第 13 回　ラプラス変換と微分方程式 (2)

[教科書 (フーリエ解析と偏微分方程式) 1.3, 1.6]

今回の内容：

- 部分分数分解による解法
- δ 関数とラプラス変換

13.1　部分分数分解による解法

13.1.1　復習：ラプラス変換と微分方程式

前回、ラプラス変換を用いて微分方程式を解くための手順を学んだ。$y(t)$ についての初期値問題

$$y''(t) + ay'(t) + b = r(t)\,, \quad y(0) = y_0\,, \quad y'(0) = y_1 \qquad (a, b : \text{定数}) \tag{13.1}$$

を解くための手順を軽く復習する。以下では $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ と表す。

1. **微分方程式の両辺をラプラス変換して等置する。**
   まず、式 (13.1) の左辺をラプラス変換する。
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[y''(t) + ay'(t) + b\right] &= s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + a\big[s\,Y(s) - y(0)\big] + b\,Y(s)\\ &= \big(s^2 + a\,s + b\big)\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - a\,y(0)\\ &= \big(s^2 + a\,s + b\big)\,Y(s) - s\,y_0 - y_1 - a\,y_0\ .\end{aligned} \tag{13.2}$$
   一方、式 (13.1) の右辺のラプラス変換は $\mathcal{L}[r(t)] = R(s)$ と表すことにする。
   方程式 (13.1) の両辺をラプラス変換したものは互いに等しくなるので、
$$[\text{ 式 (13.1) }] \qquad \Leftrightarrow \qquad \big(s^2 + a\,s + b\big)\,Y(s) - s\,y_0 - y_1 - a\,y_0 = R(s)\ . \tag{13.3}$$

2. **$Y(s)$ を求める。** 式 (13.3) を $Y(s)$ について解けばよい。
$$Y(s) = \frac{R(s) + s\,y_0 + y_1 + a\,y_0}{s^2 + a\,s + b} \tag{13.4}$$

3. **ラプラス逆変換で $y(t)$ を求める。**
   $Y(s)$ をラプラス逆変換したものが $y(t)$ であり、これが初期値問題 (13.1) の解となる。
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R(s) + s\,y_0 + y_1 + a\,y_0}{s^2 + a\,s + b}\right]\ . \tag{13.5}$$
   逆変換の実際の計算要領は $Y(s)$ の関数形に応じて様々である。次節で詳しく述べる。

13.1.2　部分分数分解

上記の手順 3 のラプラス逆変換の計算は、**まず $Y(s)$ の関数形を単純化**し、それについて逆変換を取ることで行われる。$Y(s)$ は分数式の形をとる (式 (13.3) 参照) ため、これを**部分分数分解**して単純化する必要が出てくる。よくあるパターンを以下でまとめる。

逆ラプラス変換をするにあたり、これまでに導出した以下の結果を使う。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1,\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t,\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at},\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t),\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \cos(\omega t). \tag{13.6}$$

- **分母が $(s-a)$ (a: 実数) の積**

説明のための例題として、次の初期値問題を考える。

$$y'' + y' - 6y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \tag{13.7}$$

先ほどの手順に従って、まず方程式をラプラス変換すると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[y'' + y' - 6y\right] &= \left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + (sY(s) - y(0)) - 6Y(s) \\ &= \left(s^2 + s - 6\right) Y(s) - 1\end{aligned} \tag{13.8}$$

$$\therefore \quad \left(s^2 + s - 6\right) Y(s) - 1 = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2 + s - 6}\left(\frac{1}{s} + 1\right) = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} \ . \tag{13.9}$$

このように**分母が $(s-a)$ (a:実数) の積で与えられるときは、分母の各因子を分母に持つ分数の和に分解**できる。

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s-2} + \frac{C_3}{s+3} \qquad (C_1, C_2, C_3 : \text{定数}) \tag{13.10}$$

定数 $C_{1,2,3}$ を決定するには、右辺を一つの分数にまとめなおし、元の分数と比較すればよい。

$$Y(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s-2} + \frac{C_3}{s+3} = \frac{(C_1 + C_2 + C_3)\, s^2 + (C_1 + 3C_2 - 2C_3)\, s - 6C_1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} \tag{13.11}$$

$$\therefore \ C_1 + C_2 + C_3 = 0, \ C_1 + 3C_2 - 2C_3 = 1, \ -6C_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{6}, \ C_2 = \frac{3}{10}, \ C_3 = -\frac{2}{15} \tag{13.12}$$

$$\therefore \quad Y(s) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{s+3} \ . \tag{13.13}$$

微分方程式の解 $y(t)$ は、この $Y(s)$ をラプラス逆変換すれば得られる。$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$ を使うと

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = -\frac{1}{6} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{3}{10} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \frac{2}{15} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10} e^{2t} - \frac{2}{15} e^{-3t} \ . \tag{13.14}$$

- **分母に重複因子 $(s-a)^m$ が現れる場合**

場合によっては $(s-a)^m$ のような項が分母に現れることがある。この場合には、$\frac{1}{s-a}$, $\frac{1}{(s-a)^2}$, ..., $\frac{1}{(s-a)^m}$ の和を用いて部分分数分解をすればよい。

例）$Y(s) = \dfrac{1}{s^2(s-2)}$ を逆ラプラス変換する。

分母に s^2 が現れているので、$\frac{1}{s}$ と $\frac{1}{s^2}$ の両方を使って分解する。

$$\frac{1}{s^2(s-2)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s^2} + \frac{C_3}{s-2} = \frac{(C_1 + C_3)\, s^2 + (-2C_1 + C_2)\, s - 2C_2}{s^2(s-2)} \tag{13.15}$$

両辺の分子を比較して

$$C_1 + C_3 = 0, \quad -2C_1 + C_2 = 0, \quad -2C_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{4}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{1}{4} \tag{13.16}$$

$$\therefore \quad Y(s) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-2} \tag{13.17}$$

逆ラプラス変換 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ は、右辺の各項を式 (13.6) に従って変換すれば得られる。

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t} \ . \tag{13.18}$$

- **分母に s^2+a $(a>0)$ が現れる場合**
  この場合は $\frac{1}{s^2+a}$ を使って部分分数分解し、逆ラプラス変換して $\sin(\sqrt{a}t), \cos(\sqrt{a}t)$ を得るという流れになる。[5]

  例）次の初期値問題を考える。

$$y'' + \omega^2 y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0 \ . \tag{13.19}$$

  まず、方程式をラプラス変換すると

$$\mathcal{L}\left[y'' + \omega^2 y\right] = s^2 Y(s) - sy(0) - sy'(0) + \omega^2 Y(s) = \left(s^2 + \omega^2\right) Y(s) \ , \qquad \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \tag{13.20}$$

$$\therefore \quad \left(s^2 + \omega^2\right) Y(s) = \frac{1}{s} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)} \ . \tag{13.21}$$

  この $Y(s)$ を逆ラプラス変換するために、$\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s^2+\omega^2}$ を用いて部分分数分解する。

$$Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2\, s + C_3}{s^2+\omega^2} = \frac{\left(C_1 + C_2\right) s^2 + C_3\, s + \omega^2 C_1}{s\left(s^2+\omega^2\right)} \tag{13.22}$$

  $\frac{1}{s^2+\omega^2}$ 項の分母が s の 2 次式なので、分子として s の 1 次式 $C_2\, s + C_3$ を使っていることに注意。元の式と分子を比較して $C_{1,2,3}$ を決定すると

$$C_1 + C_2 = 0, \;\; C_3 = 0, \;\; \omega^2 C_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{1}{\omega^2}, \;\; C_2 = -\frac{1}{\omega^2}, \;\; C_3 = 0 \tag{13.23}$$

$$Y(s) = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2} \ . \tag{13.24}$$

  逆ラプラス変換を行って $y(t)$ を求めると

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \frac{1}{\omega^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{\omega^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\cos\left(\omega t\right) \ . \tag{13.25}$$

13.1.3 第 1 移動定理の応用

第 1 移動定理 $\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a)$ など、これまでに学んだ諸定理と組み合わせることが必要になる場合もある。

例）以下の初期値問題を解いてみよう。

$$y'' + 2y' + 2y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0 \ . \tag{13.26}$$

これまでと同様の方法で $Y(s)$ を求めると

$$\left(s^2 + 2s + 2\right) Y(s) = \frac{1}{s} \qquad \therefore \;\; Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2+2s+2\right)} \ . \tag{13.27}$$

s^2+2s+2 は実数の範囲では因数分解できない。ひとまず、$\frac{1}{s}$ と $\frac{1}{s^2+s+2}$ を使って部分分数分解しておく。

$$\frac{1}{s\left(s^2+2s+2\right)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2\, s + C_3}{s^2+2s+2} = \frac{\left(C_1+C_2\right) s^2 + \left(2C_1 + C_3\right) s + 2C_1}{s\left(s^2+2s+2\right)} \tag{13.28}$$

$$\therefore \quad C_1 + C_2 = 0, \;\; 2C_1 + C_3 = 0, \;\; 2C_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2}, \;\; C_2 = -\frac{1}{2}, \;\; C_3 = -1 \tag{13.29}$$

$$\therefore \quad Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{-\frac{1}{2}\, s - 1}{s^2+2s+2} \ . \tag{13.30}$$

[5]別の方法として、$s^2+a = (s+i\sqrt{a})(s-i\sqrt{a})$ と因数分解し、$\frac{1}{s+i\sqrt{a}}$, $\frac{1}{s-i\sqrt{a}}$ を用いて部分分数分解してから逆ラプラス変換することも可能である。ただし、$\sin, \cos$ の逆ラプラス変換の式を使う都合上、本文のように計算したほうが若干容易である。

ここで、$Y(s)$ の右辺第二項の分母を平方完成すると、$\frac{1}{s^2+1}$ について $s \to s+1$ と置き換えたような式が得られる。ついでなので、分子の方も $s+1$ をくくりだして書いておく。

$$\frac{-\frac{1}{2}s-1}{s^2+2s+2} = \frac{-\frac{1}{2}s-1}{(s+1)^2+1} = \frac{-\frac{1}{2}(s+1)-\frac{1}{2}}{(s+1)^2+1} \tag{13.31}$$

この項に**第一移動定理** $\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right] = F(s-a)$ を適用すると、それぞれ $\sin(t), \cos(t)$ を使ったラプラス変換で書き直せる。

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1} \ \to\ \mathcal{L}[e^{-t}\sin t] = \frac{1}{(s+1)^2+1}\ , \quad \mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2+1} \ \to\ \mathcal{L}[e^{-t}\cos t] = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \tag{13.32}$$

これを用いて $Y(s)$ の逆ラプラス変換を求めると

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t\ . \end{aligned} \tag{13.33}$$

13.2 δ 関数とラプラス変換

初期値問題 (13.1) の右辺に出てくる $r(t)$ は、微分方程式が表す系への**入力** (点粒子に加えられる力、回路に印加される電圧など) に相当する。その一例として、点粒子をハンマーで叩いた時のように一瞬だけ激力が加えられるような状況が考えられる。その場合の入力 $r(t)$ として活用できる**ディラックの δ 関数**を導入しておく。

ディラックの δ 関数

δ 関数 $\delta(t-a)$ は、$t=a$ 以外の t に対してはゼロで、$t=a$ を含む区間で積分するとちょうど 1 になる関数である。

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & (t=a) \\ 0 & (t \neq a) \end{cases}\ , \qquad \int_0^\infty \delta(t-a)dt = 1\ . \tag{13.34}$$

δ 関数 $\delta(t-a)$ は $t=a$ で発散するため、通常の有現値をとる関数とは別種のものである。例えば、有限幅の区間 $t \in [a, a+k]$ で高さ $1/k$ を取る関数 $\delta_k(t-a)$ を

$$\delta_k(t-a) = \begin{cases} 1/k & (t \in [a, a+k]) \\ 0 & (t:\text{それ以外}) \end{cases} \tag{13.35}$$

と定義すると、式 (13.34) の δ 関数は $\delta_k(t-a)$ の $k \to 0$ 極限として得られる:

$$\lim_{k\to 0}\delta_k(t-a) = \delta(t-a)\ . \tag{13.36}$$

δ 関数の定義式 (13.34) を用いれば、そのラプラス変換を導出するのは容易である。$\delta(t-a)$ $(a>0)$ のラプラス変換を求めてみると、$\delta(t-a)$ は $t=a$ だけで非ゼロとなり、その積分値が 1 となることから、

$$\mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right] = \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}dt = \left. e^{-st}\right|_{t=a} = e^{-as}\ . \tag{13.37}$$

この結果について、$a \to 0$ 極限を取ると

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = \lim_{a\to 0} e^{-as} = e^0 = 1\ . \tag{13.38}$$

微妙な点も本当はあるのだが、この授業では $\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1$ と定義して活用することにする。$r(t) = \delta(t)$ となる場合は、初期時刻 $t=0$ に力積が $\int \delta(t)dt = 1$ になるような激力が加えられた場合に相当する。

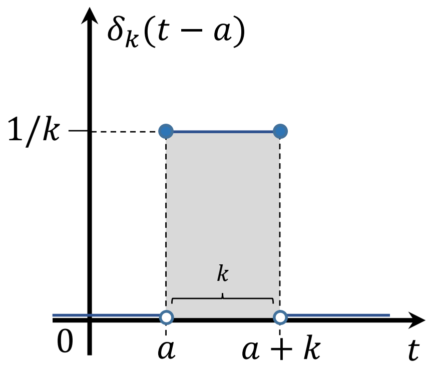

図 7: ディラックの δ 関数 $\delta(t-a)$ は、$\delta_k(t-a)$ について $k \to 0$ 極限を取ったもので得られる。図中の灰色部分の面積を 1 に保ったまま、幅 k をゼロに、高さ $1/k$ を無限大にする極限となっている。