

第10回 ラプラス変換の基礎

[教科書 (フーリエ解析と偏微分方程式) 1.1, 1.2]

今回の内容：

- ラプラス変換とはなにか
- ラプラス変換の基礎
 - － ラプラス変換の定義と逆変換
 - － ラプラス変換の諸性質

今回の講義以降、未知関数 y は t の関数 ($y = y(t)$) であるとする。時刻 t の関数 $y(t)$ についての時間発展を調べるようなことをだいたい想定している。微分記号 $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ も使う。

10.1 ラプラス変換

この講義において、ラプラス変換とは常微分方程式 (特に定数係数の初期値問題) を機械的に解くための道具である。

これまでの講義で常微分方程式の解法をいくつも勉強してきたわけだが、それに重ねて新たな解き方をなぜさらに学ぶのか、と思われる向きもあるかもしれない。説明は様々にできようが、ひとまずこの方法を使って常微分方程式を一つ解いてみよう。

例) 次の初期値問題を解く。

$$y'' + \omega^2 y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (10.1)$$

まずは、ラプラス変換を定義しよう。

ラプラス変換の定義

関数 $f(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ (ただし $s \geq 0$) は

$$\mathcal{L}[f] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (10.2)$$

関数 $f(t)$ に e^{-st} をかけてから、 t について原点から ∞ まで積分したものがラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ である。結果として得られる $F(s)$ は s の関数となる。

このラプラス変換は、微分を変数 s のかけ算に変換するという特徴がある。導出は後でやる。

$$\mathcal{L}[f'] = s \mathcal{L}[f] - f(0) \quad (10.3)$$

$$\mathcal{L}[f''] = s^2 \mathcal{L}[f] - f(0) - s f'(0) \quad (10.4)$$

かっこの中の $f(0), f'(0)$ は、今回の問題では初期条件のためすべてゼロになる。

以下、ラプラス変換を使って方程式 (10.1) を解いていく。図4を参照のこと。

1. 微分方程式をラプラス変換する

方程式 (10.1) 全体をラプラス変換すると以下のようなになる。なお、 $Y(s) \equiv \mathcal{L}[y]$ と表す。

$$\mathcal{L}[y'' + \omega^2 y] = \mathcal{L}[\sin t] \quad \Leftrightarrow \quad s^2 Y(s) + \omega^2 Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}. \quad (10.5)$$

ただし、 $\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}$ となることを使った。これも、導出は今後する。

2. 方程式を $Y(s)$ について解く

式 (10.5) は、 $Y(s)$ について直ちに解ける。

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{\omega^2-1} \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+\omega^2} \right). \quad (10.6)$$

後の計算の都合上、少しだけ部分分数分解して式を整理した。

3. $Y(s)$ にラプラス逆変換をかけて解 $y(t)$ を得る

最後に、式 (10.6) の $Y(s)$ から方程式 (10.1) の解 $y(t)$ を得る必要がある。このためには、ラプラス変換の逆変換であるラプラス逆変換を用いる。

ラプラス逆変換の定義

関数 $F(s)$ のラプラス逆変換 $\mathcal{L}^{-1}[F] = f(t)$ は

$$\mathcal{L}[f] = F(s) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}[F] = f(t) \quad (10.7)$$

ラプラス変換した時にちょうど $F(s)$ になるような関数 $f(s)$ がラプラス逆変換 $\mathcal{L}^{-1}[F]$ の結果である。

ラプラス逆変換の詳しい性質は後ほど述べることにして、ひとまず使ってみる。式 (10.6) に関連して、実は次の式が成立する：

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \sin \omega t. \quad (10.8)$$

これを使って式 (10.6) のラプラス逆変換を計算すると

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\omega^2 - 1} \left(\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\omega^2 - 1} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] - \frac{1}{\omega} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] \right) \\ &= \frac{1}{\omega^2 - 1} \left(\sin t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right). \end{aligned} \quad (10.9)$$

これが初期値問題 (10.1) の解となる。

比較のため、同じ問題 (10.1) をこれまでに学んできた方法で解いてみよう。

1. 非斉次方程式の特解を求める

$$y'' + \omega^2 y = \sin t \quad \Rightarrow \quad \dots \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{\omega(\omega^2 - 1)} \sin \omega t \quad (10.10)$$

2. 斉次方程式の一般解を求める

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dots \quad \Rightarrow \quad y(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t \quad (C_1, C_2 : \text{定数}) \quad (10.11)$$

これに非斉次方程式の特解を加えることで、非斉次方程式の一般解が得られる：

$$y(t) = -\frac{1}{\omega(\omega^2 - 1)} \sin \omega t + C_1 \sin t + C_2 \cos t \quad (10.12)$$

3. 非斉次方程式の一般解に、初期条件を課す

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dots \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{\omega(\omega^2 - 1)} \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2 - 1} \sin t. \quad (10.13)$$

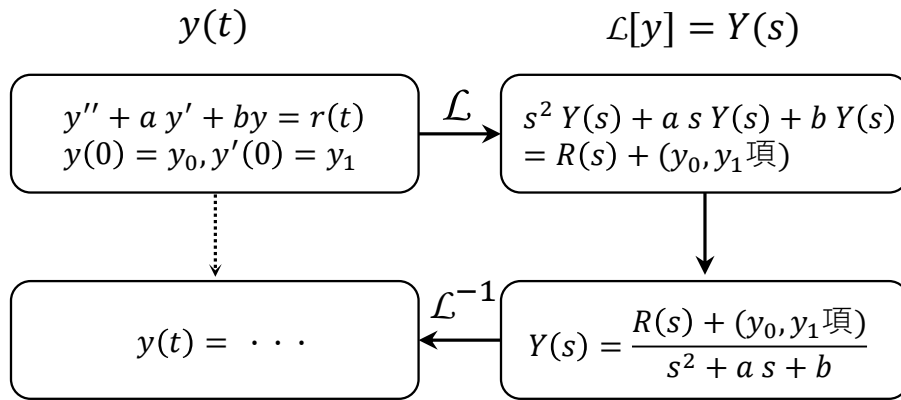


図 4: ラプラス変換による初期値問題の解法の手順。左側がラプラス変換前の関数 $y(t)$, 右側がラプラス変換後の関数 $\mathcal{L}[y] = Y(s)$ に関する式。以前の方法では、左上から左下を直接求めていた。

どちらの解法を簡単を感じるかは意見の分かれるところかもしれないが、ひとまずラプラス変換を用いた解法の特徴をまとめると以下になるだろう。

ラプラス変換による解法の特徴

- 関数の微分が s の掛け算に置き換わる。[式 (10.5)]
- 微分方程式を直接解く代わりに、代数演算 (足し算・掛け算) だけで式が解ける。[式 (10.6)]
- 以前の解法で必須だった特解・一般解の導出、初期条件を使った任意定数の決定が不要。
- 特に、非斉次項 $r(t)$ が複雑な場合でも、それに対応する特解を求める必要がない。
ただし、 $r(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[r]$ は求める必要がある。

非斉次項 $r(t)$ は、系に加えられる外力や回路にかけられる電圧などといった入力に相当する。一方、微分方程式の解 $y(t)$ は、運動する物体の位置や回路に流れる電流などといった出力に相当する。上記の性質により、複雑な入力 $r(t)$ に対する出力 $y(t)$ を効率よく求められるのがラプラス変換による解法の長所と言えるかもしれない。

逆に、ラプラス変換による解法の欠点としては以下が挙げられよう。

- 定数係数の線形微分方程式は効率よく解けるようになるが、それ以外 (係数が変化する場合、非線形、...) の場合はあまり効力を発揮しない。
- 計算の最初にラプラス変換を、計算の最後に逆ラプラス変換を行う必要があるが、これは個別に計算して求める必要がある。特に、複雑な関数の (逆) ラプラス変換はうまく求まらない場合もある。

ただし、簡単な関数の (逆) ラプラス変換の一覧表を事前に作っておけば計算の労力をいくらか減らせる。応用上は、そのような一覧表と、ラプラス変換にまつわる種々の公式を駆使して計算を進めることになる。

10.2 ラプラス変換の例

ラプラス変換の定義は式 (10.2) に与えた通りである。これを使って、いくつか例を計算してみよう。

- 定数： $f(t) = C$ (定数) のラプラス変換は

$$\mathcal{L}[C] = \int_0^{\infty} C e^{-st} dt = \frac{C}{-s} [e^{-st}]_0^{\infty} = -\frac{C}{s} \left[\left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} \right) - 1 \right] = -\frac{C}{s} [0 - 1] = \frac{C}{s}. \quad (10.14)$$

特に、1 のラプラス変換は $\mathcal{L}[1] = 1/s$ となる。

- 指数関数： $f(t) = e^{\alpha t}$ (α : 定数) のラプラス変換 $\mathcal{L}[e^{\alpha t}]$ は

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-s)t} dt = \left[\frac{1}{\alpha-s} e^{(\alpha-s)t} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{\alpha-s} \left[\left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha-s)t} \right) - 1 \right]. \quad (10.15)$$

このとき、 $\alpha - s < 0$ であれば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha-s)t} = 0$ となることから

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{\alpha-s} [0 - 1] = \frac{1}{s-\alpha}. \quad (10.16)$$

一方、 $\alpha - s > 0$ のときには $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha-s)t} = \infty$ となり、 $\mathcal{L}[e^{\alpha t}]$ も発散してしまっていて定まらない。

- べき関数： $f(t) = t$ のラプラス変換は部分積分で計算できる。 e^{-st} を先に積分する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t] &= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \left[t \times \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) dt \\ &= 0 - \frac{1}{s^2} [e^{-st}]_{t=0}^{t=\infty} = -\frac{1}{s^2} [0 - 1] = \frac{1}{s^2}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

ただし、 $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-st} = 0$ となることを用いた。

$\mathcal{L}[t^2]$ を求めるには、上記のような部分積分を 2 回行えばよい。

$$\mathcal{L}[t^2] = \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [t^2 e^{-st}]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} 2t e^{-st} dt \quad \left[= 0 + \frac{2}{s} \mathcal{L}[t] \right] \quad (10.18)$$

$$\begin{aligned} &= 0 + \frac{2}{s} \left(-\frac{1}{s} [t e^{-st}]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{2}{s} \left(0 - \frac{1}{s^2} [e^{-st}]_0^{\infty} \right) = \frac{2}{s^3}. \end{aligned} \quad (10.19)$$

もちろん、1 行目の式 (10.18) の段階で先ほどの結果 $\mathcal{L}[t] = 1/s^2$ を代入しても同じ結果が得られる。

一般に、 $\mathcal{L}[t^n] = n!/s^{n+1}$ (n : 正の整数) が示せる。導出は別件と併せて次回以降に行う。

10.3 ラプラス変換の性質

- ラプラス変換の線形性： ラプラス変換の定義より、以下が従う。

- (関数の和のラプラス変換) = (ラプラス変換の和)
- (関数の定数倍のラプラス変換) = (ラプラス変換の定数倍)

$$\left[\begin{array}{l} 2 \text{ つの関数 } f(t), g(t) \text{ の線形結合 } C_1 f(t) + C_2 g(t) \text{ (} C_1, C_2 \text{: 定数) をラプラス変換すると} \\ \mathcal{L}[C_1 f + C_2 g] = \int_0^{\infty} (C_1 f(t) + C_2 g(t)) e^{-st} dt = C_1 \int_0^{\infty} f(t) dt + C_2 \int_0^{\infty} g(t) dt \\ \quad = C_1 \mathcal{L}[f] + C_2 \mathcal{L}[g] \quad (10.20) \\ \text{と、} \mathcal{L}[f], \mathcal{L}[g] \text{ の線形結合に分解できる。係数 } C_1, C_2 \text{ もラプラス変換の外に出してよい。} \end{array} \right]$$

その他の性質については次回以降解説する。