

$GSp(2)$ の CAP 保型形式の局所構造について

今野 拓也 (TAKUYA KONNO)

CONTENTS

1. はじめに	1
2. 保型表現	2
3. カスプ表現	3
4. Langlands 予想と Ramanujan 予想	4
5. 連結簡約群への一般化、endoscopy	7
5.1. 局所理論 — endoscopic lifting	8
5.2. 大域理論 — 重複度公式	11
6. CAP 保型表現	11
7. Arthur パラメタ	12
8. 局所理論 — Arthur パッケージ	13
8.1. Shahidi-Sally-Tadić の結果の帰結	13
8.2. テータリフトによるパッケージの候補の構成	16
9. 大域理論 — 一般化された重複度公式	17
References	19

1. はじめに

CAP 保型形式とは Eisenstein 級数やその留数として得られる離散スペクトルと局所成分を共有するカスプ形式の総称である。これらはいわゆる Ramanujan 予想の反例になっており、保型形式と Galois 表現との対応を期待する Langlands の予想には組み込まれていない。これらを Langlands 予想の枠組みで説明するために J. Arthur は一連の予想を提出した。このノートでは $GSp(2)$ の上の保型形式に対して、CAP 保型形式がどのようにこの予想に当てはまっているかを検証する。

§2, §3 では、保型形式からアデル群の保型表現への移行と、それによってカスプ形式がどのような表現へ移るかを手短かに解説した。保型表現になじみのない方にも以後の議論のイメージを持っていただくためである。§4 では保型形式の現代的理論を考える際に基本的な指導原理となる Langlands の予想を述べ、そこから Ramanujan 予想が導かれることにふれた。Langlands 予想を記述する際に、Artin L -因子の定義は詳しく述べたが、Rankin 積の保型 L -因子の定義は技術的すぎるので割愛した。§5 では $GL(n)$ 上の保型形式に対する Langlands 予想の一般の簡約群への自然な拡張という立場から、endoscopy を使った緩増加保型表現の重複度に関する予想を解説した。§6 は少し技術的な第二の導入である。時間のない読者は §6 から読み始め、それ以前の部分は必要に応じて参照してい

ただきたい。§7 以降は $GSp(2)$ の場合の例を中心に Arthur 予想を解説している。CAP 保型形式に対応するはずの Arthur パラメタは §7 で分類してある。Shahidi の理論とそれに基づく Sally-Tadić の計算によって p -進体上の $GSp(2)$ のスーパーカスピダルでない既約表現とその Langlands パラメタは完全に分類できる。それらのうち我々に必要なものを 8.1 にまとめておいた。しかしいくつかの Arthur パッケージ (L -パッケージも) はスーパーカスピダル表現とそうでない既約表現を同時に含むため、上で分類した既約表現だけでは Arthur パッケージを尽くさない。そこでパッケージに含まれるであろうスーパーカスピダル表現の候補を Weil 表現を使って構成した (8.2)。9 では以上で得られた局所 Arthur パッケージから大域的なパッケージを構成し、その各元に対する重複度公式を Arthur の予想から引き出した。こうして得られた重複度は、Soudry, Piatetskii-Shapiro それに Waldspurger によってテータ対応を使って得られた重複度の結果と整合している。またその記号で $\phi_{2,\pi}$ で π が $\pi(\theta)$ の形でない場合は、Soudry の CAP 表現の分類に含まれていない。これはそのような表現が大域的なテータ対応で作れないからである。これらが保型形式に実際になっているかどうかは将来の研究を待たねばならない。

また、今回はアルキメデス素点での状況にはふれていない。これは一つには [A2] で齋藤-黒川リフトのアルキメデス素点での構造が記述されているためである。しかしそれ以外の場合については文献もないので近い将来調べてみたいと思っている。

2. 保型表現

古典的な保型形式は上半平面上の正則関数 $f : \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$ であって、 $SL(2, \mathbb{R})$ のある第 1 種 Fuchs 離散部分群 Γ に対して保型性

$$f(\gamma z) = j(\gamma, z)^k f(z), \quad \forall \gamma \in \Gamma, z \in \mathfrak{H}$$

を満たすものであった。ただし、 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ に対して $j(g, z) = cz + d$ である。解析同相 $SL(2, \mathbb{R})/SO(2) \ni g \xrightarrow{\sim} g(\sqrt{-1}) \in \mathfrak{H}$ を使って、 f を $SL(2, \mathbb{R})$ 上の関数 ϕ に

$$\phi(g) := f(g(\sqrt{-1}))j(g, \sqrt{-1})^{-k}, \quad g \in SL(2, \mathbb{R})$$

と持ち上げる。すると、 f の正則性は ϕ が滑らかかつ緩増加でラプラス作用素の離散スペクトル $-(k/2 - 1)k/2$ に対応する固有関数であることに対応し、保型性は ϕ が左 Γ -不変で $\phi(g \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}) = e^{\sqrt{-1}k\theta} \phi(g)$ を満たすことに対応している。 $SO(2)$ は $SL(2, \mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群であり、ラプラス作用素は $SL(2, \mathbb{R})$ の Lie 環の複素展開環の中心 $Z(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ の生成元である。そこで $SL(2, \mathbb{R})$ 上の左 Γ -不変な緩増加 C^∞ -級関数で、その極大コンパクト部分群 $SO(2)$ による右シフトと $Z(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ -シフトがともに有限次元空間に収まっているようなものを $SL(2, \mathbb{R})$ **上の保型形式** と呼ぶことにする [Ge]。

話を一般化して G を代数体 F 上定義された連結簡約群とする。 F のアデル環を $\mathbb{A}$ と書くとき、アデル群 $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式を上類似として定義することができる。 F の無限素点の集合を S_∞ と書けば、 $G(F_\infty) = \prod_{v \in S_\infty} G(F_v)$ は実 Lie 群であり、その Lie 環 $\mathfrak{g}(F_\infty)$ の複素化 $\mathfrak{g}_\infty = \mathfrak{g}(F_\infty) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の展開環 $U(\mathfrak{g}_\infty)$ やその中心 $Z(\mathfrak{g}_\infty)$ が考えられる。また有限素点 v での F_v の整数環を $\mathcal{O}_v$ と書けば、ほとんど全ての v では $G(\mathcal{O}_v)$ になっているような $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群 $\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{K}_v$ が取れる。このとき $G(\mathbb{A})$ 上の関数 ϕ が **保型形式** とは

- ϕ は滑らかで緩増加。
- $\phi(\gamma g) = \phi(g), \forall \gamma \in G(F), \forall g \in G(\mathbb{A})$.
- $\{g \mapsto \phi(gk) \mid k \in \mathbf{K}\}$ の張るベクトル空間は有限次元。
- $\{g \mapsto R(X)\phi(g) \mid X \in Z(\mathfrak{g}_\infty)\}$ は有限次元。

を満たすこととする [MW]。こうして定義された保型形式の空間 $\mathcal{A}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ は $G(\mathbb{A})$ の右移動作用

$$R(g) : [x \mapsto \phi(x)] \longmapsto [x \mapsto \phi(xg)]$$

では保たれない。しかしこれの微分で定まる $U(\mathfrak{g}_\infty)$ の作用を考えると $(U(\mathfrak{g}_\infty) \times_{U(\mathfrak{k}_\infty)} \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_f)$ の右移動作用では閉じていることがわかる。但し $\mathbf{K}_\infty = \prod_{v \in S_\infty} \mathbf{K}_v$ であり、 $\mathbb{A}_f$ は無限成分が 0 である元からなる $\mathbb{A}$ の部分環 (有限アデール環) を表す。表現論の言葉で言えば $\mathcal{A}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ は $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_f)$ -加群になっているわけである。

実簡約 Lie 群 $\mathbf{G}$ の長さ有限なユニタリ表現の圏と、長さ有限で不変エルミート内積を持つ $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の圏の同値性は、ユニタリ表現論に代数的な手法を持ち込む転機となった。逆に Maaß, Selberg そして Langlands は保型形式の空間 $\mathcal{A}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ の研究にヒルベルト空間

$$L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})) := \left\{ \begin{array}{l} \phi : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{可測関数} \end{array} \left| \begin{array}{l} \bullet \phi(\gamma a g) = \phi(g), \gamma \in G(F), a \in \mathfrak{A}_G \\ \bullet \int_{G(F) \backslash G(\mathbb{A})} |\phi(g)|^2 dg < +\infty \end{array} \right. \right\}$$

のスペクトル理論を導入した。ここで $\mathfrak{A}_G$ は $G(F_\infty)$ の中心 $Z_G(F_\infty)$ の $\mathbb{R}$ -動径成分 ($\mathbb{R}_+^\times$ の直和に同型な最大の部分群) である。通常は $\mathcal{A}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ の既約 $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_f)$ -部分加群のことを **既約保型表現** というのだが、ここでは $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ の上の $G(\mathbb{A})$ の右正則表現 $R = R_G$ の既約 **部分表現** のことを既約 L^2 -**保型表現** と呼ぶ。以降 $G(\mathbb{A})$ の $\mathfrak{A}_G$ 上自明な既約ユニタリ表現の同値類の集合を $\Pi_{\text{unit}}(G(\mathbb{A})^1)$ と書き、そのうち L^2 -保型表現として現れるもののなす部分集合を $\Pi_{\text{disc}}(G)$ と書く。また L^2 -保型表現の直和からなる $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ の閉部分空間を $L^2_{\text{disc}}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ と書く。一般にこれは $L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ の真部分空間であることが知られている。各 $\pi \in \Pi_{\text{disc}}(G)$ の $L^2_{\text{disc}}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ での重複度 $m(\pi)$ は有限であることも知られている:

$$L^2_{\text{disc}}(G(F) \backslash G(\mathbb{A})) \simeq \bigoplus_{\pi \in \Pi_{\text{disc}}(G)} \pi^{\oplus m(\pi)}.$$

3. カスプ表現

カスプ形式の定義を思い出そう。 $SL(2, \mathbb{R})$ の上三角行列からなる放物型部分群を B と書き、そのべき単根基を $U = \{(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) \mid b \in \mathbb{R}\}$ と書く。 $SL(2, \mathbb{R})$ の第 1 種 Fuchs 離散部分群 Γ に対して $m \in \mathbb{R}$ があって

$$\Gamma \cap U = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & mn \\ 0 & 1 \end{array} \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

である。 $U \ni (\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$ は $\mathfrak{h}$ に $x + iy \mapsto (x + b) + iy$ と作用するから、 Γ に関する重さ k の保型形式 f は変数の実部に関して周期 m の周期関数である。特に $\sqrt{-1}\infty$ が $\Gamma \backslash \mathfrak{h}$ のカ

スプであるとき、 f はそこでの Fourier 展開 $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(f) e^{2\pi\sqrt{-1}nz/m}$ を持ち、この展開における定数項 $a_0(f)$ は

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \int_{\Gamma \cap U \setminus U} f(uz) du &= \frac{1}{m} \int_{m\mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}} \sum_{n \geq 0} a_n(f) e^{2\pi\sqrt{-1}n(z+x)/m} dx \\ &= \frac{1}{m} \sum_{n \geq 0} a_n(f) \int_{m\mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}} e^{2\pi\sqrt{-1}n(\text{Im}(z)+x)/m} dx \\ &= a_0(f) \end{aligned}$$

と計算される。 f がカスプ形式とは $\Gamma \backslash \mathfrak{H}$ の各カスプでの Fourier 展開の定数項、すなわち上のような積分が消えていることであった。

この定義はそのまま $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式に拡張される。すなわち、 $\phi \in \mathcal{A}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ が **カスプ形式** とは、 G の任意の F 上定義された放物型真部分群 $P = MU \subsetneq G$ (M は Levi 成分、 U はべき単根基を表している) に沿っての **定数項**

$$\phi_P(g) := \int_{U(F) \backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug) du$$

が恒等的に 0 であることとする。同様に L^2 -**カスプ形式** の空間 $L_0^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ を

$$\left\{ \phi \in L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A})) \mid \begin{array}{l} \text{任意の } F\text{-放物型真部分群 } P = MU \text{ に} \\ \text{対して } \phi_P \text{ はほとんど至るところ } 0 \end{array} \right\}$$

と定義する。 $L_0^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ は $L_{\text{disc}}^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ に含まれることが知られている。 $\Pi_{\text{disc}}(G)$ の元で $L_0^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ に現れるものの集合を $\Pi_0(G)$ と書く。

4. LANGLANDS 予想と RAMANUJAN 予想

まず Langlands 予想を思い出しておく。詳しい定式化は [L] や [Cl] にあるから、以下では我々の議論に必要なことを引用するにとどめる。予想のもっとも大きなポイントは保型表現たちのなす圏が“良い”ガロワ表現のなす圏に同値であるという要請である。これにより特に保型表現の圏はテンソル積を持ついわゆる“淡中圏”にならねばならない。ところが [SR] によれば淡中圏はなにかある簡約群の表現の圏として実現される。この存在が期待される群を F の **Langlands 群** と呼ぶ。Langlands 群はガロワ群 $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ や Weil 群 $W_F = W(\overline{F}/F)$ を小さな商とする巨大な群で、その存在は Langlands 予想そのものに同値である。しかし、淡中圏の組み入った公理系を使うよりはこのような群の存在を仮定した方が種々の予想を述べやすいため、あえてこれを導入する。以下では pro-algebraic group としての Langlands 群の代わりに、Kottwitz による局所コンパクト群 $\mathcal{L}_F$ としての定式化を引用する。 $\mathcal{L}_F$ は W_F のコンパクト群によるエクステンションであると考えられている。

F の各素点 v での完備化を F_v と書く。局所 Langlands 群 $\mathcal{L}_{F_v}$ を

$$\mathcal{L}_{F_v} := \begin{cases} W_{F_v} & v \text{ がアルキメデス的なとき} \\ W_{F_v} \times SU(2) & v \text{ が非アルキメデス的なとき} \end{cases}$$

と定義する。ここで W_{F_v} は F_v の絶対 Weil 群である。 $\mathcal{L}_{F_v}$ から $\mathcal{L}_F$ へは内部自己同型を除いて標準的な準同型 $\iota_v : \mathcal{L}_{F_v} \rightarrow \mathcal{L}_F$ があると期待されている。 $\mathcal{L}_{F_v}$ の $\mathbb{C}$ -ベクトル空間 V 上の表現 ρ_v に対して L -因子と ε -因子が次のように定義される。

v が非アルキメデスのときには $\rho_v|_{SU(2)}$ は $SL(2, \mathbb{C})$ の有理表現 (やはり ρ_v と書く) の $SU(2)$ への制限になっている。そこで $N = N(\rho_v) := \rho_v\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \in \mathfrak{gl}(V)$ とおく。 F_v の剰余体を $\mathbb{F}_{q_v}$ と書き、完全系列

$$1 \longrightarrow I_v \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_{q_v}}/\mathbb{F}_{q_v}) \longrightarrow 1$$

を思い出す。 I_v は F_v の惰性群であり、 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_{q_v}}/\mathbb{F}_{q_v})$ は $\mathbb{Z}$ の副有限完備化 $\widehat{\mathbb{Z}}$ に同型で幾何的フロベニウス $\Phi_{q_v} : x \rightarrow x^{1/q_v}$ を位相的生成元を持つ。 W_{F_v} は可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & I_v & \longrightarrow & W_{F_v} & \longrightarrow & \Phi_{q_v}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \text{埋め込み} & & \downarrow \text{埋め込み} \\ 1 & \longrightarrow & I_v & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_{q_v}}/\mathbb{F}_{q_v}) \longrightarrow 1 \end{array}$$

を満たす。 W_{F_v} の元 Φ_v で Φ_{q_v} に落ちるようなものを一つ固定しておく。以上の下で

$$\begin{aligned} L(s, \rho_v) &:= \det(1 - \rho_v(\Phi_v \times \begin{pmatrix} q_v^{-1/2} & 0 \\ 0 & q_v^{1/2} \end{pmatrix})) |(\ker N)^{I_v}|^{-1}, \\ \varepsilon(s, \rho_v, \psi_v) &:= \varepsilon(V, \psi_v, dx_{\psi_v}) \det(-\rho_v(\Phi_v \times \begin{pmatrix} q_v^{-1/2} & 0 \\ 0 & q_v^{1/2} \end{pmatrix})) |V^{I_v}/(\ker N)^{I_v}| \\ &\quad \times q_v^{-s(a(V) + \dim(V^{I_v}/(\ker N)^{I_v}))} \end{aligned}$$

と定義する。ここで ψ_v は F_v の非自明な指標であり、 $a(V)$ は $\rho_v|_{W_{F_v}}$ の Artin 導手 [D, 4.5] である。また $\varepsilon(V, \psi_v, dx_{\psi_v})$ は V 上の Weil 群の表現

$$\rho_{WD}(w)v := |w|_v^{1/2} \rho_v\left(w \times \begin{pmatrix} |w|_v^{1/2} & 0 \\ 0 & |w|_v^{-1/2} \end{pmatrix}\right)v, \quad w \in W_{F_v}, v \in V$$

と ψ_v 、それに ψ_v に関する F_v 上の自己双対測度 dx_{ψ_v} に対応する局所定数である。その存在と一意性は [D, Th.4.1] で証明されている。

v がアルキメデスの時には、 $L(s, \rho_v)$, $\varepsilon(s, \rho_v, \psi_v)$ は ρ_v の各既約成分に対する L および ε -因子の積に等しいので、 ρ_v が既約な時を考えれば十分である。 F_v の非自明指標 ψ_v としては $\psi_{\mathbb{R}}(x) := \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$, $\psi_{\mathbb{C}}(z) := \psi_{\mathbb{R}}(\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(z))$ を取るものとする。 $F_v = \mathbb{C}$ の時は $W_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^{\times}$ であるから、その既約表現は $\rho_v(z) = |z|_{\mathbb{C}}^t (z/\bar{z})^{n/2}$, ($t \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$) の形である。このとき、

$$L(s, \rho_v) := 2(2\pi)^{-(s+t+|n|/2)} \Gamma(s+t+|n|/2), \quad \varepsilon(s, \rho_v, \psi_{\mathbb{C}}) := \sqrt{-1}^{|n|}$$

と定義する。 $F_v = \mathbb{R}$ のとき、 $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^{\times} \amalg \tau\mathbb{C}^{\times}$, $\tau^2 = -1$, $\mathrm{Int}(\tau)(z) = \bar{z}$, ($z \in \mathbb{C}^{\times}$) であるから、その既約表現は次のどちらかの形である。

(1) $\dim V = 1$ のとき。

$$\rho_v(z) = |z|_{\mathbb{C}}^t, \quad z \in \mathbb{C}^{\times}, \quad \rho_v(\tau) = (-1)^{\epsilon}, \quad t \in \mathbb{C}, \epsilon \in \{0, 1\}$$

と書ける。このとき、

$$L(s, \rho_v) = \pi^{-(\epsilon+t+s)/2} \Gamma((\epsilon+t+s)/2), \quad \varepsilon(s, \rho_v, \psi_{\mathbb{R}}) := \sqrt{-1}^\epsilon$$

と定義する。

(2) $\dim V = 2$ の時。 $\rho_v = \text{Ind}_{W_{\mathbb{C}}}^{W_{\mathbb{R}}}(\theta)$, $\theta(z) = |z|_{\mathbb{C}}^t (z/\bar{z})^{n/2}$ と書ける。このとき、

$$L(s, \rho_v) := L_{\mathbb{C}}(s, \theta), \quad \varepsilon(s, \rho_v, \psi_{\mathbb{R}}) := \sqrt{-1} \varepsilon_{\mathbb{C}}(s, \rho_v, \psi_{\mathbb{C}})$$

と定める。

一方で $GL(n, F_v)$ と $GL(m, F_v)$ の既約で滑らかな表現 (v がアルキメデス的の時は既約 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群) π_v と τ_v に対して、**Rankin 積** の L 及び ε -因子 $L(s, \pi_v \times \tau_v)$, $\varepsilon(s, \pi_v \times \tau_v, \psi_v)$ が定義されている [JPS]。これらの準備の下で Langlands 予想は次のように述べるができる。

予想 4.1 (Langlands 対応). $\mathcal{L}_F$ の n 次元表現の同型類の集合 $\Phi(GL(n)_F)$ と $GL(n, \mathbb{A})$ の既約保型表現の集合 $\Pi(GL(n))$ の間には一対一対応 $\rho \leftrightarrow \pi$ がある。特に、 $\Phi(GL(n)_F)$ 内の既約表現の同型類たちのなす部分集合 $\Phi_0(GL(n)_F)$ は $GL(n, \mathbb{A})$ のカスプ表現のなす部分集合 $\Pi_0(GL(n))$ に対応し、そこでの対応は L 及び ε -関数の等式

$$L(s, \rho \otimes \sigma) = L(s, \pi \times \tau), \quad \varepsilon(s, \rho \otimes \sigma) = \varepsilon(s, \pi \times \tau),$$

$$\Phi_0(GL(m)_F) \ni \forall \sigma \leftrightarrow \tau \in \Pi_0(GL(m)), \quad 1 \leq \forall m < n$$

で特徴づけられる。但し、 $\psi = \bigotimes_v \psi_v$ を F 上自明な $\mathbb{A}$ の非自明指標とし $\pi = \bigotimes_v \pi_v$, $\tau = \bigotimes_v \tau_v$ と分解しているとするとき、

$$L(s, \rho \otimes \sigma) := \prod_v L(s, \rho_v \otimes \sigma_v), \quad \varepsilon(s, \rho \otimes \sigma) := \prod_v \varepsilon(s, \rho_v \otimes \sigma_v, \psi_v),$$

$$L(s, \pi \times \tau) := \prod_v L(s, \pi_v \times \tau_v), \quad \varepsilon(s, \pi \times \tau) := \prod_v \varepsilon(s, \pi_v \times \tau_v, \psi_v)$$

とした。 $\rho_v := \rho \circ \iota_v$, $\sigma_v := \sigma \circ \iota_v$ である。大域的な ε -関数は ψ に依らない。

この予想には明らかな局所類似があり (局所 Langlands 予想)、こちらは昨年 Harris-Taylor によって (Wiles-Taylor 系を使って!) 解決された。最近 Henniart がその証明の一部を単純化した。

有名な Ramanujan の予想をこの予想から引き出すことができる。 $\pi \in \Pi_0(GL(n))$ は $GL(n, F_v)$ の既約で滑らかな表現 π_v たちの“制限テンソル積” $\pi = \bigotimes_v \pi_v$ の形をしている。 π はユニタリ表現であるから、各 π_v ももちろんユニタリ表現でなくてはならない。 $GL(n, F_v)$ の既約ユニタリ表現の分類を思い出そう。

$n = \sum_{i=1}^d m_i$ を n の分割とする。 $m_i = n_i b_i$ ($n_i, b_i \in \mathbb{N}$) と書く。 δ_i を $GL(n_i, F_v)$ の二乗可積分 (cf. 8.1) な既約表現とし、

$$P_i := \left\{ \left(\begin{array}{cccc} A_1 & * & \dots & * \\ \mathbf{0} & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & A_{b_i} \end{array} \right) \middle| A_i \in GL(n_i) \right\} \subset GL(m_i, F_v)$$

とおく。 $P_i(F_v)$ の既約表現 $\delta_i | \det |_{v^{\frac{b_i-1}{2}}} \otimes \delta_i | \det |_{v^{\frac{b_i-3}{2}}} \otimes \cdots \otimes \delta_i | \det |_{v^{\frac{1-b_i}{2}}}$ からの $GL(m_i, F_v)$ への (放物型) 誘導表現 $I(\delta_i; b_i)$ はただ一つのユニタリ既約商表現 (Speh 表現) $J(\delta_i, b_i)$ を持つ。更に

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & g_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & g_d \end{pmatrix} \middle| g_i \in GL(m_i) \right\} \subset GL(n, F_v)$$

の既約表現 $J(\delta_1; b_1) | \det |_F^{\nu_1} \otimes J(\delta_2; b_2) | \det |_F^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes J(\delta_d; b_d) | \det |_F^{\nu_d}$ から $GL(n, F_v)$ への誘導表現 $I(\{(\delta_i, b_i, \nu_i)\}_{i=1}^d)$ は $-1/2 < \nu_i < 1/2$ ならば既約ユニタリ表現である。 $GL(n, F_v)$ の任意の既約ユニタリ表現はこの形に並べ替えを除いてただ一通りに書ける、というのが $GL(n, F_v)$ の既約ユニタリ表現の分類であった [T], [V]。

予想 4.2 (一般化された Ramanujan 予想). $GL(n, \mathbb{A})$ の既約カスプ表現 π の局所成分 π_v は $I(\{(\delta_i, 1, 0)\}_{i=1}^d)$ の形である。

δ_i に局所 Langlands 対応で対応する $\mathcal{L}_{F_v}$ の n_i -次元表現を $\rho(\delta_i)$ と書けば、 $I(\{(\delta_i, b_i, \nu_i)\}_{i=1}^d)$ に対応する n -次元表現 $\rho(\pi_v)$ は

$$\bigoplus_{i=1}^d \bigoplus_{j=1}^{b_i} \rho(\delta_i) |_{v^{\nu_i + \frac{b_i+1}{2} - j}}$$

の形である。もし Ramanujan 予想が正しくなければ、この Galois 表現の絶対値の肩の指数に 0 でないものが現れる。Galois 表現の方でテンソル積を繰り返し取れば、この指数は整数倍になるため結果的にユニタリ表現の指数になり得ないほど大きくできる。おおざっぱだがこのような議論で Langlands 予想から Ramanujan 予想が従う。

5. 連結簡約群への一般化、ENDOSCOPY

Langlands の予想は一般の連結簡約群に対しても定式化できる。 G を F 上定義された連結簡約線型代数群とする。簡単のため以下では G が **準分裂 (quasi-split)**、すなわち F 上定義された Borel 部分群 $\mathbf{B}$ とその中の F -有理的な極大トーラス $\mathbf{T}$ 、それに $\mathbf{T}$ の $\mathbf{B}$ での単純ルートのルートベクトルの集合 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ で $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ の作用で安定なものの組 $\text{spl}_G = (\mathbf{B}, \mathbf{T}, \{X_\alpha\})$ (**F -分裂** と呼ばれる) があるとする。たとえば

$$G = Sp(2)_F := \left\{ g \in GL(4)_F \middle| g \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & I_2 \\ -I_2 & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix} {}^t g = \nu(g) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & I_2 \\ -I_2 & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix}, \exists \nu(g) \in \mathbb{G}_m \right\}$$

($I_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) なら、 $\mathbf{B}$ は上三角な元からなる部分群、 $\mathbf{T}$ は対角元からなる部分群である。 $\mathbf{T}$ の指標群 $X^*(\mathbf{T})$ の $\mathbb{Z}$ -基底 $\{e_1, e_2, c\}$ を

$$e_i(\text{diag}(t_1, t_2, ct_2^{-1}, ct_1^{-1})) = t_i, \quad (i = 1, 2), \quad c(\text{diag}(t_1, t_2, ct_2^{-1}, ct_1^{-1})) = c$$

と取れば、単純ルートの集合 Δ は $\{\alpha_1 := e_1 - e_2, \alpha_2 := 2e_2 - c\}$ である。そのルートベクトルとして

$$X_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

を取れば、 $\mathbf{spl}_G = (\mathbf{B}, \mathbf{T}, \{X_\alpha\})$ は F -分裂である。 G の内部自己同型の群 $\mathrm{Int}(G)$ は G の分裂全体の集合に単純かつ推移的に作用している。

$\mathbf{T}$ の指標群 $X^*(\mathbf{T})$ とその双対 $X_*(\mathbf{T})$ に単純ルート及び単純コルートの集合を付け加えた 4 つ組 $\Psi(G) = (X^*(\mathbf{T}), \Delta, X_*(\mathbf{T}), \Delta^\vee)$ を G のルートデータと呼ぶ。双対なルートデータ $\Psi(G)^\vee = (X_*(\mathbf{T}), \Delta^\vee, X^*(\mathbf{T}), \Delta)$ をルートデータに持つ $\mathbb{C}$ 上の連結簡約群 $\widehat{G}$ を G の Langlands 双対群という。 $\widehat{G}$ の分裂 $\mathbf{spl}_{\widehat{G}} = (\mathbf{B}, \mathbf{T}, \{\mathcal{X}_{\alpha^\vee}\})$ を固定すれば、それを保ち $\Psi(\widehat{G}) = \Psi(G)^\vee$ に G への $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ -作用から定まる $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ -作用を引き起こすような $\widehat{G}$ への $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ -作用 ρ_G が定まる。この作用と標準射 $W_F \rightarrow \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の合成による反直積 ${}^L G := \widehat{G} \rtimes_{\rho_G} W_F$ を G の L -群という。たとえば、 $G = \mathrm{GSp}(2)_F$ の場合には $\widehat{G} = \mathrm{GSp}(2, \mathbb{C})$ であり、 ${}^L G = \widehat{G} \times W_F$ (直積) となる。図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_F & \xrightarrow{\varphi} & {}^L G \\ \mathrm{pr}_{W_F} \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_{W_F} \\ W_F & \xlongequal{\quad} & W_F \end{array}$$

を可換にする連続準同型 $\varphi : \mathcal{L}_F \rightarrow {}^L G$ の $\widehat{G}$ -共役類のことを G の **Langlands パラメタ** といい、その集合を $\Phi(G_F)$ と書く。 $G = \mathrm{GL}(n)$ の場合には ${}^L G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times W_F$ であるから、 $\Phi(G_F)$ は $\mathcal{L}_F$ の n -次元連続表現の集合になっている。

$\mathrm{GL}(n)_F$ の場合には $\pi \in \Pi_0(\mathrm{GL}(n))$ は $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ に正確に一度ずつ現れる (重複度一定理) ため、Langlands 予想はガロワ表現と保型表現の対応を述べるにとどまっている。しかし重複度が 1 でない保型表現を持つ [Bl] 一般の G においては、 $\pi \in \Pi_{\mathrm{unit}}(G(\mathbb{A})^1)$ に対してその $L^2_{\mathrm{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ での重複度 (0 にもなり得る) を Langlands パラメタで記述する予想が必要である。更に、同一の直交群を持つが同型でない二次元二次形式付き空間に対応するテータ級数のように、同一の L -関数を持つ、いわゆる L -**不可分な** 保型形式の存在も説明せねばならない。Langlands はこれらの現象が、 $G(\mathbb{A})$ の表現論は $G(\mathbb{A})$ -共役類の上の類関数を扱うのに対して、Langlands パラメタは $G(\overline{F})$ -共役に関する量をコントロールするというずれから来していると考えた。そこでこのずれを計るために **endoscopy** の理論が導入された。その要点を思い出しておこう。

5.1. 局所理論 — endoscopic lifting. アイディアを述べるには非アルキメデス素点 v で話を進めれば十分である。簡単のために $\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ を Γ_v と書き、 G の導来群は単連結だとする。 $G(F_v)$ の正則半単純な元 γ, γ' を取り、 T を γ の中心化群である極大トーラスとする。 $g \in G(\overline{F}_v)$ があって $\gamma' = g^{-1}\gamma g$ だとすると、

$$\gamma = g\sigma(\gamma')g^{-1} = g\sigma(g^{-1})\gamma\sigma(g)g^{-1}, \quad \sigma \in \Gamma_v$$

から $\{g\sigma(g^{-1})\}_{\sigma \in \Gamma_v}$ は $T(\overline{F}_v)$ に値を持つ 1-コサイクルである [Se]。 γ と γ' が $G(F_v)$ -共役になるのは g の $T \backslash G$ での像が $(T \backslash G)(F_v)$ に入る、すなわち上の 1-コサイクルが自明なときである。これから γ の $G(\overline{F}_v)$ -共役類の中の $G(F_v)$ -共役類は

$$\mathfrak{D}^G(T/F_v) = \mathfrak{D}(T/F_v) := \ker[H^1(\Gamma_v, T) \rightarrow H^1(\Gamma_v, G)]$$

で分類される。Tate-中山双対性の Kottwitz による定式化 $H^1(\Gamma_v, G) \simeq \pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_v})^D$ ($Z(\widehat{G})$ は $\widehat{G}$ の中心である。また $()^D$ は Pontrjagin 双対を、 $\pi_0()$ は連結成分の集合を表す) [K] から、

$$\mathfrak{K}^G(T/F_v) = \mathfrak{K}(T/F_v) := \text{Coker}[\pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_v}) \rightarrow \pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_v})]$$

は $\mathfrak{D}(T/F_v)$ の Pontrjagin 双対である。正則半単純な $\gamma' \in G(F_v)$ と $f \in C_c^\infty(G(F_v))$ に対して、

$$O(\gamma', f) := \int_{T'(F_v) \backslash G(F_v)} f(g^{-1}\gamma'g) \frac{dg}{dt'}$$

として f の γ' での **軌道積分** を定める。 T' は γ' の中心化群である。更に、 $\kappa \in \mathfrak{K}(T/F_v)$ に対して γ での (T, κ) -**軌道積分** を

$$O^{(T, \kappa)}(\gamma, f) := \sum_{\delta \in \mathfrak{D}(T/F)} \kappa(\delta) O(\gamma^\delta, f)$$

と定める。但し、 γ^δ は $\delta \in \mathfrak{D}(T/F_v)$ に対応する γ の $G(\overline{F}_v)$ -共役類の中の $G(F_v)$ -共役類を表す。特に κ が自明なとき $O^{(T, 1)}$ を **安定軌道積分** という。軌道積分は、有限群における共役類の特性関数という類関数の空間の基底の、連続群における類似になっている。ここで逆公式

$$O(\gamma^\delta, f) = \frac{1}{|\mathfrak{K}(T/F_v)|} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(T/F_v)} \overline{\kappa(\delta)} O^{(T, \kappa)}(\gamma, f)$$

が成立するから、 (T, κ) -軌道積分たちを集めたものは “ $G(F_v)$ 上の類関数の空間の基底” をなしていると見てよい。

T の Langlands 双対群 $\widehat{T}$ は $\widehat{G}$ の部分群として実現されており、 $\kappa \in \mathfrak{K}(T/F_v) \subset \pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_v})$ を代表する $s \in \widehat{T}^{\Gamma_v}$ は $\widehat{G}$ の半単純元である。従って s の $\widehat{G}$ での連結中心化群 $\widehat{H}$ は連結簡約群になる (Steinberg の定理)。その分裂 $\text{spl}_{\widehat{H}}$ を一つ固定する。 $\rho_G(\Gamma_v)$ は $\widehat{H}$ を保っており、それを $\text{Int}(\widehat{H})$ でひねった Γ_v -作用 ρ_H で $\text{spl}_{\widehat{H}}$ を保つようなものがただ一つある。 ${}^L H := \widehat{H} \rtimes_{\rho_H} W_{F_v}$ とおき、これを L -群に持つ F 上の準分裂連結簡約群を H と書く。こうして得られる H を G の **endoscopic 群** と呼ぶ。 $Z(\widehat{H})^{\Gamma_v}$ の単位元の連結成分が $Z(\widehat{G})$ に含まれるとき、 H は **楕円的** であるという。 κ を固定しても s の取り方によって H は変わるが、その中の楕円的なものは κ から一意に定まる。以下では H は常に楕円的とする。さて、 $\widehat{T} \rtimes_{\rho_H} W_F$ を L -群とするような H の極大 F -トーラス T_H を取れば、 $\widehat{T} \simeq \widehat{T}_H$ を Weyl 群でひねったものに双対な F -同型 $T_H \xrightarrow{\sim} T$ が構成できる。これは一意ではないが $\overline{F}$ 上の共役類の間の射 $\mathcal{A}_{T_H/T} : T_H/\Omega^H \rightarrow T/\Omega$ (Ω^H, Ω はそれぞれ H 及び G の Weyl 群) は定義可能である。

予想 5.1 (Transfer 予想). $G(F_v)$ および $H(F_v)$ の正則半単純な元の集合 $H(F_v)_{\text{reg}} \times G(F_v)_{\text{reg}}$ 上の関数 $\Delta_{G/H}(\gamma_H, \gamma)$ で

- (1) $\Delta_{G/H}(\gamma_H, \gamma)$ は γ_H の $H(\overline{F}_v)$ -共役類及び、 γ の $G(F_v)$ -共役類のみに依存する。
 (2)

$$\Delta_{G/H}(\gamma_H, \gamma) = \begin{cases} \kappa(\delta) \Delta_{G/H}(\gamma_H, \mathcal{A}_{T_H/T}(\gamma_H)) & \gamma = \mathcal{A}_{T_H/T}(\gamma_H)^\delta \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

を満たすものが [LS] で定義されている。このとき、 $f \in C_c^\infty(G(F_v))$ に対して $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ があって

$$O^{(T_H, 1)}(\gamma_H, f) = \sum_{\delta \in \mathfrak{D}(T/F_v)} \Delta_{G/H}(\gamma_H, \mathcal{A}_{T_H/T}(\gamma_H)^\delta) O(\mathcal{A}_{T_H/T}(\gamma_H)^\delta, f)$$

が成り立つ。この $f \mapsto f^H$ は T, T_H によらない。

このほかにこの対応 $f \mapsto f^H$ が $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ を $C_c^\infty(H(\mathbb{A}))$ に持っていくように取れることを主張する、**fundamental lemma** という予想がある。いずれにせよこの予想は、 $G(F_v)$ 上の正則軌道積分と、 $G(F_v)$ 自身も含めた G の endoscopic 群上の正則安定軌道積分が、ともに $G(F_v)$ -不変超関数の空間の基底をなし、その変換行列が $\Delta_{G/H}$ で与えられることを主張している。正則安定軌道積分の空間の閉包の元を **安定超関数** と呼ぶ。

$G = GSp(2)_F$ の時には、 $s = \text{diag}(1, -1, -1, 1)$ として $\hat{H} \simeq \{(g_1, g_2) \in GL(2, \mathbb{C})^2 \mid \det g_1 = \det g_2\}$ および $H = GO(2, 2) = GL(2)_F \times_{\mathbb{G}_m} GL(2)_F$ が得られる。 $GSp(2)$ の楕円的な endoscopic 群はこの H だけであることが知られており、この場合の transfer 予想及び fundamental lemma はいずれも T. Hales によって解決されている [H2], [H]。

$G(F_v)$ -不変超関数のもう一つの基底である緩増加既約表現の指標たちに transfer 予想による基底の変換を施すとどうなるであろうか。アルキメデス素点での結果 [She] から期待される予想を述べておく。局所的な Langlands パラメタ $\varphi_v \in \Phi(G_{F_v})$ が **緩増加** とはその像が相対コンパクトであることとする。そのような φ_v の集合を $\Phi_{\text{temp}}(G_{F_v})$ と書く。 $\varphi_v \in \Phi_{\text{temp}}(G_{F_v})$ に対して S_{φ_v} を $\varphi_v(\mathcal{L}_{F_v})$ の $\hat{G}$ での中心化群とし、 $\mathbf{S}_{\varphi_v} := S_{\varphi_v}/S_{\varphi_v}^0 Z(\hat{G}^{\Gamma_v})$ とおく。ここで、 $(\)^0$ は単位元を含む連結成分を表す。

予想 5.2. $\varphi_v \in \Phi(G_{F_v})$ には有限個の緩増加ユニタリ既約表現の集合 Π_{φ_v} (**L -パッケージ** と呼ばれる) が対応していて次を満たす。

(A) φ_v が G の F -放物型部分群 $P = MU$ の Langlands パラメタ $\varphi^M : \mathcal{L}_F \rightarrow {}^L M$ を経由しているとき、対応する $M(F_v)$ の L -パッケージを $\Pi_{\varphi_v}^M$ として、

$$\Pi_{\varphi_v} = \{\text{Ind}_{P(F)}^{G(F)}[\tau_v \otimes \mathbf{1}_{U(F_v)}] \text{ の既約 Langlands 部分商たち} \mid \tau_v \in \Pi_{\varphi_v}^M\}.$$

(B) $\varphi_v \in \Phi_{\text{temp}}(G_{F_v})$ とする。

- (1) $\Theta_{\varphi_v} := \sum_{\pi_v \in \Pi_{\varphi_v}} \Theta_{\pi_v}$ は安定超関数。ここで Θ_{π_v} は π_v の指標 (超関数になる)。
- (2) S_{φ_v} 内の半単純元 s に対して、 $\hat{H}$ を上と同様に定め、 ρ_H で $\text{Ad} \circ \varphi_v|_{W_{F_v}}$ をある分裂 $\text{spl}_{\hat{H}}$ を保つように $\text{Int}(\hat{H})$ でひねった W_{F_v} -作用を表す。 ${}^L H = \hat{H} \rtimes_{\rho_H} W_{F_v}$ を L -群に持つ準分裂連結簡約群 H は G の endoscopic 群である。更に φ_v は H の緩増加 Langlands パラメタ $\varphi_v^H : \mathcal{L}_{F_v} \rightarrow {}^L H$ を経由している。函数 $\delta : S_{\varphi_v} \times \Pi_{\varphi_v} \rightarrow \mathbb{C}$

で

$$\Theta_{\varphi_v^H}(f^H) = \sum_{\pi_v \in \Pi_{\varphi_v}} \delta(s, \pi_v) \Theta_{\pi_v}(f)$$

となるものがある。更に、

- (a) $\delta(\bullet, \pi_v)$ は実は $\mathbf{S}_{\varphi_v}$ 上の関数である。
- (b) $\pi_{1,v} \in \Pi_{\varphi_v}$ を固定するとき、 $\pi_v \mapsto \delta(\bullet, \pi_v)/\delta(\bullet, \pi_{1,v})$ は Π_{φ_v} から $\mathbf{S}_{\varphi_v}$ の既約指標の集合への単射。

5.2. 大域理論— 重複度公式. 以上の準備の下でやっと一般の簡約群に対する Langlands の予想を述べられる。 $\varphi \in \Phi(G_F)$ が緩増加とは、全ての v において $\varphi_v = \varphi \circ \iota_v$ が緩増加であることとする。緩増加な元のなす $\Phi(G_F)$ の部分集合を $\Phi_{\text{temp}}(G_F)$ と書く。 $\varphi \in \Phi(G_F)$ に対して **大域的な L -パッケージ** Π_{φ} を制限テンソル積 $\pi = \bigotimes_v \pi_v$ の集合とする。但し、 $\pi_v \in \Pi_{\varphi_v}$ で、有限個を除く v では π_v は不分岐主系列表現に取る。

予想 5.3 (緩増加保型表現の重複度公式). $\varphi \in \Phi_{\text{temp}}(G_F)$ とする。

(1) G の F -分裂 spl_G を思い出す。 $\mathbf{B}$ のユニポテント根基を $\mathbf{U}$ とし、 $\mathbf{U}(F) \backslash \mathbf{U}(\mathbb{A})$ の指標 $\psi = \bigotimes_v \psi_v$ で非退化 (すなわち $\mathbf{T}(F)$ での安定化群が $Z_G(F)$) であるものを固定する。このとき、各 L -パッケージ Π_{φ_v} に ψ_v -generic、つまり ψ_v に関する Whittaker モデルを持つものがただ一つ含まれている (*generic* パッケージ予想)。それを $\pi_{1,v}$ と書く。

(2) $s \in \mathbf{S}_{\varphi}$ と $\pi = \bigotimes_v \pi_v \in \Pi_{\varphi}$ に対して、

$$\langle s, \pi \rangle := \prod_v \langle s, \pi_v \rangle, \quad \langle s, \pi_v \rangle := \delta(s, \pi_v) \delta(s, \pi_{1,v})^{-1}$$

とおく。このとき、 π の $L^2_{\text{disc}}(G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}))$ での重複度 $m(\pi)$ は

$$m(\pi) = \frac{1}{|\mathbf{S}_{\varphi}|} \sum_{s \in \mathbf{S}_{\varphi}} \langle s, \pi \rangle$$

で与えられる。

6. CAP 保型表現

Eisenstein 級数の理論により $L^2_{\text{disc}}(G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}))$ の構造は G とその Levi 部分群に対する L^2 -カスプ形式の空間の構造に帰着されるので、カスプ表現の記述があれば十分である。上の予想で $\Pi_{\text{disc}}(G)$ の緩増加な元のみを記述対象としているのは、Ramanujan 予想から $GL(n, \mathbb{A})$ のカスプ表現の集合が $\Pi_{\text{disc}}(GL(n))$ 内の緩増加元の集合と一致するとされているからである。

ところが 1977 年に齋藤裕氏と黒川氏が独立に存在を予想し、後に Maaß, Andrianov, Zagier によって実際に構成されたある種の Siegel カスプ形式は Ramanujan 予想を満たさない。加えてこの、いわゆる齋藤-黒川リフトは Siegel モジュラー多様体の Picard 群に寄与がある [Ws] など、数論的にも重要なものであることが知られている。このようなカスプ表現は一般に G よりランクが低い群の保型表現からのテータリフトで得られ、Eisenstein 級数やその留数として得られる保型表現とほとんど至るところでの局所成分を共有している。そこで cuspidal でありながら、放物型 (parabolic) 部分群からの寄与に近

い (cuspidal associated to parabolic) という意味でこのような保型表現を **CAP 保型表現** と呼ぶ。

CAP 保型表現をはじめとする緩増加でない保型表現に対しても Langlands 予想のような重複度公式を拡げる目的で、Arthur は一連の予想を提起している [A], [A2]。この予想は Arthur-Selberg 跡公式の比較を通じて保型形式を研究する Arthur-Langlands プログラムの基盤をなしている。また Lefschetz-Verdier 跡公式を Arthur-Selberg 跡公式と比較して志村多様体の Hasse-Weil ゼータ関数を保型 L -関数で表す Langlands のプログラムにも不可欠で、80 年代終わりに確立された Picard モデュラー多様体の場合 [LR] も三変数ユニタリ群に対してこの予想が確立されたことによっている [R]。

[A2] において、Arthur は齋藤-黒川リフトがどのように彼の予想に当てはまるかを解説している。齋藤-黒川リフトの大域的な性質については Piatetskii-Shapiro による詳しい考察 [PS] があつたが、それは Waldspurger による志村対応の精密な記述 [W2] と自身による Siegel 保型形式の L -関数の積分表示によるものだった。それに依存した Arthur の議論はアルキメデス素点と不分岐な素点の解析が中心になっている。そこで以下では、その後得られた p -進体上の階数 2 の Chevalley 群のユニタリ表現の分類 [Sh], [Sh2], [ST] および志村対応の更に精密な記述 [W] を用いて、 $GS(2)$ の CAP 保型表現がどのように Arthur 予想に当てはまるかを、分岐素点を中心に見ていこう。

7. ARTHUR パラメタ

可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_F \times SL(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\phi} & {}^L G \\ \text{pr}_{W_F} \times 1 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_{W_F} \\ W_F & \xlongequal{\quad} & W_F \end{array}$$

を満たすような連続準同型 $\phi : \mathcal{L}_F \times SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow {}^L G$ であつて、 $\phi|_{\mathcal{L}_F} \in \Phi_{\text{temp}}(G_F)$ かつ $\phi|_{SL(2, \mathbb{C})}$ が解析的であるようなものの $\hat{G}$ -共役類を **Arthur パラメタ** と呼ぶ。その集合を $\Psi(G_F)$ と書く。 $\Psi_0(G_F)$ で **楕円的** すなわち $\text{Im} \phi$ の中心化群 S_ϕ の単位元の連結成分が $Z(\hat{G})$ に含まれるような $\phi \in \Psi(G)$ の集合を表す。予想によれば $\Psi_0(G_F)$ の元は $\Pi_{\text{disc}}(G_F)$ の元をパラメタライズするはずである。CAP 保型表現は緩増加でない $\Pi_{\text{disc}}(G_F)$ の元であるから、それらに対応するパラメタの集合は

$$\Psi_{\text{CAP}}(G_F) := \{\phi \in \Psi_0(G_F) \mid \phi|_{SL(2, \mathbb{C})} \text{ は自明でない} \}$$

のはずである。

$G = GS(2)$ の場合に $\Psi_{\text{CAP}}(G_F)$ を分類しよう。古典的な Kostant の理論によれば $\phi|_{SL(2, \mathbb{C})}$ の $\hat{G}$ -共役類は $\hat{G}$ 内のユニポテント共役類で分類される。 $\hat{G}$ には

$$\text{正則 ; } u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * & * \\ 0 & 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{1-正則 ; } u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{2-正則 ; } u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の三つの非自明なユニポテント共役類があり、それぞれに解析的準同型

$$\begin{aligned}\phi_0 : SL(2, \mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} &\longmapsto \text{diag}(a^3, a, a^{-1}, a^{-3}) \in \widehat{G} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto u_0 \\ \phi_1 : SL(2, \mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \left(\begin{array}{c|c} a\mathbf{1}_2 & b\mathbf{1}_2 \\ \hline c\mathbf{1}_2 & d\mathbf{1}_2 \end{array} \right) \in \widehat{G} \\ \phi_2 : SL(2, \mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in \widehat{G}\end{aligned}$$

の共役類が対応する。これらに $\phi_i(SL(2, \mathbb{C}))$ の中心化群に値を持つ $\Phi_{\text{temp}}(G_F)$ を組み合わせることで、 $\Psi_{\text{CAP}}(G_F)$ は次のように分類される。但し、類体論によって $\mathbb{G}_m(\mathbb{A})$ の保型表現とその Langlands パラメタを同一視している。

- ある $\mathbb{G}_m(\mathbb{A})$ の保型指標 χ があって、

$$\phi_0 = \phi_{0,\chi} : \mathcal{L}_F \ni \ell \longmapsto \chi(\ell)\mathbf{1}_4 \times w(\ell) \in {}^L G.$$

ここで $w(\ell)$ は $\ell \in \mathcal{L}_F$ の W_F への射影による像。

- $GL(2, \mathbb{A})$ の (カスプ表現とは限らない) 緩増加保型表現 π で、各素点 v での局所成分 π_v がある F_v 上の 2 次元半単純代数 K_v の乗法群の指標 θ_v からの局所 “automorphic induction” $\pi(\theta_v)$ ([JL] で Weil 表現を使って構成されている) であるようなものがあって

$$\phi_1 = \phi_{1,\pi} : \mathcal{L}_F \ni \ell \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} \varphi_\pi(\ell) & \mathbf{0}_2 \\ \hline \mathbf{0}_2 & \omega'_\pi(\ell)^\tau \varphi_\pi(\ell)^{-1} \end{array} \right) \times w(\ell) \in {}^L G.$$

ここで π_v についての条件は π の Langlands パラメタ φ_π が $GO(1, 1)$ に値を持つことを意味していて、 ω'_π は π の中心指標 ω_π を合成

$$W_F \xrightarrow{\varphi_\pi} GO(1, 1)(\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{射影}} \pi_0(GO(1, 1)(\mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$$

でひねったものである。

- 自己双対な $\tau \in \Pi_0(GL(2)_F)$ と $\mu \in \Pi_{\text{disc}}(\mathbb{G}_{m,F})$ があって

$$\phi_2 = \phi_{2,\tau,\mu} : \mathcal{L}_F \ni \ell \longmapsto \mu(\ell) \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & \varphi_\tau(\ell) & \\ \hline & & 1 \end{array} \right) \times w(\ell) \in {}^L G.$$

8. 局所理論 — ARTHUR パッケージ

8.1. Shahidi-Sally-Tadić の結果の帰結. 上で分類した大域的なパラメタ $\phi \in \Psi(G_F)$ に $\iota_v : \mathcal{L}_{F_v} \rightarrow \mathcal{L}_F$ を合成することにより、その “局所成分” $\phi_v \in \Psi(G_{F_v})$ が得られる。 ϕ_v の像の $\widehat{G}$ での中心化群を S_{ϕ_v} とし、その連結成分のなす群 $\pi_0(S_{\phi_v})$ を $\mathbf{S}_{\phi_v}$ と書く。

予想 8.1. ϕ_v には有限個の緩増加ユニタリ既約表現の集合 Π_{ϕ_v} (Arthur-パッケージと呼ばれる) が対応していて次を満たす。

(1) *Langlands* パラメタ φ_{ϕ_v} を

$$\varphi_{\phi_v}(\ell) := \phi_v\left(\ell \times \begin{pmatrix} |\ell|_v^{1/2} & 0 \\ 0 & |\ell|_v^{-1/2} \end{pmatrix}\right)$$

で定めるとき、 $\Pi_{\phi_v} \supset \Pi_{\varphi_{\phi_v}}$ 。

(2) 定数 $\delta(1, \pi_v)$, $(\pi_v \in \Pi_{\phi_v})$ があって $\Theta_{\phi_v} := \sum_{\pi_v \in \Pi_{\phi_v}} \delta(1, \pi_v) \Theta_{\pi_v}$ は安定超関数。

(3) S_{ϕ_v} 内の半単純元 s に対して、*endoscopic* 群 H 及び、*Arthur* パラメタ $\phi_v^H : \mathcal{L}_{F_v} \rightarrow {}^L H$ を予想 5.2 と同様に定義する。このとき関数 $\delta : S_{\phi_v} \times \Pi_{\phi_v} \rightarrow \mathbb{C}$ で

$$\Theta_{\phi_v^H}(f^H) = \sum_{\pi_v \in \Pi_{\phi_v}} \delta(s, \pi_v) \Theta_{\pi_v}(f)$$

となるものがある。更に

(a) $\delta(\bullet, \pi_v)$ は実は S_{ϕ_v} 上の関数である。

(b) $\pi_{1,v} \in \Pi_{\phi_v}$ を固定するとき、 $\pi_v \mapsto \delta(\bullet, \pi_v) / \delta(\bullet, \pi_{1,v})$ は Π_{ϕ_v} から S_{ϕ_v} の既約指標の集合への単射。

$G = GSp(2)_F$ の F 上定義された放物型部分群は $\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{U}$ と G 自身及び

$$P_1 = M_1 U_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} t & & \\ \hline & A & \\ \hline & & \det(A)t^{-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & ** & * \\ \hline & \mathbf{1}_2 & * \\ \hline & & 1 \end{array} \right) \middle| \begin{array}{l} A \in GL(2) \\ t \in \mathbb{G}_m \end{array} \right\},$$

$$P_2 = M_2 U_2 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0}_2 \\ \hline \mathbf{0}_2 & \nu^\tau A^{-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_2 & B \\ \hline \mathbf{0}_2 & \mathbf{1}_2 \end{array} \right) \middle| \begin{array}{l} A \in GL(2), \nu \in \mathbb{G}_m, \\ {}^\tau B = B \end{array} \right\}$$

の4つのどれかに共役である。 $G(F_v)$ の既約ユニタリ表現のうち $L^2(G(F_v))$ の上の右正則表現のスペクトル分解に現れるものを **緩増加 (tempered)** 表現と呼び、その同値類の集合を $\Pi_{\text{temp}}(G(F_v))$ と書く。そのうち $L^2(G(F_v))$ の既約部分表現として実現されるものを **二乗可積分 (square integrable)** 表現といい、その同値類の集合を $\Pi_{\text{disc}}(G(F_v))$ と書く。 $P = MU$ を上の放物型部分群のうちの一つとし、 $\tau_v \in \Pi_{\text{temp}}(M(F_v))$ とするとき $I_P^G(\tau_v)$ で放物型誘導表現 $\text{Ind}_{P(F_v)}^{G(F_v)}[\tau_v \otimes \mathbf{1}_{U(F_v)}]$ を表す。またその *Langlands* 部分商の集合を $J_P^G(\tau_v)$ と書く。 $GSp(2)$ の場合には $J_P^G(\tau_v)$ は常に単一の既約表現からなる。 P_1, P_2 の *Langlands* 双対群は各々 P_2 と P_1 の形の部分群である。予想 8.1 (1), 予想 5.2 (A) から、次が従う。

(0) $\varphi_{\phi_{0,v}}^{\mathbf{T}}$ は $|\cdot|_v^2 \otimes |\cdot|_v \otimes \chi_v | \cdot |_v^{-3/2} \in \Pi(\mathbf{T}(F_v))$ に対応している。 $G(F_v)$ -加群の Grothendieck 群の中では

$$I_{P_0}^G(| \cdot |_v^2 \otimes | \cdot |_v \otimes \chi_v | \cdot |_v^{-3/2}) \\ = (\chi_v \circ \nu) \delta_0 + J_{P_1}^G(\delta^{GL(2)} | \det | \cdot |_v^{3/2} \otimes \chi_v^{-3/2}) + J_{P_2}^G(| \cdot |_v^2 \otimes \chi_v | \det | \cdot |_v^{-1} \delta^{GL(2)}) + \chi_v \circ \nu$$

が成り立っている。但し、 δ_0 及び $\delta^{GL(2)}$ は各々 $G(F_v)$ と $GL(2, F_v)$ の Steinberg 表現であり、 ν は similitude ノルムを表す。これから $S_{\phi_{0,v}} = \{1\}$, $\Pi_{\phi_{0,v}} \ni \chi_v \circ \nu$ 、すなわち $\Pi_{\phi_{0,v}} = \{\chi_v \circ \nu\}$ が分かる。

(1) K_v/F_v に局所類体論で対応する $F_v^\times$ の二次指標を ω_{K_v/F_v} と書くとき、 $\varphi_{\phi_1,v}^{M_1}$ は $\omega_{K_v/F_v}|_v \otimes \pi(\theta_v)| \det|_v^{-1/2}$ に対応する。 $\theta_v \neq \sigma(\theta_v)$, $\exists \sigma \in \text{Gal}(K_v/F_v)$ なら [Sh2, Remark 8.5]

$$I_{P_1}^G(\omega_{K_v/F_v}|_v \otimes \pi(\theta_v)| \det|_v^{-1/2}) = \delta_1(K_v, \theta_v) + J_{P_1}^G(\omega_{K_v/F_v}|_v \otimes \pi(\theta_v)| \det|_v^{-1/2}),$$

で $\delta_1(K_v, \theta_v)$ は二乗可積分。そうでなければ χ_v を $\theta_v = \chi_v \circ N_{K_v/F_v}$ となる $F_v^\times$ の指標として、 K_v/F_v が二次拡大の時

$$\begin{aligned} & I_{P_1}^G(\omega_{K_v/F_v}|_v \otimes \pi(\theta_v)| \det|_v^{-1/2}) \\ &= ((\omega_{K_v/F_v} \chi_v) \circ \nu) \delta_0(K_v) + J_{P_2}^G(\omega_{K_v/F_v} \delta^{GL(2)}| \det|_v^{1/2} \otimes \omega_{K_v/F_v} \chi_v|_v^{-1/2}) \\ &+ J_{P_2}^G(\omega_{K_v/F_v} \delta^{GL(2)}| \det|_v^{1/2} \otimes \chi_v^{-1/2}) + J_{P_1}^G(\omega_{K_v/F_v}|_v \otimes \pi(\theta_v)| \det|_v^{-1/2}) \end{aligned}$$

($\delta_0(E)$ は二乗可積分)、 $K_v \simeq F_v^2$ のとき

$$\begin{aligned} & I_{P_1}^G(|_v \otimes \pi(\theta_v)| \det|_v^{-1/2}) = (\chi_v \circ \nu) \tau(\delta^{GL(2)}) + (\chi_v \circ \nu) \tau(\mathbf{1}_{GL(2)}) \\ &+ J_{P_2}^G(\delta^{GL(2)}| \det|_v^{1/2} \otimes \chi_v|_v^{-1/2}) + J_{P_1}^G(|_v \otimes \pi(\theta_v)| \det|_v^{-1/2}) \end{aligned}$$

($\tau(\delta^{GL(2)})$ および $\tau(\mathbf{1}_{GL(2)})$ は緩増加だが二乗可積分ではない既約表現) が Grothendieck 群の中で成立する [ST]。いずれの場合も $\Pi_{\phi_1,v} \ni J_{P_1}^G(\omega_{K_v/F_v}|_v \otimes \pi(\theta_v)| \det|_v^{-1/2})$ で

$$\mathbf{S}_{\phi_1,v} = \begin{cases} \{1\} & \theta_v \neq \sigma(\theta_v), \sigma \in \text{Gal}(K_v/F_v) \text{ のとき} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

である。

(2) (齋藤-黒川表現の場合) $\varphi_{\phi_2,v}^{M_2}$ は $\tau_v| \det|_v^{1/2} \otimes \mu_v|_v^{-1/2}$ に対応している。 τ_v がスーパーカスピダルならば、[Sh, Prop.6.1] から

$$I_{P_2}^G(\tau_v| \det|_v^{1/2} \otimes \mu_v|_v^{-1/2}) = (\mu_v \circ \nu) \delta_2(\tau_v) + J_{P_2}^G(\tau_v| \det|_v^{1/2} \otimes \mu_v|_v^{-1/2})$$

である。ここで $\delta_2(\tau_v)$ は二乗可積分な既約表現。それ以外の場合には $F_v^\times$ の指標 χ_1, χ_2 があって $\tau_v = \text{Ind}_{\mathbf{B}_1}^{GL(2,F_v)}[(\chi_1|_v^{s/2} \otimes \chi_2|_v^{-s/2}) \otimes \mathbf{1}_{\mathbf{U}_1(F_v)}]$ ($\mathbf{B}_1$ は $GL(2)$ の上三角部分群、 $0 \leq s < 1$) である。Ramanujan 予想が正しければ $s = 0$ であるが、それはここでは仮定しない。このとき、 $\chi_1 = \chi_2^{-1}$ ならば、

$$I_{P_2}^G(\tau_v| \det|_v^{1/2} \otimes \mu_v|_v^{-1/2}) = I_{P_2}^G(\chi_1 \delta^{GL(2)}| \det|_v^{s/2} \otimes \chi_1^{-1} \mu_v|_v^{-s/2}) + J_{P_2}^G(\tau_v| \det|_v^{1/2} \otimes \mu_v|_v^{-1/2})$$

であり、そうでなければ $I_{P_2}^G(\tau_v| \det|_v^{1/2} \otimes \mu_v|_v^{-1/2}) = J_{P_2}^G(\tau_v| \det|_v^{1/2} \otimes \mu_v|_v^{-1/2})$ 自身が既約である [ST]。いずれの場合も $\Pi_{\phi_2,v} \ni J_{P_2}^G(\tau_v| \det|_v^{1/2} \otimes \mu_v|_v^{-1/2})$ で

$$\mathbf{S}_{\phi_2,v} = \begin{cases} \{1\} & \tau_v \text{ が主系列表現の時} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \tau_v \text{ が二乗可積分の時} \end{cases}$$

が従う。

8.2. **テータリフトによるパケットの候補の構成.** 上で $\phi_{1,v}, \phi_{2,v}$ に対応するパケットは、 $S_{\phi_{i,v}}$ の形によって二つの元を含むべき時がある。しかし、[ST] によって分類されたスーパーカスピダルでない既約表現の中には、その候補がない。これは Langlands-Shahidi 理論を使ってそれらの L 及び ε -因子を計算してみるとわかる。そこでこれらの Arthur パケットはスーパーカスピダルな表現を含まねばならない。以下ではその候補をテータ対応によって構成する。

(1) $\phi_{1,v}$ の場合 — $O(2) \times Sp(2)$.

F_v 上の 2 次元二次形式付き空間 $(K_v, N_{K_v/F_v})$ の similitudes のなす群を $GO(K_v) = K_v^\times \rtimes \text{Gal}(K_v/F_v)$ と書く。この群の既約表現の同値類の集合 $\Pi(GO(K_v))$ は

(i) 2 次元表現 $\tau_2(\theta_v) = \text{Ind}_{K_v^\times}^{GO(K_v)} \theta_v$, $(\theta_v \in \Pi(K_v^\times), \sigma(\theta_v) \neq \theta_v)$.

(ii) 1 次元表現 $\tau_1^\pm(\theta_v)|_{K_v^\times} = \theta_v$, $\tau_1^\pm(\theta_v)(\sigma) = \pm 1$, $(\theta_v \in \Pi(K_v^\times), \sigma(\theta_v) = \theta_v)$.

の二種類からなっている。 $\tau_i^\pm(\theta_v)$ の $G(F_v)$ への局所テータリフト (F_v の指標の取り方によらず一意に定まる) を $\pi_i^\pm(\theta_v)$ と書く。Weil 表現の Jacquet 加群の計算から、

$$\pi_i^\pm(\theta_v) = J_{P_1}^G(\omega_{K_v/F_v} | \cdot |_v \otimes \pi(\theta_v) | \det | \cdot |_v^{-1/2}), \quad i = 1, 2$$

および $\pi_1^-(\theta_v)$ がスーパーカスピダルであることがわかる。

$$\Pi_{\phi_{i,v}} = \begin{cases} \{\pi_2(\theta_v)\} & \sigma(\theta_v) \neq \theta_v \text{ のとき} \\ \{\pi_1^\pm(\theta_v)\} & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

とおく。

(2) $\phi_{2,v}$ の場合 — **リフトの合成** $O(3) \times \widetilde{SL(2)}, \widetilde{SL(2)} \times PGSp(2)$. Weil 表現を使う都合上 F_v の非自明指標 ψ_v を固定しておく。簡単のため $H := PGL(2)$, $G_{\text{ad}} = PGSp(2)$ と書き、 $\mathbf{Mp}_v$ で $SL(2, F_v)$ の metaplectic 被覆群を表す。また局所テータリフトで対応する $H(F_v)$, $\mathbf{Mp}_v$, $G_{\text{ad}}(F_v)$ の既約表現を τ_v, σ_v, π_v と書く。 D_v で F_v 上の四元数体を表し、その乗法群 $D_v^\times$ を中心で割って得られる群を $D_{v,\text{ad}}^\times$ と書く。 τ_v から清水-Jacquet-Langlands 対応 [JL] によって得られる $D_{v,\text{ad}}^\times$ の既約表現を $JL(\tau_v)$ と書く。

(2-a) τ_v が主系列表現 $I_{\mathbf{P}_H}^H(\chi_v)$ のとき. σ_v は $\mathbf{Mp}_v$ の Borel 部分群 $\mathbf{B}_v^{Mp}$ の指標

$$\tilde{\chi}_v : \mathbf{B}_v^{Mp} \ni \left(\begin{pmatrix} a & x \\ & a^{-1} \end{pmatrix}, \epsilon \right) \mapsto \epsilon \frac{\gamma_{\psi_v}(1)}{\gamma_{\psi_v}(a)} \chi_v(a) \in \mathbb{C}^\times$$

からの誘導表現 $\tilde{I}_{\psi_v}(\chi_v)$ [W2, Prop.18]。 $\pi_v = J_{P_2}^G(\tau_v | \det | \cdot |_v^{1/2} \otimes | \cdot |_v^{-1/2}) = J_{\mathbf{B}}^G(\chi_v | | \cdot |_v^{1/2} \otimes \chi_v^{-1} | | \cdot |_v^{1/2} \otimes | \cdot |_v^{-1/2})$.

(2-b) $\tau_v \in \Pi_{\text{disc}}(H(F_v))$ のとき. $\sigma_v = \sigma(\tau_v)$ は τ_v がスーパーカスピダルならスーパーカスピダル。そうでなければ、 $\tilde{I}_{\psi_v}(\omega | | \cdot |_v^{1/2})$ (ω は二次指標) の真部分表現。 $\pi_v = \pi^+(\tau_v) := J_{P_2}^G(\tau_v | \det | \cdot |_v^{1/2} \otimes | \cdot |_v^{-1/2})$.

(2-b)' $\tau_v \in \Pi_{\text{disc}}(H(F_v))$ のとき. (2-b) と同様の τ_v に対して $JL(\tau_v)$ の $D_{v,\text{ad}}^\times \times \widetilde{SL(2)}$ によるリフト $\sigma(JL(\tau_v))$ は $\sigma(\tau_v)$ と一致しない。さらに、

$$\pi_v = \pi^-(\tau_v) = \begin{cases} \text{スーパーカスピダル} & \tau_v \neq \delta^{GL(2)} \text{ のとき} \\ \tau(\mathbf{1}_{GL(2)}) & \tau_v = \delta^{GL(2)} \text{ のとき.} \end{cases}$$

そこで、

$$\Pi_{\phi_{2,v}} = \begin{cases} \{\mu_v \pi(\tau_v)\} & \tau_v = I_{\mathbf{B}^H}^H(\chi_v) \text{ のとき} \\ \{\pi^\pm(\tau_v)\} & \tau_v \text{ が二乗可積分の時} \end{cases}$$

とおく。

注意 8.2 (参考：吉田リフト). 参考までに吉田リフトの局所リフトにふれておく。 τ_v を (2-b) の通りとし、 $GO(4, F_v) := D_v^\times \times D_v^\times / F_v^\times$, $GO(2, 2)(F_v) := GL(2, F_v) \times GL(2, F_v) / F_v^\times$ とおく。このとき、局所テータリフト $O(4) \times Sp(2)$ で $JL(\tau_v) \otimes \mathbf{1}_{D_v^\times}$ は (2-b)' のスーパーカスピダル表現 $\pi^-(\tau_v)$ に行き、 $O(2, 2) \times Sp(2)$ で $\tau_v \otimes \delta^{GL(2)}$ は

$$\begin{cases} \delta_1(\tau_v) & \tau_v \neq \delta^{GL(2)} \text{ のとき} \\ \tau(\delta^{GL(2)}) & \tau = \delta^{GL(2)} \text{ のとき} \end{cases}$$

に行く。また、 τ_v がスーパーカスピダルなら、 $\pi^-(\tau_v)$ と $\delta_1(\tau_v)$ は *Langlands* パラメタ

$$\varphi_2 : \mathcal{L}_{F_v} = W_{F_v} \times SU(2) \ni (w, g) \longmapsto \phi_2(w \times g, g) \in {}^L G$$

に対応する L -パケットをなすと期待される。

9. 大域理論 — 一般化された重複度公式

$\phi \in \Psi(G_F)$ に付随して表現

$$\tau_\phi : S_\phi \times \mathcal{L}_F \times SL(2, \mathbb{C}) \ni (s, \ell, g) \longmapsto \text{Ad}(s\phi(\ell, g)) \in GL(\text{Lie } \widehat{G})$$

が得られる。これの既約分解を $\tau = \bigoplus_k \tau_k$ と書く。各 τ_k は $S_\phi, \mathcal{L}_F, SL(2, \mathbb{C})$ それぞれの既約表現 λ_k, μ_k, ν_k のテンソル積 $\tau_k = \lambda_k \otimes \mu_k \otimes \nu_k$ と書ける。このとき τ_k が **スペシャル** とは

- τ_k は自己双対,
- $\varepsilon(1/2, \mu_k) = -1$

が成り立つこととする。二つ目の条件から自己双対な $\mathcal{L}_F$ の表現 μ_k はシンプレクティクでなくてはならない [FQ]。このとき、

$$\varepsilon_\phi : S_\phi \ni s \longmapsto \prod_{k; \tau_k \text{ はスペシャル}} \det \lambda_k(s) \in \mathbb{C}^\times$$

とおく。これは $\mathbf{S}_\phi$ の二次指標になっていることがわかる。大域的な Arthur パケット Π_ϕ を L -パケットの時と同様に定義する。

予想 9.1 (重複度公式). $\phi \in \Psi(G_F)$ とする。

(1) $\mathbf{U}(F) \backslash \mathbf{U}(\mathbb{A})$ の非退化な指標 $\psi = \bigotimes_v \psi_v$ を思い出す。 Π_{ϕ_v} の元 $\pi_{1,v}$ であって ψ_v -generic な一般主系列表現 $I_P^G(\tau_v)$ の *Langlands* 既約商であるようなものがただ一つある (一般化された generic パケット予想)。

(2) $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_\phi$ と $\pi = \bigotimes_v \pi_v \in \Pi_\phi$ に対して、

$$\langle \mathbf{s}, \pi \rangle := \prod_v \langle \mathbf{s}, \pi_v \rangle, \quad \langle \mathbf{s}, \pi_v \rangle := \delta(\mathbf{s}, \pi_v) \delta(\mathbf{s}, \pi_{1,v})^{-1}$$

とおく。このとき、 π の $L^2_{\text{disc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ での重複度 $m(\pi)$ は

$$m(\pi) = \frac{1}{|\mathbf{S}_\varphi|} \sum_{\mathbf{s} \in \mathbf{S}_\varphi} \varepsilon_\phi(\mathbf{s}) \langle \mathbf{s}, \pi \rangle$$

で与えられる。

(0) ϕ_0 のとき. この場合は $\mathbf{S}_\phi$ が自明であるから、 $m(\chi \circ \nu) = 1$ が従う。これは G の residual 離散スペクトルの結果と一致している [Kn]。

(1) ϕ_1 のとき. $\mathbf{S}_\phi$ は数体の 2 次拡大 K/F 及び、 $\theta \in \Pi_{\text{disc}}(\mathbb{G}_{m,K})$, $\sigma(\theta) = \theta$ があって π が大域的な automorphic induction $\pi(\theta)$ のときのみ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で、それ以外の場合は自明である。

$$\tau_{\phi_1}|_{\mathcal{L}_F \times SL(2, \mathbb{C})} \simeq \text{Ad}(\varphi_\pi) \otimes \text{Sym}^2(\text{St}_2) \oplus (\mathbf{1}_{\mathcal{L}_F} \otimes \mathbf{1}_{SL(2, \mathbb{C})})^{\oplus 2}$$

なのでスペシャルな k はない ($\theta_v \neq \sigma(\theta_v)$ となる v があるとき $\text{Ad}(\varphi_\pi)$ は直交表現であることに注意)。ここで St_2 は $SL(2)$ の 2 次元ベクトル空間上の自然な表現で、 Sym^r は r 次の対称テンソル積を表す。 $\sigma(\theta_v) \neq \theta_v$ となる素点の (有限) 集合を $S(\phi_1)$ として、それと交わらない素点の有限集合 S に対して

$$\pi(\phi_1; S) := \bigotimes_{v \in S(\phi_1)} \pi_2(\theta_v) \otimes \bigotimes_{v \in S} \pi_1^-(\theta_v) \otimes \bigotimes_{v \notin S \sqcup S(\phi_1)} \pi_1^+(\theta_v) \in \Pi_{\phi_1}$$

とおく。 (K, θ) で $\sigma(\theta) = \theta$ なるものがあって $\pi = \pi(\theta)$ なら、上の予想は

$$m(\pi(\phi_1; S)) = \begin{cases} 1 & |S| \text{ が偶数の時,} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

となる。これは S が偶数個からなるときに限り、 $\pi(\phi_1, S)$ の重複度は少なくとも 1 という Soudry の結果 [So] に一致している。なお、 $\pi(\phi_1, \emptyset)$ は $\sigma(\theta) \neq \theta$ なら P_1 からの [Kn]、そうでなければ $\mathbf{B}$ からの [Kn], [KRS] residual 離散スペクトルである。 π が上の形でない場合は予想によれば常に $m(\pi(\phi_1; S)) = 1$ となるはずだが、現時点ではそれを確かめることはできない。

(2) ϕ_2 のとき (齋藤-黒川リフト). $S_\phi = \{\text{diag}(x, \pm x, \pm x, x) \in \widehat{G}\}$, $\mathbf{S}_\phi = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

$$\tau_{\phi_2} = (\mathbf{1}_{\mathbf{S}_{\phi_2}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{L}_F} \otimes \text{Sym}^2(\text{St}_2) \oplus (\text{sgn}_{\mathbf{S}_{\phi_2}} \otimes \varphi_\tau \otimes \text{St}_2) \oplus (\mathbf{1}_{\mathbf{S}_{\phi_2}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{L}_F} \otimes \mathbf{1}_{SL(2)}) \oplus (\mathbf{1}_{\mathbf{S}_{\phi_2}} \otimes \text{Ad}(\varphi_\tau) \otimes \mathbf{1}_{SL(2)})$$

で、 $\varepsilon(1/2, \tau) = -1$ なら右辺の 2 番目の既約表現がスペシャルになる。つまり、

$$\varepsilon_{\phi_2} = \begin{cases} \text{sgn}_{\mathbf{S}_{\phi_2}} & \varepsilon(1/2, \tau) = -1 \text{ のとき} \\ 1 & \text{それ以外の時.} \end{cases}$$

S_τ を τ_v が二乗可積分であるような素点 v の集合として、 $S \subset S_\tau$ に対して、

$$\pi(\phi_2; S) := (\mu \circ \nu) \bigotimes_{v \in S} \pi^-(\tau_v) \otimes \bigotimes_{v \in S_\tau \setminus S} \pi^+(\tau_v) \otimes \bigotimes_{v \notin S_\tau} \pi(\tau_v)$$

とおく。このとき、

$$m(\pi(\phi_2; S)) = \begin{cases} 1 & \varepsilon(1/2, \tau) = -1 \text{ で } |S| \text{ が奇数の時,} \\ 1 & \varepsilon(1/2, \tau) = 1 \text{ で } |S| \text{ が偶数の時,} \\ 0 & \text{それ以外の時.} \end{cases}$$

となり、これは Waldspurger-Piatetskii-Shapiro による 齋藤-黒川 リフトの重複度公式に一致する。

REFERENCES

- [A] J. Arthur, *Unipotent automorphic representations: conjectures*, in “Orbites unipotentes et représentations, II.” Astérisque No. **171-172** (1989), 13–71.
- [A2] ———, *On some problems suggested by the trace formula*, in “Lie group representations, II” (College Park, Md., 1982/1983), Lecture Notes in Math. **1041**, Springer, Berlin-New York, 1984, 1–49.
- [Bl] D. Blasius, *On multiplicities for $SL(n)$* , Israel J. Math. **88** (1994), no. 1-3, 237–251.
- [Cl] L. Clozel, *Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité*, in “Automorphic forms, Shimura varieties, and L -functions”, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math. **10**, Academic Press, Boston, MA, 1990, 77–159.
- [D] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L* , in “Modular functions of one variable, II” (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), Lecture Notes in Math. **349**, Springer, Berlin, 1973, 501–597.
- [FQ] A. Fröhlich and J. Queyrut, *On the functional equation of the Artin L -function for characters of real representations*, Invent. Math. **20** (1973), 125–138.
- [Ge] S. Gelbart, *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annales of Math. Studies **83**, Princeton UP, Princeton NJ, 1975.
- [H] T. Hales, *The fundamental lemma for $Sp(4)$* , Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 1, 301–308.
- [H2] ———, *Shalika germs on $GSp(4)$* , in “Orbites unipotentes et représentations”, II. Astérisque No. **171-172** (1989), 195–256.
- [JL] H. Jacquet and R.P. Langlands, *Automorphic forms on $GL(2)$* , Lecture Notes in Mathematics, Vol. **114**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [JPS] H. Jacquet, I.I. Piatetskii-Shapiro, J.A. Shalika, *Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. Math. **105** (1983), no. 2, 367–464.
- [Kn] T. Konno, *The residual spectrum of $Sp(2)$* , Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **70** (1994), no. 6, 204–207.
- [K] R.E. Kottwitz, *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. **51** (1984), no. 3, 611–650. *Stable trace formula: elliptic singular terms*, Math. Ann. **275** (1986), no. 3, 365–399. 証明その他については Milne, J.S. Arithmetic duality theorems, Perspectives in Mathematics, **1**, Academic Press, Inc., Boston, Mass., 1986 が分かりやすい。
- [KRS] S. Kudla, S. Rallis and D. Soudry, *On the degree 5 L -function for $Sp(2)$* , Invent. Math. **107** (1992), no. 3, 483–541.
- [L] R.P. Langlands, *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen*, in “Automorphic forms, representations and L -functions”, Proc. Sympos. in Pure Math. XXXIII, Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1979, Part 2, 205–246.
- [LR] R.P. Langlands and D. Ramakrishnan eds. *The zeta functions of Picard modular surfaces*, Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, PQ, 1992.

- [LS] ——— and D. Shelstad, *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 219–271.
- [MW] C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, *Décomposition Spectrale et Séries d'Eisenstein, Une paraphrase sur l'écriture*, Progress in Math. **113**, Birkhäuser, 1994.
- [PS] I.I. Piatetskii-Shapiro, *On the Saito-Kurokawa lifting*, Invent. Math. **71** (1983), no. 2, 309–338.
- [R] J.D. Rogawski, *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Mathematics Studies, **123**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.
- [SR] N. Saavedra Rivano, *Catégories Tannakiennes*, Lect. Notes in Math. **265**, Springer, Heidelberg, 1972.
- [ST] P.J. Sally and M. Tadić, *Induced representations and classifications for $\mathrm{GSp}(2, F)$ and $\mathrm{Sp}(2, F)$* , Mém. Soc. Math. France (N.S.) No. **52** (1993), 75–133.
- [Se] J.-P. Serre, *Local fields*, Graduate Texts in Mathematics, **67**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979.
- [Sh] F. Shahidi, *Langlands' conjecture on Plancherel measures for p -adic groups*, in “Harmonic analysis on reductive groups” (Brunswick, ME, 1989), Progr. Math. **101**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991, 277–295.
- [Sh2] ———, *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p -adic groups*, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 2, 273–330.
- [She] D. Shelstad, *L -indistinguishability for real groups*, Math. Ann. **259** (1982), no. 3, 385–430.
- [So] D. Soudry, *The CAP representations of $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$* , J. Reine Angew. Math. **383**, (1988), 87–108.
- [T] M. Tadić, *Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (non-Archimedean case)*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), no. 3, 335–382.
- [V] D.A. Vogan, Jr., *The unitary dual of $\mathrm{GL}(n)$ over an Archimedean field*, Invent. Math. **83** (1986), no. 3, 449–505.
- [W] J.L. Waldspurger, *Correspondances de Shimura et quaternions*, Forum Math. **3** (1991), no. 3, 219–307.
- [W2] ———, *Correspondance de Shimura*, J. Math. Pures Appl. (9) **59** (1980), no. 1, 1–132.
- [Ws] R. Weissauer, *The Picard group of Siegel modular threefolds*, J. Reine Angew. Math. **430** (1992), 179–211.

九州大学大学院数理学研究科 〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

E-mail address: takuya@math.kyushu-u.ac.jp