の方法で解ける形になっており

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + C \quad \Leftrightarrow \quad \log y = -\int p(x)dx + C \tag{3.3}$$

$$\therefore \quad y = e^C e^{-\int p(x)dx} \equiv \tilde{C} e^{-\int p(x)dx} \quad (\tilde{C} : \text{定数}) \ . \tag{3.4}$$

3.1.2　非斉次方程式の解法

$r(x) \neq 0$ の場合には、式 (3.1) は変数分離形になっておらず、上記の方法では解が得られない。式 (3.1) を少し書き換えて

$$(p(x)y - r(x))\, dx + dy = 0 \tag{3.5}$$

とし、これを積分因子の方法で解くことを試みる。
仮に、式 (3.1) に積分因子 $F(x)$ をかけたものが全微分型 $du(x, y) = 0$ となると仮定する。すると

$$0 = F(x)\,(p(x)y - r(x))\,dx + F(x)dy = du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{3.6}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial x} = F(x)\left(p(x)y - r(x)\right) & \Rightarrow \quad \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x} = F(x)p(x) \\
\dfrac{\partial u}{\partial y} = F(x) & \Rightarrow \quad \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = F'(x)
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

二階偏微分方程式は $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}$(可積分条件) を満たすことから

$$
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = F(x)p(x) \tag{3.8}
$$

この $F(x)$ についての微分方程式は式 (3.2) と同様の方法で解くことができ、その解は

$$
F(x) = Ce^{\int p(x)dx} \qquad (C : \text{定数}) \tag{3.9}
$$

となる。ここで、積分因子に含まれる積分定数 C をどの値にとってもその後の計算は同様なので、以下では $C = 1$ とする。

以下では、積分因子 $F(x) = e^{\int p(x)dx}$ を用いて式 (3.6) を解く。式 (3.7) の $\partial u/\partial y$ をもとに関数 $u(x, y)$ を構築すると

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\int p(x)dx}\left(p(x)y - r(x)\right) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx = y\, e^{\int p(x)dx} - \int \left(e^{\int p(x)dx} r(x)\right) dx + C(y) \tag{3.10}
$$

この $u(x, y)$ の表式が、式 (3.7) の第二式 ($\frac{\partial u}{\partial y} = F(x) = e^{\int p(x)dx}$) も満たすためには、$C(y)$ が y に依らない定数 C であればよい。

以上の結果により、式 (3.6) は式 (3.10) の $u(x, y)$ (ただし C は定数) を用いて $du = 0$ と表されることが分かった。微分方程式 $du = 0$ の解は単に $u =$ (定数) で与えられるので、結局式 (3.6) の解は

$$
u(x, y) = y\, e^{\int p(x)dx} - \int \left[e^{\int p(x)dx} r(x)\right] dx + C = \tilde{C} \tag{3.11}
$$

$$
\therefore \qquad y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int \left(e^{\int p(x)dx} r(x)\right) dx + C\, e^{-\int p(x)dx} \quad (C : \text{定数}) \tag{3.12}
$$

ただし、式 (3.11) における積分定数の合計 $\tilde{C} - C$ を、式 (3.12) では C と再定義している。

コメント：式 (3.12) の右辺第 2 項は、実は斉次方程式の解 (3.4) になっている。一方、右辺第 1 項は非斉次方程式の特解（任意パラメタを含まない解）である。すなわち、非斉次方程式 (3.1) の解は一般に

(非斉次方程式の一般解) = (非斉次方程式の特解) + (斉次方程式の一般解)

と表されることになる。

上記の計算では、非斉次方程式の特解を求めるのに積分因子の方法を用いた。しかし、もし別の方法（勘や気合で求める、定数変化方で求めるなど）でこの特解さえ求められれば、あとは斉次方程式の一般解を求めて足すことで同じ問題を解ける。どの方法でも結果は同じになるので、自分のやりやすい方法で解けばよい。

3.2 定数変化法

式 (3.1) のもう一つの解法である**定数変化法**を、具体的な微分方程式を例にとって説明する。

$$
y' - y = e^{2x} \tag{3.13}
$$

この微分方程式を、以下の定数変化法で求めてみよう。

定数変化法による解法

1. 右辺をゼロにして得られる斉次方程式の一般解を求める。
2. 斉次方程式の一般解の積分定数 C を x の関数 $C(x)$ に書き換える。
3. それをもとの微分方程式に代入　→　$C(x)$ の微分方程式として解いて一般解を求める。
4. 得られた $C(x)$ を斉次方程式の解に代入すると、非斉次方程式の一般解が得られる。

では順を追ってやってみる。

1. 右辺をゼロにして得られる斉次方程式の一般解を求める。今回の場合は $y' - y = 0$ を解く。
   今回の場合は、以下の方程式を解くことになる。
   $$y' - y = 0 \tag{3.14}$$
   これの解法は省略するが、一般解は次のように得られる。
   $$y(x) = Ce^x \qquad (C : \text{定数}) \tag{3.15}$$
2. 斉次方程式の一般解の積分定数 C を x の関数 $C(x)$ に書き換える。
   式 (3.15) で、$C \ \to C(x)$ と定数 C だったものを x の関数に格上げする：
   $$y(x) = C(x)e^x \ . \tag{3.16}$$
3. それをもとの微分方程式に代入　→　$C(x)$ の微分方程式として解いて一般解を求める。
   $$e^{2x} = y' - y = \frac{d}{dx}\left(C(x)e^x\right) - C(x)e^x = e^x\frac{dC(x)}{dx} \ . \tag{3.17}$$
   この方程式 $\dfrac{dC(x)}{dx} = e^x$ の一般解は、この式を x 積分することで以下のように得られる:
   $$\frac{dC(x)}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad C(x) = e^x + \tilde{C} \quad (\tilde{C} : \text{定数}) \tag{3.18}$$
4. 得られた $C(x)$ を斉次方程式の解に代入すると、非斉次方程式の一般解が得られる。
   $$y(x) = C(x)e^x = \left(e^x + \tilde{C}\right)e^x = e^{2x} + \tilde{C}e^x \quad \left(\tilde{C} : \text{定数}\right) \ . \tag{3.19}$$

最終結果 (3.19) の右辺第 1 項は非斉次方程式の特解、第二項は斉次方程式の一般解 (3.15) となっている。定数変化法ではなく、積分因子の方法で一般解を求めても同じ結果が得られる。

例）　次の微分方程式を、定数変化法で解いてみる。
$$y' + xy = 4x \tag{3.20}$$
まず、右辺をゼロにして得られる斉次方程式は、以下のように変数分離法を用いて解ける。
$$\frac{dy}{dx} + xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xdx = -\frac{1}{y}dy \tag{3.21}$$
この式全体を積分することで
$$\int xdx = -\int \frac{1}{y}dy + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 = -\log y + C \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{-\frac{1}{2}x^2 + C} = \tilde{C}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (\tilde{C} = e^C : \text{定数}) \tag{3.22}$$

積分定数 $\tilde{C}$ を x の関数 $\tilde{C}(x)$ に置き換えて、元の方程式 (3.20) に代入すると

$$\begin{aligned} 4x = y' + xy &= \frac{d}{dx}\left(\tilde{C}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) + x\,\tilde{C}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= \frac{d\tilde{C}(x)}{dx}e^{-\frac{1}{2}x^2} - x\tilde{C}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} + x\,\tilde{C}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{d\tilde{C}(x)}{dx}e^{-\frac{1}{2}x^2}\ . \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\therefore \quad \frac{d\tilde{C}(x)}{dx} = 4xe^{\frac{1}{2}x^2}\ . \tag{3.24}$$

式 (3.24) を積分して $\tilde{C}(x)$ を求めるためには、新変数 $z = x^2$ を導入するとよい。まず、

$$dz = d\left(x^2\right) = 2xdx \qquad \therefore \quad dx = \frac{1}{2x}dz\ . \tag{3.25}$$

これを用いると、式 (3.24) の不定積分は

$$\tilde{C}(x) = \int 4xe^{\frac{1}{2}x^2}dx = \int 4xe^{\frac{1}{2}z}\frac{1}{2x}dz = 2\int e^{\frac{1}{2}z}dz = 4e^{\frac{1}{2}z} + \hat{C} = 4e^{\frac{1}{2}x^2} + \hat{C} \quad (\hat{C}: \text{定数}) \tag{3.26}$$

これを用いると、元の方程式 (3.20) の解は

$$y(x) = \tilde{C}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} = \left(4e^{\frac{1}{2}x^2} + \hat{C}\right)e^{-\frac{1}{2}x^2} = 4 + \hat{C}e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (\hat{C}: \text{定数})\ . \tag{3.27}$$