# 第14回　ラプラス変換と微分方程式（3）

[教科書 (フーリエ解析と偏微分方程式) 1.3, 1.5, 1.6, 1.7]

今回の内容：

- $\delta$ 関数と第2移動定理
- ラプラス変換の積と畳み込み積分
- 連立微分方程式への応用

## 14.1　$\delta$ 関数と第2移動定理

### 14.1.1　復習（$\delta$ 関数、第2移動定理）

ディラックの $\delta$ 関数は以下の性質を持つ。

$$\delta(t-a)=\begin{cases}\infty & (t=a)\\ 0 & (t\neq a)\end{cases}\ , \qquad \int_0^\infty \delta(t-a)dt=1\ , \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty f(t)\delta(t-a)dt=f(a) \qquad (a:\text{定数}) \tag{14.1}$$

この性質とラプラス変換の定義式を組み合わせると、$\delta$ 関数のラプラス変換が以下の通り得られる:

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right]=\int_0^\infty \delta(t-a)\,e^{-st}dt=\left.e^{-st}\right|_{t=a}=e^{-as}\ . \tag{14.2}$$

今回の講義で使う**第2移動定理**も復習しておく。関数 $f(t)$ のグラフの平行移動に関する定理であった。

**ラプラス変換の第2移動定理**:
関数 $f(t)$ の $t\geq 0$ 部分を $t$ 方向に $a\geq 0$ だけ平行移動した関数 $\theta(t-a)f(t-a)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)]$ は、元の関数のラプラス変換 $\mathcal{L}[f]$ の $e^{-as}$ 倍になる:

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)]=e^{-as}\mathcal{L}[f(t)] \qquad (a\geq 0)\ . \tag{14.3}$$

ただし、$\theta(t-a)$ は階段関数。

### 14.1.2　第2移動定理の応用

前回、$\delta$ 関数を非斉次項（入力）として持つような微分方程式を考えた。

$$y''+A\,y'+B\,y=C\,\delta(t-a)\ ,\quad y(0)=0\ ,\quad y'(0)=0 \quad (A,B,C,y_0,y_1:\text{定数}) \tag{14.4}$$

これは、微分方程式が表す系（運動する質点や回路を流れる電流）に一瞬だけ作用する**激力**を与えた場合に相当する。方程式の解は、その激力が与えられた後の時間発展の様子を表している。

前回は、簡単のため $a=0$ の場合（$t=0$ に激力が与えられた場合）を考えた。今回は一般の $a>0$ の場合を考えて、式 (14.4) をそのまま解いてみることにしよう。

式 (14.4) の両辺をラプラス変換すると、$\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$ として

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[y''+Ay'+By\right]&=\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)+A\left(sY(s)-y(0)\right)-BY(s)\\&=\left(s^2+As+B\right)Y(s) \qquad (14.5)\\ \mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right]&=e^{-sa} \qquad (14.6)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left(s^2+As+B\right)Y(s)=e^{-sa} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s)=\frac{e^{-sa}}{s^2+As+B}\ . \tag{14.7}$$

あとは、この $Y(s)$ の逆ラプラス変換を実行できれば解 $y(t)$ が得られる。$Y(s)$ の関数形をよく見ると、右辺に $e^{-as}$ がかかっており、ちょうど第 2 移動定理を適用できる形になっている。

$$Y(s)=e^{-sa}\times\frac{1}{s^2+As+B}\quad\Rightarrow\quad y(t)=\theta(t-a)f(t-a)\quad\left(f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+As+B}\right]\right)\tag{14.8}$$

$Y(s)$ のうち、$\frac{1}{s^2+As+B}$ の部分をまず逆ラプラス変換しておいて、それについて $t\to t-a$ と平行移動をかけたものが最終結果となっている。

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+As+B}\right]$ は、$a=0$ の場合、すなわち激力が $t=0$ に与えられた場合の解を表している。激力を $t=a$ に与えた場合の解は、その解の時刻 $t$ を $a$ だけずらしたもので与えられる。それを表しているのが式 (14.8) の $y(t)$ である。

例）単振動を記述する微分方程式に、入力として $\delta(t-a)$ を入れると下記のようになる。

$$y''+\omega^2y=\delta(t-a),\quad y(0)=y'(0)=0\tag{14.9}$$

この方程式をラプラス変換すると

$$\left(s^2+\omega^2\right)Y(s)=e^{-sa}\quad\Leftrightarrow\quad Y(s)=\frac{e^{-sa}}{s^2+\omega^2}\ .\tag{14.10}$$

この $Y(s)$ のうち、$\frac{1}{s^2+\omega^2}$ の逆ラプラス変換は $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\omega^2}\right]=\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$. したがって、式 (14.10) の $Y(s)$ に第 2 移動定理を適用すると

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=\theta(t-a)\times\left(\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\bigg|_{t\to t-a}\right)=\frac{1}{\omega}\theta(t-a)\sin\bigl(\omega(t-a)\bigr)\ .\tag{14.11}$$

これは、$a=0$ の場合（激力が $t=0$ に加えられた場合）の解 $y(t)=\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$ について、$t>0$ の部分を $a$ だけ平行移動したものになっている。

## 14.2　畳み込み積分

今回の講義ではあまり活用しないが、**ラプラス変換の積**の逆変換を可能にしてくれる**畳み込み積分**を説明しておく。フーリエ変換についても同様の結果となるほか、理論的には重要な役割を果たす。

**畳み込みの定理**

2 つの関数 $f(t),g(t)$ の**畳み込み積分**を以下で定義する：

$$\left(f*g\right)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\tag{14.12}$$

これをラプラス変換したものは、$f(t),g(t)$ **各々のラプラス変換** $F(s)=\mathcal{L}[f(t)],G(s)=\mathcal{L}[g(t)]$ **の積**となる。

$$\mathcal{L}\left[\left(f*g\right)(t)\right]=F(s)G(s)\quad\Leftrightarrow\quad\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)G(s)\right]=\left(f*g\right)(t)\ .\tag{14.13}$$

ラプラス変換が 2 つの関数の積で与えられているとき、上記の定理を使えばその逆ラプラス変換を（少なくとも形式的には）書き下せることになる。複雑な関数の逆ラプラス変換を求めるときには有用となりえる。

[式 (14.13) の証明]
ラプラス変換の積 $F(s)\times G(s)$ を書き換えると、ちょうど畳み込み積分のラプラス変換 $\mathcal{L}\left[\left(f*g\right)(t)\right]$

になることを示す。まず、$F(s)\times G(s)$ を定義通り書き下すと

$$F(s)G(s)=\left(\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right)\left(\int_0^\infty g(\tilde{\tau})e^{-s\tilde{\tau}}d\tilde{\tau}\right)=\int_0^\infty d\tau\int_0^\infty d\tilde{\tau}\,f(\tau)g(\tilde{\tau})e^{-s(\tau+\tilde{\tau})} \tag{14.14}$$

ここで、$t\equiv\tau+\tilde{\tau}$ とおき、$\tilde{\tau}$ を消去する。また、積分経路を図 8 のように変形することにして、まず $t=(一定)$ の線上で $\tau\in[0,t]$ について積分し、引き続いて $t\in[0,\infty)$ について積分する。[6] このようにすると、式 (14.14) は

$$\int_0^\infty d\tau\int_0^\infty d\tilde{\tau}\,f(\tau)g(\tilde{\tau})e^{-s(\tau+\tilde{\tau})}=\int_0^\infty dt\int_0^t d\tau f(\tau)g(t-\tau)e^{-st}=\int_0^\infty\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)e^{-st}dt\,. \tag{14.15}$$

右辺の被積分関数は畳み込み積分 $(f*g)(t)$ に一致しており、その外側の $t$ 積分はラプラス変換の定義そのものである。従って、$F(s)G(s)$ が $\mathcal{L}\left[(f*g)(t)\right]$ に等しくなること (式 (14.13)) が示された。

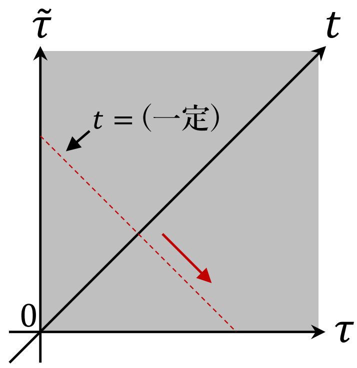


図 8: 式 (14.15) で用いた積分経路。元の変数である $(\tau,\tilde{\tau})$ についての積分範囲は図中の灰色の領域である。式 (14.15) では、同じ領域上の積分を、まず $t=(一定)$ の線分 (赤線) 上に沿って積分し、次いで $t$ について $[0,\infty)$ の範囲で積分することで実行している。

### 14.2.1 微分方程式と畳み込み積分

改めて、初期条件 $y(0)=y'(0)=0$ のもとでの初期値問題を考えてみよう。非斉次項 $r(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[r(t)]=R(s)$ とすると

$$y''+ay'+by=r(t)\ ,\quad y(0)=y'(0)=0\quad\Leftrightarrow\quad Y(s)=\frac{R(s)}{s^2+as+b}\,. \tag{14.16}$$

この $Y(s)$ は非斉次項 $R(s)$ と $\frac{1}{s^2+as+b}$ との積で表されている。従って、畳み込みの定理を用いると

$$Y(s)=R(s)\times\frac{1}{s^2+as+b}=\mathcal{L}\left[(r*f)(t)\right]\qquad\left(f(t)\equiv\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+as+b}\right]\right) \tag{14.17}$$

$$\therefore\quad y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=(r*f)(t)=\int_0^t r(\tau)f(t-\tau)d\tau\,. \tag{14.18}$$

前節でも触れたが、$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+as+b}\right]$ は $\delta$ 関数が入力 ($r(t)=\delta(t)$) である場合の微分方程式の解である。従って、一般の $r(t)$ に対する微分方程式 (14.16) は、非斉次項 $r(t)$ と $\delta$ 関数に対する微分方程式の解 $f(t)$ との畳み込み積分で与えられることになる。この $f(t)$ は、学問分野によって**応答関数**、**伝搬関数**、**グリーン関数**などと呼ばれるものである。

[6] 面積要素 $d\tau d\tilde{\tau}$ が、座標変換 $(\tau,\tilde{\tau})\to(\tau,t=\tau+\tilde{\tau})$ によって以下のように変換することを計算で用いている。

$$d\tau d\tilde{\tau}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\tau}{\partial\tau}&\frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial\tau}\\\frac{\partial\tau}{\partial t}&\frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial t}\end{pmatrix}d\tau d\tilde{\tau}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\tau}{\partial\tau}&\frac{\partial(t-\tau)}{\partial\tau}\\\frac{\partial\tau}{\partial t}&\frac{\partial(t-\tau)}{\partial t}\end{pmatrix}d\tau d\tilde{\tau}=\det\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}d\tau d\tilde{\tau}=d\tau d\tilde{\tau}$$

### 14.3 連立微分方程式への応用

最後に、**ラプラス変換の連立微分方程式への応用**について簡単に説明しておく。以下では一階微分方程式について説明するが、同様の方法で二階微分方程式も解くことができる。

二つの変数 $y_1(t), y_2(t)$ についての一階微分方程式系を考えよう。

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}\, y_1(t) + a_{12}\, y_2(t) + r_1(t)\ , & y_1(0) = C_1 \\ y_2'(t) = a_{21}\, y_1(t) + a_{22}\, y_2(t) + r_2(t)\ , & y_2(0) = C_2 \end{cases} \tag{14.19}$$

連立方程式についても、これまでと同様に方程式をラプラス変換してよい。

$$\begin{cases} s\,Y_1(s) - y_1(0) = a_{11}\,Y_1(s) + a_{12}\,Y_2(s) + R_1(s) \\ s\,Y_2(s) - y_2(0) = a_{21}\,Y_1(s) + a_{22}\,Y_2(s) + R_2(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s-a_{11})\,Y_1(s) \quad - a_{12}\,Y_2(s) = C_1 + R_1(s) \\ -a_{21}\,Y_1(s) + (s-a_{22})\,Y_2(s) = C_2 + R_2(s) \end{cases} \tag{14.20}$$

あとは、この方程式系を $Y_1(s), Y_2(s)$ について代数的に解き、それらを逆ラプラス変換すれば、初期値問題 (14.19) の解 $y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)], y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)]$ が得られる。

例）次の初期値問題を解いてみる。

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \quad , & y_1(0) = 0 \\ y_2' = \qquad y_2 + 1\ , & y_2(0) = 0 \end{cases} \tag{14.21}$$

方程式をラプラス変換すると

$$\begin{cases} s\,Y_1 = Y_1 + Y_2 \\ s\,Y_2 = \qquad Y_2 + \frac{1}{s} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s-1)Y_1 - Y_2 = 0 \\ (s-1)Y_2 \qquad = \frac{1}{s} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_1 = \frac{1}{s(s-1)^2} \\ Y_2 = \frac{1}{s(s-1)} \end{cases} . \tag{14.22}$$

あとは、得られた $Y_1, Y_2$ を逆ラプラス変換すれば解 $y_1, y_2$ が得られる。そのために、$Y_1, Y_2$ を部分分数分解すると

$$Y_1(s) = \frac{1}{s(s-1)^2} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{(s-1)^2} + \frac{C_3}{s-1} = \frac{(C_1+C_3)s^2 + (-2C_1+C_2-C_3)s + C_1}{s(s-1)^2} \tag{14.23}$$

$$\therefore \quad C_1 = 1\ , \quad C_2 = 1\ , \quad C_3 = -1\ , \quad Y_1(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1}\ , \tag{14.24}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\ . \tag{14.25}$$

これらの表式を逆ラプラス変換して解 $y_1(t), y_2(t)$ を求めると

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = 1 + t\,e^t - e^t\ , \tag{14.26}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y_2(s)\right] \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = e^t - 1\ . \tag{14.27}$$

ただし、これまでに導出したラプラス変換 $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$、および $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$ とラプラス変換の微分の公式 $\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$ とを組み合わせて得られる $\mathcal{L}\left[te^{at}\right] = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-a} = \frac{1}{(s-a)^2}$ を計算のため使った。

連立方程式系で表される系には応用上も重要となるものが数多くあるが、本講義では説明を割愛する。詳しくは教科書を参照のこと。