玉河数について

今野 和子 * 今野 拓也 †

2005 年 1 月 6 日

概 要

代数体上の連結簡約線型代数群の玉河数の定義とそれについての小野孝氏の結果、Weil の予想を紹介する。次に Langlands, Lai, Kottwitz による Weil の予想の解決の議論を最も単純な $SL(2)$ とその内部形式の場合に解説する。

目 次

*京都大学大学院理学研究科数学教室
E-mail : kkonno@math.kyoto-u.ac.jp
URL : http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/~kkonno/Kazuko.html
†九州大学大学院数理学研究院
E-mail : takuya@math.kyushu-u.ac.jp
URL : http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/~tkonno/index-j.html
訂正やコメントなどがありましたら、上記の電子メールアドレスまでお寄せ下さい。

1 導入

代数体 F 上で定義された線型代数群 G に対してはそのアデール群 (アデール環上の有理点の群) $G(\mathbb{A})$ が定まる。これは局所コンパクト位相群でもとの代数体上の有理点たちはその離散部分群 $G(F)$ をなす。この代数体上の左不変体積要素から適当な正規化の過程を経て定義される $G(\mathbb{A})$ 上の左不変測度が玉河測度であり、それによる商空間 $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ (正確にはそれを $\mathbb{R}$ ベクトル部分で割ったもの) の体積が玉河数である。玉河数の構成は玉河恒夫氏によるものだが、それを玉河数と呼んでその重要性に注意を喚起したのは A. Weil である [Wei82]。Weil は自身の開発した Siegel-Weil の公式を用いてさまざまな古典群の玉河数を計算している。その後、小野孝氏が G がトーラスの場合の玉河数を決定し、さらにそれを用いて半単純群の相対玉河数を記述した [小野 63]。この結果は後に Sansuc によって連結簡約群の場合に拡張された [San81]。小野氏の論説 [小野 63] でも強調されているように、これらの研究の動機は玉河数の整数論的意味の解明にあった。

一方、Langlands は Eisenstein 級数を用いて $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の定数函数の Petersson ノルムを計算することにより、分裂簡約群の玉河数を一般的に決定した [Lan66]。この議論は Lai によって準分裂簡約群に拡張された [Lai80]。さらに Jacquet-Langlands は四元数体の乗法群と $GL(2)$ の Selberg 跡公式を比較することで、四元数体の乗法群の玉河数が $GL(2)$ のそれに一致することを証明した [JL70]。Kottwitz は J. Arthur の跡公式の細かい展開と Euler-Poincaré 函数の軌道積分の決定により、この議論を一般の半単純単連結群に拡張し、その玉河数が Lai によって決定され得た準分裂内部形式の玉河数に一致することを証明し

た [Kot88]。これと Sansuc の結果によって連結簡約群の玉河数は完全に決定されたのである。Langlands の議論は上でも触れた玉河数の意味についての基本的な理解を与えた点で重要である。すなわち表現論の意味の重複度が 1 である単位表現の Petersson ノルムが玉河数なのであるから、玉河数は保型表現の調和解析的な重複度とその数論的寄与の比に他ならない。換言すれば既約保型表現の周期などの数論的寄与はその表現としての周期に玉河数を乗じたものになる。小野氏によるトーラスの玉河数の公式はこの比が自然なものであることを裏付けており ((2.2) およびその後のコメントを参照)、また一般の簡約群の場合にも Labesse による “twisted space” を用いれば同様の解釈ができると思われる。

このようにLanglands以降の玉河数は上の意味で保型表現論の基盤の一角をなし、Arthur-Selberg 跡公式や保型形式の周期、志村多様体のゼータ函数などの考察には欠かせない。このノートの目的は玉河数の定義、および小野・Sansuc, Langlands, Lai, Kottwitz によるその決定を、わずかだが現代の視点からの更新を加えて概説することである。特に Langlands 以降の玉河数の計算方法については、跡公式の考察などに応用されていることを踏まえ、最も単純な $SL(2)$ とその内部形式の場合ではあるが、詳しい議論を紹介した。これにより一般の場合の結果及び証明についてもだいたいの想像はつくであろう。この原稿が日本で保型形式を研究されている、特に若い方々の一助となれば幸いである。

2 玉河測度と玉河数

F を代数体とし、$\mathbb{A}, \mathbb{A}^\times$ で F のアデール環およびイデール群を表す。$\mathbb{A}^\times$ 上のイデールノルムを $|\cdot|_\mathbb{A}$, その核を $\mathbb{A}^1$ と書く。F の素点 v での完備化を F_v と書き、そのモヂュラスを $|\cdot|_v$ と書く。さらに v が非アルキメデス的な場合には、F_v の極大コンパクト部分環を $\mathcal{O}_v$, その唯一の極大イデアルを $\mathfrak{p}_v$, 素元の一つを ϖ_v でそれぞれ表し、剰余体 $\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$ の位数を q_v と書く。アルキメデス素点での F の完備化たちの直積環を $F_\infty = \prod_{v|\infty} F_v$, 有限アデールたちのなす $\mathbb{A}$ の部分環を $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ で表す。F の代数閉包 $\bar{F}$ を固定して $\Gamma = \Gamma_F$ で絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を表す。同様に F_v の代数閉包 $\bar{F}_v$ と F 準同型 $\bar{F} \hookrightarrow \bar{F}_v$ を固定し、$\Gamma_v := \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ と書く。

体の Galois 拡大 K/L と $\mathrm{Gal}(K/L)$ 加群 A に対して、$\mathrm{H}^i(K/L, A)$ で $\mathrm{Gal}(K/L)$ の A 係数 i 次コホモロジー群 (Galois コホモロジー群) を表す。A が非可換でも $\mathrm{H}^i(K/L, A)$, $(i = 0, 1)$ は定義されていた。特に $K/L = \bar{F}/F$ の場合にはこれを $\mathrm{H}^i(F, A)$ と略記する [Ser79]。

複素数 z の実部と虚部をそれぞれ $\Re z, \Im z$ で表す。

2.1 加法群の場合

コンパクト位相群 $\mathbb{A}/F$ の非自明な指標 $\psi = \bigotimes_v \psi_v$ を固定し、各素点 v で ψ_v に関して自己双対な F_v 上の測度 dx_v を取る。つまり F_v 上の Schwartz-Bruhat 函数 f に対して Fourier 逆公式

$$f(x) = \int_{F_v} \left(\int_{F_v} f(z_v)\psi_v(y_v z_v)\, dz_v \right) \psi_v(-x y_v)\, dy_v$$

が成り立つ測度を取る。特に ψ_v の位数が 0 となる v では

$$\int_{\mathcal{O}_v} dx_v = 1$$

となるから、これらの積測度 $dx := \prod_v dx_v$ は $\mathbb{A}$ 上の定義可能な不変測度であり、これに関する $\mathbb{A}/F$ の測度は 1 となる[1]。

2.2 乗法群の場合

まず Dedekind ゼータ函数について思い出しておこう。F の (完全な) *Dedekind* **ゼータ函数** $\zeta_F(s)$ は局所ゼータ因子

$$\zeta_{F_v}(s) := \begin{cases} \Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2) & v\text{ が実のとき} \\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2\cdot(2\pi)^{-s}\Gamma(s) & v\text{ が複素のとき} \\ \dfrac{1}{1-q_v^{-s}} & v\text{ が非アルキメデスのとき} \end{cases}$$

の Euler 積で与えられていた[2]。この Euler 積は $\Re s > 1$ で絶対収束し、そこで定義された $\zeta_F(s)$ は全複素平面に有理型に解析接続される。同様に従来の Dedekind ゼータ函数 $\zeta_{F,\mathrm{fin}}(s) := \prod_{v\nmid\infty}\zeta_{F_v}(s)$ も全平面に有理型に解析接続され、$s=1$ で単極を持つ。そこでの留数は

$$\operatorname{Res}_{s=1}\zeta_{F,\mathrm{fin}}(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}h_F R_F}{|\Delta_F|^{1/2}|\boldsymbol{\mu}_\infty(F)|} \tag{2.1}$$

であることが知られている (例えば [Wei95, VII 章] を見よ)。ここで、r_1, r_2 はそれぞれ F の実、複素素点の個数であり、h_F は F の類数、R_F はレギュレータ、Δ_F は判別式を表す。また $\boldsymbol{\mu}_\infty(F)$ は F 内の 1 の巾根の群である。

さて、$\mathbb{G}_m$ 上の不変 1 形式 $\omega_{\mathbb{G}_m} := dx/x$ と上から $F_v^\times$ 上の不変測度 $|\omega_{\mathbb{G}_m}|_v = dx_v/|x_v|_v$ が定まる。ψ_v の位数が 0 である非アルキメデス的な v では

$$\int_{\mathcal{O}_v^\times}|\omega_{\mathbb{G}_m}|_v = \int_{\mathcal{O}_v\smallsetminus\mathfrak{p}_v} dx_v = 1-q_v^{-1} = \zeta_{F_v}(1)^{-1}$$

が成り立つから、それらの v についての積測度はイデール群 $\mathbb{A}^\times$ 上の Radon 測度にならない。この点を補正して $\mathbb{A}^\times$ 上の玉河測度を

$$dx^\times := \lim_{s\to1}\frac{1}{(s-1)\zeta_{F,\mathrm{fin}}(s)}\prod_v dx_v^\times,$$

$$dx_v^\times = \begin{cases} |\omega_{\mathbb{G}_m}|_v & v\text{ がアルキメデス的なとき} \\ \zeta_{F_v}(1)|\omega_{\mathbb{G}_m}|_v & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

[1] これは $F\subset\mathbb{A}$ が ψ に関する自己双対格子であることから明らかである。[Wei95, V.4 命題 7] には F の判別式 Δ_F, つまり $\mathfrak{o}$ の $\mathbb{Z}$ 基底とその双対基底との間の変換行列の行列式が現れているが、これは測度をその $\mathbb{Z}$ 基底から定めているためで、ψ 自己双対測度で計算すれば $|\Delta_F|^{1/2}$ は現れない。

[2] Tate の学位論文 [CF86, XV] や [Wei95] では $\pi\Gamma_{\mathbb{C}}(s)$ を複素素点でのガンマ因子としているが、現在では上の定義を用いる [Tat79, 3.1]。

と定める。

正実数の集合 $\mathbb{R}_+^\times$ を対角埋め込み $\mathbb{R}_+^\times \ni a \mapsto (a, a, \ldots, a) \in \prod_{v|\infty} F_v^\times = F_\infty^\times$ により $F_\infty^\times$ の部分群と見なし、イデールノルム $|\cdot|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_+^\times$ の核を $\mathbb{A}^1$ と書けば、直積分解 $\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{A}^1$ が成り立つ。同型

$$\mathbb{R}_+^\times \ni a \overset{\sim}{\longmapsto} \log|a|_{\mathbb{A}} = [F : \mathbb{Q}] \log a \in \mathbb{R}$$

による $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度の引き戻しを da と書き、$\mathbb{A}^1$ 上の不変測度 dx^1 で

$$dx^\times = da\, dx^1$$

が成り立つものを取る。このとき Tate の結果 [CF86, XV, 定理 4.3.2], [Wei95, V.4 命題 9][3]

$$\int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^1} \prod_v dx_v^\times = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} h_F R_F}{|\Delta_F|^{1/2} |\boldsymbol{\mu}_\infty(F)|}$$

と (2.1) から $\mathbb{G}_m$ の**玉河数**

$$\tau(\mathbb{G}_m) := \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^1} dx^1$$

は 1 である。

2.3 定義

以上の例は玉河測度、玉河数の定義を一般化するのに十分な示唆を与えている。その定義を述べよう。

G を F 上定義された連結簡約線型代数群とする。G 上の F 有理的な最大次数の G 不変微分形式 ω_G を固定すれば、上で止めた F_v 上の測度 dx_v と併せて、$G(F_v)$ 上の不変測度 $|\omega_G|_v$ が定まる。次に G の指標群 $X^*(G) := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m)$ には Γ が作用している。$V_G := X^*(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ 上の Γ の表現の *Artin* L **函数**

$$L_{\mathrm{fin}}(s, V_G) := \prod_{v \nmid \infty} L_v(s, V_G), \quad L_v(s, V_G) := \det(\mathbf{1} - q_v^{-s} \Phi_v | V_G^{I_{F_v}})^{-1}$$

を思い出す。ただし $\Phi_v \in \Gamma_v$ は**幾何的** *Frobenius* **元**、$I_{F_v} \subset \Gamma_v$ は**惰性群** *(inertia group)* を表す。このとき有限個を除くほとんど全ての非アルキメデス素点 v で

$$\int_{G(\mathcal{O}_v)} |\omega_G|_v$$

はある収束 Euler 積[4]の v 成分に $L_v(1, V_G)^{-1}$ をかけたものになる。特に $G(F_v)$ 上の不変測度を

$$dg_v := \begin{cases} |\omega_G|_v & v \text{ がアルキメデス的なとき}, \\ L_v(1, V_G) |\omega_G|_v & \text{それ以外のとき}. \end{cases}$$

[3] [Wei95] の不変測度は玉河測度の $|\Delta_F|^{1/2}$ 倍になっていることに注意。

[4] 補題 3.1 の例でもわかるように、G の準分裂内部形式上のスカラー値 Eisenstein 級数の定数項の分母が現れる。

と定めれば、積測度 $\prod_v dg_v$ は $G(\mathbb{A})$ 上の Radon 測度を与える。イデールノルムの積公式からこれは ω_G の取り方 ($F^\times$ 倍を除いて一意) に依存しない。G の F 階数 r は $X^*(G)$ 内の Γ 不変元の群 $X^*(G)_F$ の階数に等しく、従って $L_{\mathrm{fin}}(s, V_G)$ は $s=1$ で r 次の極を持つ。以上のもとで $G(\mathbb{A})$ 上の玉河測度を

$$dg := \frac{1}{\lim_{s\to 1}(s-1)^r L_{\mathrm{fin}}(s, V_G)} \prod_v dg_v$$

と定める。

A_G で G の中心 Z_G 内の極大 F 分裂トーラスを表す。定義から F 同型 $\mathbb{G}_m^r \xrightarrow{\sim} A_G$ があるが、それによる対角部分群 $(\mathbb{R}_+^\times)^r \subset (F_\infty^\times)^r$ の像を $\mathfrak{A}_G \subset A_G(F_\infty)$ と書く。$\mathfrak{a}_G := \mathrm{Hom}(X^*(G)_F, \mathbb{R})$ とおき、準同型 $H_G : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_G$ を

$$\langle \chi, H_G(g)\rangle = |\chi(g)|_{\mathbb{A}}, \quad \forall \chi \in X^*(G)_F$$

により定める。H_G の核を $G(\mathbb{A})^1$ と書けば、$G(F)$ は $G(\mathbb{A})^1$ の余測度有限な離散部分群になる。明らかに $H_G|_{\mathfrak{A}_G} : \mathfrak{A}_G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_G$ は同型であり、直積分解 $G(\mathbb{A}) = \mathfrak{A}_G \times G(\mathbb{A})^1$ が成り立つ。$\mathfrak{A}_G$ 上の測度 da を、$X^*(G)_F$ の双対格子 $\Lambda_G := \{H \in \mathfrak{a}_G \,|\, \langle \chi, H\rangle \in \mathbb{Z}, \forall \chi \in X^*(G)_F\}$ による商 $\mathfrak{a}_G/\Lambda_G$ の測度が 1 となる $\mathfrak{a}_G$ 上の Lebesgue 測度の H_G による引き戻しとする。$G(\mathbb{A})^1$ 上の測度 dg^1 を $dg = da\, dg^1$ なるものとして、G の**玉河数**を

$$\tau(G) := \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} f(g)\, dg^1$$

と定義する。

2.4 小野・Sansuc の結果と Weil の予想

小野孝氏はトーラスの玉河数の記述を用いて、一般の半単純線型代数群の玉河数を単連結代数群のそれに帰着した [小野 63]。ここではその結果の Sansuc による簡約線型代数群への拡張 [San81, §6] を紹介しよう。

トーラスの玉河数　まず F トーラス T に対して、その (Langlands) 双対トーラス $\widehat{T} := X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}/X^*(T)$ を導入する。定義から従う完全列 $0 \to X^*(T) \to \mathrm{Lie}\widehat{T} \overset{\exp}{\to} \widehat{T} \to 0$ の Galois コホモロジー群列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & X^*(T)^\Gamma \longrightarrow (\mathrm{Lie}\widehat{T})^\Gamma \longrightarrow \widehat{T}^\Gamma \\ \longrightarrow & \mathrm{H}^1(F, X^*(T)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathrm{Lie}\widehat{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma, \widehat{T}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

において $\mathrm{H}^1(\Gamma, \mathrm{Lie}\widehat{T}) = 0$ であるから、

$$\mathrm{H}^1(F, X^*(T)) \simeq \mathrm{cok}\big((\mathrm{Lie}\widehat{T})^\Gamma \to \widehat{T}^\Gamma\big) = \pi_0(\widehat{T}^\Gamma)$$

を得る。ただし $(\cdot)^\Gamma$ は Γ 不変な元たちのなす部分群、$\pi_0(\cdot)$ は連結成分の群をそれぞれ表す。T の (1 次の Galois コホモロジー群に対する) Shafarevich-Tate 群

$$Ш^1(T/F) := \ker\Big(\mathrm{H}^1(F,T) \to \mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})) \simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v,T)\Big)$$

を用意する。ここで $\bar{\mathbb{A}} := \mathbb{A} \otimes_F \bar{F}$ と書いた。これらを用いて小野氏のトーラスの玉河数に対する結果は

$$\tau(T) = \frac{|\pi_0(\widehat{T}^\Gamma)|}{|Ш^1(T/F)|} \tag{2.2}$$

と書ける。あるいは

$$\int_{(T(\bar{F})\backslash T(\bar{\mathbb{A}}))^\Gamma} dt = |\mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))|$$

としてもよい。すなわち**玉河測度についての** $(T(\bar{F})\backslash T(\bar{\mathbb{A}}))^\Gamma$ **上の定数函数** 1 **の** L^2 **ノルムは主** $T(\mathbb{A})/T(F)$ **等質空間の数に一致する**ということである。なおこれは右辺の量と $\tau(T)$ の函手性を比較して容易に証明できる [Mil86, I. 定理 9.11]。

z 拡大と玉河測度 G を F 上の連結簡約線型代数群とする。G_1 をその z **拡大**、すなわち中心拡大

$$1 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1 \tag{2.3}$$

であって

- 有限次拡大の族 E_i/F $(1 \le i \le r)$ があって、$Z_1 \simeq \prod_{i=1}^r \mathrm{Res}_{E_i/F}\mathbb{G}_m$, つまり Z_1 は**誘導トーラス** *(induced torus)* である。
- G_1 の導来群は G の導来群 G_{der} の単連結被覆 G_{sc} に一致する。

を満たすものとする[5]。(2.3) は $1 \to \mathfrak{A}_{Z_1} \to \mathfrak{A}_{G_1} \to \mathfrak{A}_G \to 1$ を与える。$\mathfrak{A}_\bullet$ はいずれもベクトル群であるから同型 $\mathfrak{A}_{G_1} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}_{Z_1} \times \mathfrak{A}_G$ が得られるが、これは玉河数の定義に用いた測度とは整合していない。実際、$\mathfrak{A}_G$ 上の測度は $X^*(G)_F$ の双対格子の余測度を 1 となるように選んでいたから、$c := [X^*(Z_1)_F \oplus X^*(G)_F : X^*(G_1)_F]$ として

$$da_{G_1} = c\, da_{Z_1}\, da_G \tag{2.4}$$

である。

ここで G の L 群 ${}^L G = \widehat{G} \rtimes_{\rho_G} W_F$ を導入する。すなわち $\widehat{G}$ は G と双対なルートデータを持つ連結簡約 $\mathbb{C}$ 代数群であり、$\rho_G : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\widehat{G})$ は G のルートデータへの Γ 作用と双対な作用を $\widehat{G}$ のそれに引き起こす Γ 作用で、$\widehat{G}$ のある分裂を保つものである [Bor79, I.2]。F 多様体 X の Picard 群を $\mathrm{Pic}(X)$ と書けば、Sansuc によるきわめて一般的な完全列 [San81, 系 6.11]

$$0 \longrightarrow X^*(G)_F \longrightarrow X^*(G_1)_F \longrightarrow X^*(Z_1)_F \longrightarrow \mathrm{Pic}(G) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G_1) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Z_1)$$

[5] 任意の連結簡約群に対して z 拡大が存在することは簡単に示せる [DMOS82, V. 定理 3.1], [Lan79, pp.228–229]。

がある。G が連結簡約 F 代数群の場合には函手的同型 $\mathrm{Pic}(G) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)$ がある [Kot84, (2.4.1)] ので、これは

$$X^*(G_1)_F \longrightarrow X^*(Z_1)_F \longrightarrow \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma) \longrightarrow \pi_0(Z(\widehat{G}_1)^\Gamma) \longrightarrow 0$$

を与える。また

$$\widehat{Z}_1^\Gamma \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^r \Big(\mathbb{C}[\Gamma/\Gamma_{E_i}]/\mathbb{Z}[\Gamma/\Gamma_{E_i}]\Big)^\Gamma$$

は連結であることを使った。これを使うと、上の指数は

$$\begin{aligned} c = |\mathrm{cok}(X^*(G_1)_F \to X^*(Z_1)_F)| &= |\ker(\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma) \twoheadrightarrow \pi_0(Z(\widehat{G}_1)^\Gamma))| \\ &= \frac{|\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)|}{|\pi_0(Z(\widehat{G}_1)^\Gamma)|} \end{aligned}$$

と書ける。

G_1 の定義の Galois コホモロジー列から得られる可換図式において、Shapiro の補題と Hilbert の定理 90 から

$$\mathrm{H}^1(F, Z_1) \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{H}^1(E_i, \mathbb{G}_m) = 0, \quad \mathrm{H}^1(F, Z_1(\bar{\mathbb{A}})) \simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, Z_1) = 0 \tag{$\sharp$}$$

であることに注意すれば、

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & Z_1(F) & \longrightarrow & G_1(F) & \longrightarrow & G(F) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & Z_1(\mathbb{A}) & \longrightarrow & G_1(\mathbb{A}) & \longrightarrow & G(\mathbb{A}) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

が得られる。特に (2.4) と併せて、$G_1(F)\mathfrak{A}_{G_1}\backslash G_1(\mathbb{A})$ 上の可積分函数 ϕ に対して

$$\int_{G_1(F)\backslash G_1(\mathbb{A})^1} \phi(g_1)\, dg_1^1 = \frac{|\pi_0(Z(\widehat{G}_1)^\Gamma)|}{|\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)|} \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \int_{Z_1(F)\backslash Z_1(\mathbb{A})^1} \phi(z\iota(g))\, dz^1\, dg^1 \tag{2.5}$$

が成り立つ。もちろん測度は玉河数の定義に用いたものであり、$\iota : G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1 \hookrightarrow G_1(F)\backslash G_1(\mathbb{A})^1$ は上の可換図式から与えられる切断である。また玉河測度の正規化定数 $\lim_{s\to 1}(s-1)^r L_{\mathrm{fin}}(s, \rho_G)$ が簡約群の完全列に対して乗法的であることを用いた。

単連結被覆への帰着 $D_{G_1} := G_1/G_{1,\mathrm{der}} = G_1/G_{\mathrm{sc}}$ として

$$1 \longrightarrow G_{\mathrm{sc}} \longrightarrow G_1 \xrightarrow{p} D_{G_1} \longrightarrow 1 \tag{Der_{G_1}}$$

を考える。非アルキメデス素点 v では Kneser の定理 [Kne65a], [Kne65b] より

$$1 \longrightarrow G_{\mathrm{sc}}(F_v) \longrightarrow G_1(F_v) \longrightarrow D_{G_1}(F_v) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc}}) = 1$$

が成り立つ。一方のアルキメデス素点では p は Lie 環の間の全射を与えるから、$p(G_1(F_v)) = D_{G_1}(F_v)_+$ である。($(\cdot)_+$ は F_v の位相から定まる位相についての単位元の連結成分を表す。) 特に $D_{G_1}(F) \subset D_{G_1}(F_\infty)$ が稠密であることと併せて、$D_{G_1}(F)p(G_1(F_\infty)) = D_{G_1}(F_\infty)$ である。非アルキメデス素点の状況も併せれば

$$D_{G_1}(F)p(G_1(\mathbb{A})) = D_{G_1}(\mathbb{A}) \tag{†}$$

がわかる。

次に $g \in G_1(\mathbb{A})$ が $p(g) \in D_{G_1}(F)$ を満たすとする。可換図式

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \longrightarrow & G_{\mathrm{sc}}(F) & \longrightarrow & G_1(F) & \xrightarrow{p} & D_{G_1}(F) & \xrightarrow{\partial_F} & \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}) & \longrightarrow & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A}) & \longrightarrow & G_1(\mathbb{A}) & \xrightarrow{p} & D_{G_1}(\mathbb{A}) & \xrightarrow{\partial_{\mathbb{A}}} & \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})) & \longrightarrow &
\end{array}$$

から、その $\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}})$ での像 $\partial_F p(g)$ は $\text{Ш}^1(G_{\mathrm{sc}}/F) := \ker[\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}) \to \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}))]$ に属する。しかし Kneser [Kne66], Chernousov [Che89] から $\text{Ш}^1(G_{\mathrm{sc}}/F)$ は消えているから、これは $p(g) \in p(G_1(F)$ を意味する。すなわち

$$p(G_1(F))\backslash p(G_1(\mathbb{A})) \longrightarrow D_{G_1}(F)\backslash D_{G_1}(\mathbb{A})$$

は単射である。これと (†) から $\varphi \in L^1(D_{G_1}(F)\mathfrak{A}_{G_1}\backslash D_{G_1}(\mathbb{A}))$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{G_1(F)\backslash G_1(\mathbb{A})^1} \varphi(p(g_1))\, dg_1^1 &= \int_{p(G_1(F))\backslash p(G_1(\mathbb{A})^1)} \varphi(t) \int_{G_{\mathrm{sc}}(F)\backslash G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})} dg_{\mathrm{sc}}\, dt^1 \\
&= \tau(G_{\mathrm{sc}}) \int_{D_{G_1}(F)\backslash D_{G_1}(F)p(G_1(\mathbb{A})^1)} \varphi(t)\, dt^1 \\
&= \tau(G_{\mathrm{sc}}) \int_{D_{G_1}(F)\backslash D_{G_1}(\mathbb{A})^1} \varphi(t)\, dt^1
\end{aligned} \tag{2.6}$$

(2.5), (2.6) を比較して次が得られる。

定理 2.1 ([San81] 定理 10.1). G を F 上定義された連結簡約線型代数群とし、その導来群の単連結被覆を G_{sc} と書くとき、

$$\tau(G) = \frac{|\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)|}{|\text{Ш}^1(G/F)|}\tau(G_{\mathrm{sc}}).$$

証明. $D_{G_1}(F)\mathfrak{A}_{G_1}\backslash D_{G_1}(\mathbb{A})$ の定数函数 1 を $1_{D_{G_1}}$ として、$1_{D_{G_1}} \circ p$ に対する (2.5), (2.6) を組み合わせれば、

$$\frac{|\pi_0(Z(\widehat{G}_1)^\Gamma)|}{|\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)|}\tau(G)\tau(Z_1) = \tau(G_{\mathrm{sc}})\tau(D_{G_1})$$

を得る。2.2 節で見たように $\tau(Z_1) = 1$ である。また G_1 の導来群 G_{sc} が単連結なことから $Z(\widehat{G}_1)$ は連結 (従ってトーラス) [今野 b, 補題 1.3] で、${}^L D_{G_1} = Z(\widehat{G}_1) \times_{\rho_{G_1}} W_F$ である。よって上は

$$\tau(G) = \frac{|\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)|\tau(D_{G_1})}{|\pi_0(Z(\widehat{G}_1)^\Gamma)|}\tau(G_{\mathrm{sc}}) = \frac{|\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)|}{|\text{Ш}^1(D_{G_1}/F)|}\tau(G_{\mathrm{sc}})$$

となる。ただしトーラス D_{G_1} に対する (2.2) を用いた。あとは G の Shafarevich-Tate 群が D_{G_1} のそれに同型なことを見ればよい。まず z 拡大の定義の Galois コホモロジーを取ると (♯) から可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Ш^1(G_1/F) \arrow[r] \arrow[d] & Ш^1(G/F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F, G_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F, G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^2(F, Z_1) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F, G_1(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] & \mathrm{H}^2(F, Z_1(\bar{\mathbb{A}}))
\end{tikzcd}$$

が得られる。ただし Brauer 群の Hasse 原理から $Ш^2(Z_1/F) := \ker[\mathrm{H}^2(F, Z_1) \to \mathrm{H}^2(F, Z_1(\bar{\mathbb{A}}))] = 0$ であることを使った。これから $Ш^1(G/F) \simeq Ш^1(G_1/F)$ である。次に (Der_{G_1}) から

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & Ш^1(G_1/F) \arrow[r] \arrow[d] & Ш^1(D_{G_1}/F) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F, G_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F, D_{G_1}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F, G_1(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F, D_{G_1}(\bar{\mathbb{A}}))
\end{tikzcd}$$

だから、$Ш^1(G_1/F) \hookrightarrow Ш^1(D_{G_1}/F)$ は単射である。実はこれが全射になることも示せて主張が従うのであるが、その証明は Tate・中山双対性を用いるのでここでは省略する。 □

こうして玉河数の決定は次の予想に帰着された。

予想 2.2 (Weil). 半単純単連結な線型代数群 G に対して $\tau(G) = 1$.

3 $SL(2, \mathbb{A})$ の上の玉河測度

このノートの残りでは上の予想の Langlands, Lai, Kottwitz による解決の概略を、最もシンプルな $SL(2)$ とその内部形式の場合に解説する。まず G が F 上準分裂な (F 有理的な Borel 部分群をもつ) 場合の Langlands, Lai による証明を紹介しよう。

3.1 記号と設定

3から6節では G として F の整数環 (極大整環) 上の Chevalley 群 $SL(2)$ を考える。$B = T_0U$ を

$$T_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{G}_m \right\}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{G}_a \right\}$$

で与えられる G の Borel 部分群とする。G は *Bruhat* **分解**

$$G = B \sqcup BwU, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

を持つ。$G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群 $\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{K}_v$ を

$$\mathbf{K}_v := \begin{cases} SO(2,\mathbb{R}) & v \text{ が実のとき} \\ SU(2,\mathbb{R}) & v \text{ が複素のとき} \\ G(\mathcal{O}_v) & v \text{ が非アルキメデスのとき} \end{cases}$$

と定めれば、**岩澤分解** $G(\mathbb{A}) = B(\mathbb{A})\mathbf{K}$ が成り立つ。

3.2 玉河測度

ここでは $G = SL(2)$ の玉河数の計算に必要な、種々の部分群の玉河測度および玉河数を計算する。

U 上の F 上定義された不変1形式 $\omega_U(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)) = dx$ を取れば、上の dx_v と併せて $U(F_v)$ 上の不変測度 $du_v = |\omega_U|_v$ が定まる。つまり du_v は dx_v を同型

$$F_v \ni x_v \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(F_v)$$

で持っていった測度である。これを使って $U(\mathbb{A})$ 上の玉河測度 $du = \prod_v du_v$ が定まり、$\mathrm{meas}(U(F)\backslash U(\mathbb{A})) = 1$ が成り立つ (2.1 節)。

同様に $T_0(\mathbb{A})$ 上にも $\mathbb{A}^\times$ 上の玉河測度を同型 $\mathbb{G}_m \ni a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \in T_0$ で持っていった玉河測度 dt を取る。イデール群の場合と同様に準同型 $H : T_0(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}$ を

$$H\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right) := \log |a|_{\mathbb{A}}, \quad a \in \mathbb{A}^\times$$

と定め、その核を $T_0(\mathbb{A})^1$ と書く。$\mathbb{R}_+^\times \subset F_\infty^\times$ に対応する $T_0(F_\infty)$ の部分群を $\mathfrak{A}$ と書けば、直積分解 $T_0(\mathbb{A}) = \mathfrak{A} \times T_0(\mathbb{A})^1$ が成り立つ。同型 $H : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ による $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度の引き戻しを da と書き、$T_0(\mathbb{A})^1$ 上の不変測度 dt^1 で

$$dt = da\, dt^1$$

が成り立つものを取る。2.2 節で見たように $\tau(T_0) = 1$ である。

$SL(2)$ **上の玉河測度**　最後に G 上の不変 3 次微分形式

$$\omega_G(g) = \frac{da}{a} \wedge db \wedge dc, \quad g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

を取れば、各素点 v で上と同様に $G(F_v)$ 上の不変測度 $dg_v = |\omega_G|_v$ が定まる。次の補題から $G(\mathbb{A})$ 上の玉河測度 $dg := \prod_v dg_v$ は定義可能である。

補題 3.1. ψ_v の位数が 0 であるような非アルキメデス素点では

$$\int_{\mathbf{K}_v} dg_v = \zeta_{F_v}(2)^{-1}$$

が成り立つ。

証明. 一般にこのような極大コンパクト部分群の測度を計算するには $\mathrm{meas}\mathbf{K}_v = |G(\mathbb{F}_{q_v})| \cdot \mathrm{meas}K(\mathfrak{p}_v)$ を用いればよい。ここで

$$K(\mathfrak{p}_v) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(F_v) \;\middle|\; \begin{matrix} a, d \in 1 + \mathfrak{p}_v \\ b, c \in \mathfrak{p}_v \end{matrix} \right\}$$

はレベル $\mathfrak{p}_v$ の主合同部分群である。Bruhat 分解 (3.1) は剰余体 $\mathbb{F}_q$ 上でも成立するから

$$|G(\mathbb{F}_{q_v})| = |B(\mathbb{F}_{q_v})| \cdot (1 + |U(\mathbb{F}_{q_v})|) = q_v(q_v^2 - 1)$$

がわかる。一方、同相写像

$$(1 + \mathfrak{p}_v) \times \mathfrak{p}_v \times \mathfrak{p}_v \ni (a, b, c) \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in K(\mathfrak{p}_v)$$

と $|\omega_G|_v$ の定義から

$$\mathrm{meas}K(\mathfrak{p}_v) = \frac{1 - q_v^{-1}}{q_v - 1} q_v^{-2} = q_v^{-3}.$$

これらから補題を得る。 □

4　Eisenstein 級数の復習

　F の各素点 v で全測度が 1 となる $\mathbf{K}_v$ 上の不変測度 dk_v を取り、$dk := \prod_v dk_v$ とおく。任意の v で $c_{G,v} \in \mathbb{R}_+^\times$ があって、岩澤分解の積分公式

$$\int_{G(F_v)} f_v(g_v)\, dg_v = c_{G,v} \int_{\mathbf{K}_v} \int_{T_0(F_v)} \int_{U(F_v)} f(u_v t_v k_v)\, du_v\, \delta_B(t_v)^{-1}\, dt_v\, dk_v, \quad f_v \in C_c(G(F_v))$$

が成り立つ。ただし $t_v = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{smallmatrix}\right)$ に対して $\delta_B(t_v) := |a|_v^2$ と書いた。ψ_v の位数が 0 である非アルキメデス素点 v では、$\mathbf{K}_v$ の特性函数 $1_{\mathbf{K}_v}$ を代入して $c_{G,v} = \zeta_{F_v}(2)$ がわかる。特に $c'_G = \prod_v c_{G,v}$ は絶対収束しており、$c_G := c'_G \cdot \mathrm{Res}_{s=1}\zeta_{F,\mathrm{fin}}(s)$ として積分公式

$$\int_{G(\mathbb{A})} f(g)\,dg = c_G \int_{\mathbf{K}} \int_{T_0(\mathbb{A})} \int_{U(\mathbb{A})} f(utk)\,du\,\delta_B(t)^{-1}\,dt\,dk, \quad f \in C_c(G(\mathbb{A})) \tag{4.1}$$

が成り立つ。ここでも $\delta_B(t) := |a|_{\mathbb{A}}^2$, $(t = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{smallmatrix}\right))$ と書いた。岩澤分解を使って準同型 $H : T_0(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}$ を

$$H_B : G(\mathbb{A}) \ni utk \longmapsto H(t) \in \mathbb{R}$$

と延ばしておく。

4.1 誘導表現の Paley-Wiener 切断

我々の目的には一番簡単なスカラー値の Eisenstein 級数を考えれば十分である。これは $s \in \mathbb{C}$ に対する (大域) **主系列表現**

$$I(s,g)\phi(x) := \phi(xg), \quad g \in G(\mathbb{A}),\ \phi \in V_s,$$

$$V_s := \left\{ \phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(i) } \phi \text{ は可測函数} \\ \text{(ii) } \phi(utk) = e^{(s+1)H(t)}\phi(k), \\ \quad (u \in U(\mathbb{A}), t \in T_0(\mathbb{A}), k \in \mathbf{K}) \\ \text{(iii) } \|\phi\|^2 := \int_{\mathbf{K}} |\phi(k)|^2\,dk < \infty \end{array} \right\}$$

から構成される。これは (iii) のノルムに関する Banach 空間上の連続表現であるが、今後の構成には次の稠密部分空間が必要である。$\mathbf{K}_\infty = \prod_{v|\infty} \mathbf{K}_v$ の既約表現の同型類の有限集合 $\mathfrak{F}_\infty$ と開コンパクト部分群 $K \subset \mathbf{K}_{\mathrm{fin}} := \prod_{v\nmid\infty} \mathbf{K}_v$ の対 $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_\infty, K)$ を **$\mathbf{K}$ タイプの有限族**と呼ぼう。函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ で

(i) $\phi(utk) = e^{(s+1)H(a)}\phi(k)$, $(u \in U(\mathbb{A}), t \in T_0(\mathbb{A}), k \in \mathbf{K})$;

(ii) 任意の $g \in G(\mathbb{A})$ に対して $\mathbf{K}_\infty \ni k \mapsto \phi(gk) \in \mathbb{C}$ は $\mathfrak{F}_\infty$ の元の行列成分の線型結合。同様に $\phi(gk) = \phi(g)$, $(k \in K)$.

を満たすものの空間を $\mathcal{V}_s^{\mathfrak{F}}$ と書けばこれは有限次元で、

$$\mathcal{V}_s := \bigcup_{\mathfrak{F}} \mathcal{V}_s^{\mathfrak{F}} \subset V_s, \quad (\mathfrak{F} \text{ は } \mathbf{K} \text{ タイプの有限族を走る。})$$

は V_s に付随する $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 加群である。ただし実 Lie 群 $G(F_\infty)$ の Lie 環の複素化を $\mathfrak{g}_\infty$ と書いている。$\mathcal{V}_s$ の元の $\mathbf{K}$ への制限の空間は $s \in \mathbb{C}$ によらないことに注意する。

さてベクトル束 $\mathcal{V}_s^{\mathfrak{F}} \to s \in \mathbb{C}$ の Paley-Wiener 切断の空間を $\mathscr{P}^{\mathfrak{F}}$ と書く。正確に言えば、$\mathscr{P}^{\mathfrak{F}}$ は函数 $\phi : \mathbb{C} \ni s \mapsto \phi(s) \in \mathcal{V}_s$ であって任意の $g \in U(\mathbb{A})T_0(\mathbb{A})^1\mathbf{K}$ に対して

$$\mathbb{C} \ni s \longmapsto \phi(s,g) \in \mathbb{C}$$

の Fourier 変換

$$\widehat{\phi}(ag) := \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda_0+i\mathbb{R}} \phi(s, ag)\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda_0+i\mathbb{R}} \phi(s, g)e^{(s+1)H(a)}\, ds$$

が $a \in \mathfrak{A}_G$ の函数として滑らかでコンパクト台を持つようなものたちの空間である。ここで ds は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を $\mathbb{R} \ni x \stackrel{\sim}{\mapsto} \lambda_0 + ix \in \lambda_0 + i\mathbb{R}$ で持っていった測度を表す。特に $ds/2\pi$ は 2.2 節で固定した $\mathfrak{A}$ 上の測度の双対測度になっているから、Fourier 逆公式

$$\phi(s, g) := \int_{\mathfrak{A}} \widehat{\phi}(ag)e^{-(s+1)H(a)}\, da \tag{4.2}$$

が成り立つ。

4.2 Eisenstein 擬級数

G は 2 次元縦ベクトルの空間 V に左から作用している。$V_{\mathbb{A}} := V \otimes_F \mathbb{A}$ 内の原始的な元 $\vec{v} \in GL(2, \mathbb{A})V$ の**標準高さ函数** $\|\vec{v}\|_{\mathbb{A}} := \prod_v \|\vec{v}\|_v$ を

$$\left\|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\|_v := \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} & v \text{ が実のとき} \\ a\bar{a} + b\bar{b} & v \text{ が複素のとき} \\ \sup(|a|_v, |b|_v) & v \text{ が非アルキメデスのとき} \end{cases}$$

と定める。$g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)k$, $(x \in \mathbb{A}, a \in \mathbb{A}^\times, k \in \mathbf{K})$ と岩澤分解したとき

$$\left\|g^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} a^{-1} & \\ & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = |a|_{\mathbb{A}}^{-1} = e^{-H(\left(\begin{smallmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{smallmatrix}\right))} = e^{-H_B(g)}$$

だから $H_B(g) := -\log\|g^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\|$ である。特に $\gamma \in G(F) \smallsetminus B(F)$ を $\gamma = bw\nu$, $(b \in B(F)$, $\nu = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\xi \in F)$ と Bruhat 分解すれば

$$\begin{aligned} e^{-H_B(\gamma g)} &= \left\|g^{-1}\gamma^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|g^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| \\ &= \left\|\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -(x+\xi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = |a|_{\mathbb{A}}\left\|\begin{pmatrix} -\frac{x+\xi}{a^2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\|. \end{aligned} \tag{4.3}$$

さて、$\phi \in \mathscr{P} := \bigcup_{\mathfrak{F}} \mathscr{P}^{\mathfrak{F}}$ に対して

$$\theta_\phi(g) := \sum_{\gamma \in B(F)\backslash G(F)} \widehat{\phi}(\gamma g)$$

とおく。$H_B(\mathrm{supp}\widehat{\phi})$ のコンパクト性から $C > 0$ があって、$\widehat{\phi}(x) \neq 0$ なら $e^{-H_B(x)} < C$ である。特に $\gamma \in G(F) \smallsetminus B(F)$, $g \in G(\mathbb{A})$ を上のように分解すれば (4.3) から

$$|\{\gamma \in G(F) \smallsetminus B(F) \mid \widehat{\phi}(\gamma g) \neq 0\}| \leq \left|\left\{\xi \in F \;\middle|\; \left\|\begin{pmatrix} \frac{x+\xi}{a^2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\| < C|a|_{\mathbb{A}}^{-1}\right\}\right|.$$

すなわち θ_ϕ の定義式の右辺の和は g について広義一様に有限和である。ゆえにこれを *Eisenstein* **擬級数**と呼ぶ。特に θ_ϕ は $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の二乗可積分函数である。

4.3 Eisenstein 級数

$\phi \in \mathscr{P}$ と $s \in \mathbb{C}$ に対して *Eisenstein* **級数**

$$E(\phi(s), g) := \sum_{\gamma \in B(F)\backslash G(F)} \phi(s, \gamma g), \quad g \in G(\mathbb{A})$$

が定まる。これは $\Re s > 1$ で絶対収束して全複素平面上の有理型函数に延びることが知られている ([GJ79] 参照)。定義から $\lambda_0 > 1$ では

$$\theta_\phi(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_0 + i\mathbb{R}} E(\phi(s), g)\, ds \tag{4.4}$$

が成り立つことに注意する。

$G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の局所可積分函数 f に対して

$$f_B(g) := \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} f(ug)\, du$$

を B に沿っての**定数項**という。f として Eisenstein 級数を取ると $\Re s > 1$ では、

$$\begin{aligned} E(\phi(s))_B(g) &= \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \sum_{\gamma \in B(F)\backslash G(F)} \phi(s, \gamma u g)\, du \\ &\overset{(3.1)}{=} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \Big(\phi(ug) + \sum_{\nu \in U(F)} \phi(s, w^{-1} \nu u g) \Big)\, du \\ &= \phi(s, g) + M(s)\phi(s, g) \end{aligned} \tag{4.5}$$

が成り立つ。但し、

$$M(s)\phi(s, g) := \int_{U(\mathbb{A})} \phi(s, w^{-1} u g)\, du, \quad (\Re s > 1)$$

と書いた。これも $\Re s > 1$ で絶対収束して $\mathbb{C}$ 上の有理型函数に延びる。この大域絡作用素を解析するためには、その局所類似を調べる必要がある。

5 絡作用素の計算

5.1 局所絡作用素の定義

F の素点 v で $s \in \mathbb{C}$ に対する (一般) 主系列表現 $(I_v(s), \mathcal{V}_{v,s})$

$$\mathcal{V}_{v,s} := \left\{ \begin{array}{c} \phi_v : G(F_v) \to \mathbb{C} \\ \text{滑らか} \end{array} \middle| \begin{array}{ll} \text{(i)} & \phi_v(utk) = e^{(s+1)H(t)} \phi_v(k), \\ & u \in U(F_v), t \in T_0(F_v), k \in \mathbf{K} \\ \text{(ii)} & \phi_v \text{ は右 } \mathbf{K}_v \text{ 有限} \end{array} \right\}$$

$$I_v(s, g)\phi_v(x) := \big(R(g)\phi_v\big)(x), \quad g \in \begin{cases} U(\mathfrak{g}_v) \times \mathbf{K}_v & v \text{ がアルキメデス的なとき} \\ G(F_v) & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

を考える。ただし G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ としてアルキメデス的な v に対して $\mathfrak{g}_v := \mathfrak{g}(F_v) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の普遍包絡環を $U(\mathfrak{g}_v)$ と書いている。また R は右移動作用を表す。局所絡作用素 $M_v(s)$ を

$$M_v(s)\phi_v(g) := \int_{U(F_v)} \phi_v(w^{-1}ug)\,du, \quad \phi_v \in \mathcal{V}_{v,s}$$

により定義する。この右辺の積分は $\Re s > 0$ で絶対収束し、そこで定義された $M_v(s)\phi_v(g)$ は全 $\mathbb{C}$ 上の有理型函数に延びることが知られている。またその極以外ではこれは $G(F_v)$ 準同型 (アルキメデス的な v では $(\mathfrak{g}_v, \mathbf{K}_v)$ 準同型)

$$M_v(s) : I_v(s) \longrightarrow I_v(-s)$$

を定める。

絡作用素の Euler 積展開　$\mathcal{V}_{v,s}$ にはクラス 1 ベクトル

$$\phi^0_{v,s}(utk) := e^{(s+1)H(t)}, \quad u \in U(F_v), t \in T_0(F_v), k \in \mathbf{K}_v$$

が含まれている。これに関する $\mathcal{V}_{v,s}$ たちの制限テンソル積

$$\bigotimes_v \mathcal{V}_{v,s} := \mathrm{span}\Big\{ \bigotimes_{v\in S} \phi_v \otimes \bigotimes_{v\notin S} \phi^0_{v,s} \,\Big|\, \phi_v \in \mathcal{V}_{v,s},\ S \text{ は素点の有限集合} \Big\}$$

は自然に $G(\mathbb{A})$ 加群 (正確には $(\mathfrak{g}_\infty, \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_f)$ 加群) になる。このとき

$$\textstyle\prod_v : \bigotimes_v \mathcal{V}_{v,s} \ni \bigotimes_v \phi_v \longmapsto \prod_v \phi_v \in \mathcal{V}_s$$

は $G(\mathbb{A})$ 加群の同型で、図式

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_v \mathcal{V}_{v,s} \arrow[r, "\bigotimes_v M_v(s)"] \arrow[d, "\Pi_v"] & \bigotimes_v \mathcal{V}_{v,-s} \arrow[d, "\Pi_v"] \\
\mathcal{V}_s \arrow[r, "M(s)"] & \mathcal{V}_{-s}
\end{tikzcd} \tag{5.1}$$

は可換である。

5.2　局所絡作用素の計算

図式 (5.1) から絡作用素の計算は局所絡作用素のそれに帰着される。特に我々の目的には $M_v(s)\phi^0_{v,s}(1)$ の $s=1$ での値がわかれば十分である。これを不分岐な素点と分岐素点の場合に分けて計算しよう。

補題 5.1 (Gindikin-Karepelevich 公式). 玉河測度を決めるときに固定した ψ_v の位数が 0 である非アルキメデス素点 v では

$$M_v(s)\phi^0_{v,s}(1) = \frac{\zeta_{F_v}(s)}{\zeta_{F_v}(s+1)}$$

が成り立つ。

証明. $M_v(s)$ の定義積分が収束する $\Re s > 1$ で示せば十分である。

$$M_v(s)\phi^0_{v,s}(1) = \int_{U(F_v)} \phi^0_{v,s}(w^{-1}u)\,du = \int_{F_v} \phi^0_{v,s}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x_v \end{pmatrix}\right) dx_v$$

$x_v \notin \mathcal{O}_v$ のとき岩澤分解 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x_v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x_v^{-1} & -1 \\ 0 & x_v \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x_v^{-1} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ が成り立つことに注意して

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{O}_v} \phi^0_{v,s}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x_v \end{pmatrix}\right) dx_v + \int_{F_v \smallsetminus \mathcal{O}_v} \phi^0_{v,s}\left(\begin{pmatrix} x_v^{-1} & -1 \\ 0 & x_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_v^{-1} & 1 \end{pmatrix}\right) dx_v \\
&= \int_{\mathcal{O}_v} 1\,dx_v + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varpi_v^{-n}\mathcal{O}_v^\times} q_v^{-(s+1)n}\,dx_v = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q_v^n(1-q_v^{-1})q_v^{-(s+1)n} \\
&= \frac{1-q_v^{-s-1}}{1-q_v^{-s}} = \frac{\zeta_{F_v}(s)}{\zeta_{F_v}(s+1)}
\end{aligned}$$

$\square$

次に S を F の素点の有限集合で

- 全てのアルキメデス素点
- ψ_v の位数が 0 でない非アルキメデス素点

を全て含むものとし、

$$M_S(s) := \bigotimes_{v\in S} M_v(s), \quad \phi_S := \bigotimes_{v\in S} \phi_v, \quad \zeta_{F,S}(s) := \prod_{v\in S} \zeta_{F,v}(s), \quad \zeta_F^S(s) := \frac{\zeta_F(s)}{\zeta_{F,S}(s)}$$

などと書く。

命題 5.2. $M_S(1)\phi^0_{S,1}(1) = c_G \dfrac{\zeta_{F,S}(1)\zeta_F^S(2)}{\mathrm{Res}_{s=1}\,\zeta_{F,\mathrm{fin}}(s)}$.

証明. $F_S := \prod_{v\in S} F_v$, $\mathbb{A}^S := \{(x_v)_v \in \mathbb{A} \mid x_v = 0, \forall v \in S\}$ と書き、直積分解 $G(\mathbb{A}) = G(F_S) \times G(\mathbb{A}^S)$ における $g \in G(\mathbb{A})$ の $G(F_S)$ 成分を g_S, $G(\mathbb{A}^S)$ 成分を g^S と書く。$h = \bigotimes_{v\in S} h_v \in C_c(U(F_S) \times T_0(F_S))$ に対して

$$f(utk) := \begin{cases} h(u_S, t_S) & (ut)^S \in \mathbf{K}^S \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

とおけば、(4.1) から

$$\begin{aligned}
\int_{G(\mathbb{A})} f(g)\,dg &= c_G \int_{\mathbf{K}} \int_{T_0(\mathbb{A})} \int_{U(\mathbb{A})} f(utk)\,du\,\delta_B(t)^{-1}\,dt\,dk \\
&= \frac{c_G}{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_{F,\mathrm{fin}}(s)} \int_{\mathbf{K}} \int_{T_0(\mathbb{A})} \int_{U(\mathbb{A})} f(utk) \textstyle\prod_v du_v\,\delta_B(t)^{-1} \prod_v dt_v\,dk \qquad (5.2) \\
&= \frac{c_G}{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_{F,\mathrm{fin}}(s)} \int_{T_0(F_S)} \int_{U(F_S)} h(u_S, t_S)\,du_S \delta_B(t_S)^{-1}\,dt_S.
\end{aligned}$$

一方、dg_v の定義から三角形分解の積分公式

$$\int_{G(F_v)} \varphi_v(g_v)\,dg_v = \int_{\bar{U}(F_v)} \int_{T_0(F_v)} \int_{U(F_v)} \varphi_v(u_v t_v \bar{u}_v)\,du_v\,\delta_B(t_v)^{-1}\,|\omega_{T_0}|_v\,d\bar{u}_v$$

が成り立つ。$g_v \in G(F_v)$ の岩澤分解を $g_v = u(g_v)t(g_v)k(g_v)$, ($u(g_v) \in U(F_v)$, $t(g_v) \in T_0(F_v)$, $k(g_v) \in \mathbf{K}_v$, 各成分は一意ではない) と書けば、f の定義から

$$\int_{G(\mathbb{A})} f(g)\,dg = \prod_{v \in S} \int_{G(F_v)} h(u(g_v), t(g_v))\,dg_v \prod_{v \notin S} \int_{\mathbf{K}_v} dg_v$$

$g_v = u_v t_v \bar{u}_v$ の岩澤分解は $g_v = u_v \mathrm{Ad}(t_v)u(\bar{u}_v) \cdot t_v t(\bar{u}_v)k(\bar{u}_v)$ だから、上の積分公式と補題 3.1 から

$$\begin{aligned} &= \int_{\bar{U}(F_S)} \int_{T_0(F_S)} \int_{U(F_S)} h(u_S \mathrm{Ad}(t_S)u(\bar{u}_S), t_S t(\bar{u}_S))\,du_S \\ &\qquad \times \delta_B(t_S)^{-1}\,|\omega_{T_0}|_S\,d\bar{u}_S \zeta_F^S(2)^{-1} \end{aligned}$$

$u_S := u_S \mathrm{Ad}(t_S)u(\bar{u}_S)$, $t_S := t_S t(\bar{u}_S)$ と置き直して

$$= \int_{\bar{U}(F_S)} \int_{T_0(F_S)} \int_{U(F_S)} h(u_S, t_S)\,du_S\,\delta_B(t_S)^{-1}\delta_B(t(\bar{u}_S))\,|\omega_{T_0}|_S\,d\bar{u}_S \zeta_F^S(2)^{-1}$$

dt_v の定義から

$$= \frac{1}{\zeta_{F,S}(1)\zeta_F^S(2)} \int_{\bar{U}(F_S)} \int_{T_0(F_S)} \int_{U(F_S)} h(u_S, t_S)\,du_S\,\delta_B(t_S)^{-1}\,dt_S\,\delta_B(t(\bar{u_S}))\,d\bar{u}_S$$

これと (5.2) を比較すれば

$$\begin{aligned} &\int_{\bar{U}(F_S)} \Big(\int_{T_0(F_S)} \int_{U(F_S)} h(u_S, t_S)\,du_S\,\delta_B(t_S)^{-1}\,dt_S \Big)\,\delta_B(t(\bar{u}_S))\,d\bar{u}_S \\ &\qquad = c_G \frac{\zeta_F^S(2)\zeta_{F,S}(1)}{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_{F,\mathrm{fin}}(s)} \Big(\int_{T_0(F_S)} \int_{U(F_S)} h(u_S, t_S)\,du_S\,\delta_B(t_S)^{-1}\,dt_S \Big) \end{aligned} \tag{5.3}$$

を得る。さて定義から

$$\begin{aligned} (M_v(1)\phi_{v,1}^0)(1) &= \int_{U(F_v)} \phi_{v,1}^0(w^{-1}u_v w)\,du_v = \int_{\bar{U}(F_v)} \phi_{v,1}^0(u(\bar{u}_v)t(\bar{u}_v)k(\bar{u}_v))\,d\bar{u}_v \\ &= \int_{\bar{U}(F_v)} \delta_B(t(\bar{u}_v))\,d\bar{u}_v \end{aligned}$$

である。ゆえに

$$\int_{T_0(F_S)} \int_{U(F_S)} h(u_S, t_S)\,du_S\,\delta_B(t_S)^{-1}\,dt_S\,\delta_B(t(\bar{u}_S))\,d\bar{u}_S = 1$$

となる h を取れば、(5.3) から

$$M_S(1)\phi_{S,1}^0(1) = c_G \frac{\zeta_{F,S}(1)\zeta_F^S(2)}{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_{F,\mathrm{fin}}(s)}$$

が従う。 □

6　単位表現の重複度と玉河数

6.1　Eisenstein 擬級数の Petersson 内積

4 節の状況に戻って、$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ のスペクトル分解からいくつかの事実を思い出しておこう。詳細については [GJ79, §§3–5] を参照されたい。θ_ϕ, $(\phi \in \mathscr{P})$ たちで張られる $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ の閉部分空間を $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_{[T_0,\mathbf{1}]}$ と書く。$\lambda_0 > 1$ とすれば $\theta_\phi, \theta_{\phi'}$ の L^2 (Petersson) 内積は

$$
\begin{aligned}
\langle \theta_\phi, \theta_{\phi'} \rangle &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \theta_\phi(g) \sum_{\gamma \in B(F)\backslash G(F)} \overline{\widehat{\phi'}(\gamma g)}\, dg = \int_{B(F)\backslash G(\mathbb{A})} \theta_\phi(g)\overline{\widehat{\phi'}(g)}\, dg \\
&= \int_{U(\mathbb{A})T_0(F)\backslash G(\mathbb{A})} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \theta_\phi(ug)\, du\, \overline{\widehat{\phi'}(g)}\, dg \\
&\overset{(4.1)}{=} c_G \int_{\mathbf{K}} \int_{T_0(F)\backslash T_0(\mathbb{A})^1} \int_{\mathfrak{A}} \theta_{\phi,B}(atk)\overline{\widehat{\phi'}(atk)}\delta_B(a)^{-1}\, da\, dt\, dk.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

で与えられる。さらに $\lambda_0, \mu_0 > 1$ を取れば、(4.4) から上の内側の積分は

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathfrak{A}} \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_0+i\mathbb{R}} E(\phi(\lambda))_B(atk)\, d\lambda\, \frac{1}{2\pi} \int_{\mu_0+i\mathbb{R}} \overline{\phi'(\mu, atk)}\, d\mu\, \delta_B(a)^{-1}\, da \\
&\overset{(4.5)}{=} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathfrak{A}} \int_{\lambda_0+i\mathfrak{a}^*} \big(\phi(\lambda, atk) + M(\lambda)\phi(\lambda, atk)\big)\, d\lambda \\
&\qquad\qquad \times \int_{\mu_0+i\mathfrak{a}^*} \overline{\phi'(\mu, atk)}\, d\mu\, \delta_B(a)^{-1}\, da \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathfrak{A}} \int_{\lambda_0+i\mathfrak{a}^*} \int_{-\lambda_0+i\mathfrak{a}^*} \phi(\lambda, atk)\overline{\phi(\mu, atk)}\, d\lambda\, d\mu\, \delta_B(a)^{-1}\, da \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathfrak{A}} \int_{\lambda_0+i\mathfrak{a}^*} \int_{\lambda_0+i\mathfrak{a}^*} M(\lambda)\phi(\lambda, atk)\overline{\phi'(\mu, atk)}\, d\lambda\, d\mu\, \delta_B(a)^{-1}\, da.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

と書ける。$s := (\lambda+\mu)/2 \in i\mathbb{R}, \nu := \lambda - \mu$ とおけば、この右辺の第一項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathfrak{A}} \int_{i\mathbb{R}} \int_{2\lambda_0+i\mathbb{R}} \phi(s+\frac{\nu}{2}, tk)e^{(s+\frac{\nu}{2}+1)H(a)}\overline{\phi'(s-\frac{\nu}{2}, tk)e^{(\bar{s}-\frac{\bar{\nu}}{2}+1)H(a)}}\, d\nu\, ds\, e^{-2H(a)}\, da \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{i\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{A}} \int_{2\lambda_0+i\mathbb{R}} \phi(s+\frac{\nu}{2}, tk)\overline{\phi'(s-\frac{\nu}{2}, tk)}e^{\Im\nu H(a)}\, d\nu\, da\, ds
\end{aligned}
$$

$\Im\nu = \nu - 2\lambda_0$ を ν とおきなおして (4.2) を使えば

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{i\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{A}} \int_{i\mathbb{R}} \phi(s+\lambda_0+\frac{\nu}{2}, tk)\overline{\phi'(s-\lambda_0-\frac{\nu}{2}, tk)}e^{\nu H(a)}\, d\nu\, da\, ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{i\mathbb{R}} \phi(s+\lambda_0, tk)\overline{\phi'(s-\lambda_0, tk)}\, ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_0+i\mathbb{R}} \phi(s, tk)\overline{\phi'(-\bar{s}, tk)}\, ds.
\end{aligned}
$$

となる。第二項も $s=(\lambda-\mu)/2,\ \nu=\lambda+\mu$ とおいて同様に計算すれば

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathfrak{A}}\int_{i\mathbb{R}}\int_{2\lambda_0+i\mathbb{R}} M(s+\frac{\nu}{2})\phi(s+\frac{\nu}{2},tk)e^{(1-s-\frac{\nu}{2})H(a)} \\
&\qquad\qquad\qquad\times\overline{\phi'(\frac{\nu}{2}-s;tk)}e^{(\frac{\bar{\nu}}{2}-\bar{s}+1)H(a)}\,d\nu e^{-2H(a)}\,da\,ds \\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{i\mathbb{R}}\int_{\mathfrak{A}}\int_{2\lambda_0+i\mathbb{R}} M(s+\frac{\nu}{2})\phi(s+\frac{\nu}{2},tk)\overline{\phi'(\frac{\nu}{2}-s;tk)}e^{-\Im\nu H(a)}\,d\nu\,da\,ds \\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{i\mathbb{R}}\int_{\mathfrak{A}}\int_{i\mathbb{R}} M(s+\lambda_0+\frac{\nu}{2})\phi(s+\lambda_0+\frac{\nu}{2},tk)\overline{\phi'(\frac{\nu}{2}+\lambda_0-s;tk)}e^{-\nu H(a)}\,d\nu\,da\,ds \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{\lambda_0+i\mathbb{R}} M(s)\phi(s,tk)\overline{\phi'(\bar{s},tk)}\,ds
\end{aligned}$$

となる。これらを組み込んだ (6.2) を (6.1) に代入すれば、

$$\langle\theta_\phi,\theta_{\phi'}\rangle=\frac{c_G}{2\pi}\int_{\lambda_0+i\mathbb{R}}\left(\langle\phi(s),\phi'(-\bar{s})\rangle+\langle M(s)\phi(s),\phi'(\bar{s})\rangle\right)\,ds \tag{6.3}$$

が得られる。ただし、$\varphi\in\mathcal{V}_s,\ \varphi'\in\mathcal{V}_{-\bar{s}}$ に対して

$$\langle\varphi,\varphi'\rangle:=\int_{\mathbf{K}}\int_{T_0(F)\backslash T_0(\mathbb{A})^1}\varphi(tk)\overline{\varphi'(tk)}\,dt\,dk$$

と書いている。

(6.3) の右辺の式を $G(\mathbb{A})$ 不変にするためには積分路を $\lambda_0+i\mathbb{R}$ から $i\mathbb{R}$ へ移す必要がある。被積分函数の第一項は至るところ正則で Paley-Wiener 函数の積であるから、積分路の移動は Cauchy の積分定理から正当化される。他方の第二項は補題 5.1 から (有理型函数の等式)

$$M(s)\phi(s)=\frac{\zeta_F^S(s)}{\zeta_F^S(s+1)}\bigotimes_{v\in S}M_v(s)\phi_v(s)\otimes\bigotimes_{v\notin S}\phi_{v,s}^0$$

であるから、$s=1$ で単極を持つことがわかる。Dedekind ゼータ函数が虚軸の近くでは $\log(\Im s)$ の多項式のオーダーを持つことと合わせて、第二項にも留数定理が適用できることがわかる。結局、(6.3) は

$$\begin{aligned}
\langle\theta_\phi,\theta_{\phi'}\rangle=\frac{c_G}{2\pi}\int_{i\mathbb{R}}&\left(\langle\phi(s),\phi'(-\bar{s})\rangle+\langle M(s)\phi(s),\phi'(\bar{s})\rangle\right)\,ds \\
&+c_G\cdot\mathrm{Res}_{s=1}\langle M(s)\phi(s),\phi'(\bar{s})\rangle
\end{aligned}\tag{6.4}$$

となる。ここで $\mathrm{Res}_{s=1}(\cdot)$ は $(\cdot)$ の $s=1$ での留数を表す。

よく知られているように $M_v(1):I_v(1)\to I_v(-1)$ の像は単位表現 $\mathbf{1}_{G(F_v)}$ であるから、(6.4) は $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_{[T_0,\mathbf{1}]}$ が連続スペクトルと定数 (保型) 函数の空間 $\mathbb{C}\cdot\mathbf{1}_{G(\mathbb{A})}$ の直和であることを示している。$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))_{[T_0,\mathbf{1}]}$ から $\mathbb{C}\cdot\mathbf{1}_{G(\mathbb{A})}$ への直交射影を $\mathrm{pr}_{\mathbf{1}}$ と書こう。

6.2 玉河数の計算

以上の構成で $\mathfrak{F}$ が $\mathbf{K}$ の単位表現 $\mathbf{1}_{\mathbf{K}}$ のみからなる、すなわち $\mathfrak{F} = (\mathbf{1}_{\mathbf{K}_\infty}, \mathbf{K}_{\mathrm{fin}})$ の場合を考える。

補題 6.1. $\phi \in \mathscr{P}^{\mathbf{1}_{\mathbf{K}}}$ に対して $\langle \theta_\phi, \mathbf{1}_{G(\mathbb{A})} \rangle = c_G \cdot \tau(T_0)\phi(1,1)$.

証明. 前節 (6.1) と同様にして

$$\begin{aligned}\langle \theta_\phi, \mathbf{1}_{G(\mathbb{A})} \rangle =& c_G \int_{\mathbf{K}} \int_{T_0(F)\backslash T_0(\mathbb{A})^1} \int_{\mathfrak{A}} \widehat{\phi}(at^1 k) e^{-2H(a)}\, da\, dt^1\, dk \\ \overset{(4.2)}{=}& c_G \int_{\mathbf{K}} \int_{T_0(F)\backslash T_0(\mathbb{A})^1} \phi(1, t^1 k)\, dt^1\, dk\end{aligned}$$

ϕ は右 $\mathbf{K}$ 不変ゆえ、$\mathcal{V}_s^{\mathfrak{F}}$ の定義の (i) から

$$= c_G \tau(T_0)\phi(1,1).$$

□

今や $\tau(G)$ の決定は容易である。

系 6.2. $\tau(G) = \tau(T_0) = 1$.

証明. $\phi, \phi' \in \mathscr{P}^{\mathbf{1}_{\mathbf{K}}}$ とする。このとき (6.4) の第二項を補題 5.1, 命題 5.2 を用いて計算すると

$$\begin{aligned}c_G \cdot \mathrm{Res}_{s=1} \langle M(s)\phi(s), \phi'(\bar{s}) \rangle =& c_G \cdot \mathrm{Res}_{s=1} \left\langle M_S(s)\phi_S(s) \otimes \bigotimes_{v \notin S} \frac{\zeta_F^v(s)}{\zeta_F^v(s+1)} \phi_{v,s}^0, \phi'(\bar{s}) \right\rangle \\ =& c_G \frac{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_F^S(s)}{\zeta_F^S(2)} \left\langle M_S(1)\phi_S(1) \otimes \bigotimes_{v \notin S} \phi_{v,1}^0, \phi'(1) \right\rangle \\ =& c_G \frac{\zeta_{F,S}(1)\zeta_F^S(2)}{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_{F,\mathrm{fin}}(s)} \frac{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_F^S(s)}{\zeta_F^S(2)} \langle \phi(1), \phi'(1) \rangle = c_G \langle \phi(1), \phi'(1) \rangle \\ =& c_G \int_{\mathbf{K}} \int_{T_0(F)\backslash T_0(\mathbb{A})^1} \phi(1, t^1 k) \overline{\phi'(1, t^1 k)}\, dt^1\, dk \\ =& c_G \tau(T_0) \phi(1,1) \overline{\phi'(1,1)}.\end{aligned}$$

他方でこれは $\mathrm{pr}_{\mathbf{1}}\theta_\phi$ と $\mathrm{pr}_{\mathbf{1}}\theta_{\phi'}$ の内積でもある。$\tau(G)^{-1/2}\mathbf{1}_{G(\mathbb{A})}$ が $\mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_{G(\mathbb{A})}$ の正規直交基底であることを使えば、これは補題 6.1 から

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{pr}_{\mathbf{1}}\theta_\phi, \mathrm{pr}_{\mathbf{1}}\theta_{\phi'} \rangle =& \langle \theta_\phi, \tau(G)^{-1/2}\mathbf{1}_{G(\mathbb{A})} \rangle \langle \tau(G)^{-1/2}\mathbf{1}_{G(\mathbb{A})}, \theta_{\phi'} \rangle \\ =& \tau(G)^{-1} c_G^2 \cdot \tau(T_0)^2 \phi(1,1) \overline{\phi'(1,1)}\end{aligned}$$

とも書ける。これらを比較して系を得る。 □

7 $SU(2)$ の玉河測度

D を F 上の四元数体の一つとし、その被約ノルムを ν_D と書く。以下では $SL(2)$ の内部形式

$$G(R) := \{g \in D \otimes_F R \,|\, \nu_D(g) = 1\}, \quad R\text{は可換}\,F\,\text{代数}$$

の玉河数を考える。有限個を除く素点 v では、$D_v := D \otimes_F F_v$ は行列環 $\mathbb{M}_2(F_v)$ に同型でこの同型で被約ノルムは行列式に移されるから、$G(F_v) \simeq SL(2, F_v)$ である。このような同型が成り立たない素点を D の**分岐素点**といい、その集合を S_D と書く。以下、この G と区別するため $G^* := SL(2)_F$ と書く。

G は 3.2 節の $SL(2)$ の場合のような都合のいい部分群を持たないので、その上の不変 3 次微分形式を取るには一工夫必要である。二次拡大 E/F で任意の $v \in S_D$ で $E_v := E \otimes_F F_v$ も F_v の二次拡大になっているものを取れば、E 代数の同型 $\eta : D \otimes_F E \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_2(E)$ がある。これが定める E 同型

$$\eta : G_E \xrightarrow[E]{\sim} G^*_E$$

による、3.2 節の G^* 上の不変 3 次微分形式 ω_{G^*} の引き戻し $\eta^*\omega_{G^*}$ は、G 上の不変 3 次微分形式だが F 有理的とは限らない。ところで G 上の不変 3 次微分形式は定数倍を除いて一意であるから、E/F の Galois 群の生成元 σ に対して $\sigma(\eta^*\omega_{G^*}) = \lambda_\sigma \cdot \eta^*\omega_{G^*}$ となる $\lambda_\sigma \in E^\times$ がある。Hilbert の定理 90 から $\mathrm{H}^1(E/F, E^\times) = 0$ だから、ある $\mu \in E^\times$ があって $\mathrm{Gal}(E/F)$ 上の 1 コサイクル $\{\lambda_1 = 1, \lambda_\sigma\}$ は $\lambda_\sigma = \mu\sigma(\mu)^{-1}$ と書ける。換言すれば $\omega_G := \mu \cdot \eta^*\omega_{G^*}$ は G 上の F 有理的不変 3 次微分形式である。この ω_G から、$G(F_v)$ 上の不変測度 $|\omega_G|_v$ および $G(\mathbb{A})$ 上の玉河測度

$$dg := \prod_v |\omega_G|_v$$

が定まる。$\mathbb{A}_E^\times$ のイデールノルムの積公式から、$|\omega_G|_v$ の代わりに

$$dg_v := |\mu|_{E_v}^{-3/2} |\omega_G|_v,$$

(ただし $|\cdot|_{E_v}$ は $E_v := E \otimes_F F_v$ のモヂュラスを表す) を用いても、$dg = \prod_v dg_v$ が成り立つ。以下の計算にはこちらの局所測度を用いることにする。

8 Selberg 跡公式

上の玉河測度の項でも注意したように G は F 有理的な真放物型部分群を持たないので、Eisenstein 級数を用いて放物型部分群の玉河数に帰着する計算法は使えない。そこで G の Selberg 跡公式と G^* のそれを比較することで、玉河数を得ることになる。まずは Selberg 跡公式を思い出そう。

$S_D \ni v$ では $\mathbf{K}_v = G(F_v)$ 自身がコンパクトである。それ以外の素点では $G_v \simeq G_v^*$ なので 3.1 で止めた極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}_v \subset G(F_v)$ を取る。各素点 v での *Hecke* **環** $\mathcal{H}(G(F_v))$ を、$G(F_v)$ 上の滑らか (非アルキメデス的な場合は局所定数) でコンパクト台を持つ両側

$\mathbf{K}_v$ 有限な函数たちのなす畳み込み代数と定める。S_D に属さない非アルキメデス素点 v で $\mathcal{H}(G(F_v))$ は $\mathbf{K}_v$ の特性函数 $1_{\mathbf{K}_v}$ を含むから、それらに関する制限テンソル積

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{A})) = \bigotimes_v \mathcal{H}(G(F_v)) := \varinjlim_S \bigotimes_{v\in S} \mathcal{H}(G(F_v)) \otimes \bigotimes_{v\notin S} \mathbb{C}\cdot 1_{\mathbf{K}_v}$$

として $G(\mathbb{A})$ の *Hecke* **環**が定まる。

$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ 上の $G(\mathbb{A})$ の右正則表現

$$R(g)\phi(x) = \phi(xg), \quad g \in G(\mathbb{A}),\ \phi \in L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$$

を考える。$f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ はこの表現に

$$\begin{aligned} R(f)\phi(x) &:= \int_{G(\mathbb{A})} f(y)\phi(xy)\,dy = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\gamma\in G(F)} f(x^{-1}\gamma y)\phi(\gamma y)\,dy \\ &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} K_f(x,y)\phi(y)\,dy \end{aligned}$$

と積分作用素として作用し、その積分核は

$$K_f(x,y) = \sum_{\gamma\in G(F)} f(x^{-1}\gamma y)$$

で与えられる。$G(F) \subset G(\mathbb{A})$ は離散部分群で f の台はコンパクトだからこの和は実際には広義一様有限和で、特に K_f は $(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))^2$ 上の滑らかな函数である。

$G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ はコンパクトだから K_f は $(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))^2$ 上で二乗可積分、すなわち $R(f)$ は *Hilbert-Schmidt* **作用素**である。特に $R(f)$ はコンパクト作用素である。$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ 内には単位元での Dirac 超函数を近似する函数列が取れるから、$(R, L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})))$ は $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現の (Hilbert) 直和に分解し、既約ユニタリ表現 π の各同型類の R での重複度 $m(\pi)$ は有限である [Lan76, 補題 3.2]。

他方で楕円型微分作用素の解の存在を用いて、$f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ は

$$f = \sum_{i=1}^r g_i * h_i, \quad g_i, h_i \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$$

と書ける [DL71, I.1.11]。すると

$$\begin{aligned} R(f)\phi(x) &= \sum_{i=1}^r \bigl(R(g_i)R(h_i)\phi\bigr)(x) \\ &= \sum_{i=1}^r \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} K_{g_i}(x,z) \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} K_{h_i}(z,y)\phi(y)\,dy\,dz \\ &= \sum_{i=1}^r \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} K_{g_i}(x,z)K_{h_i}(z,y)\,dz\,\phi(y)\,dy \end{aligned}$$

ゆえ

$$K_f(x,y)=\sum_{i=1}^{r}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}K_{g_i}(x,z)K_{h_i}(z,y)\,dz$$

である。特に Cauchy の不等式を使って

$$\begin{aligned}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}|K_f(x,x)|\,dx &\le \sum_{i=1}^{r}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}|K_{g_i}(x,y)K_{h_i}(y,x)|\,dy\,dx\\ &\le \sum_{i=1}^{r}\|K_{g_i}\|\cdot\|K_{h_i}\|<\infty\end{aligned}$$

がわかる。($\|\cdot\|$ は $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ の L^2 ノルムを表す。) 結局、$R(f)$ は**跡族** *(trace class)* 作用素で

$$\mathrm{tr}R(f)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}K_f(g,g)\,dg \tag{8.1}$$

が成り立つ。

さて、$G(F)$ 内の正則共役類 (この場合は中心 $Z(F)=\{\pm1\}$ を除く任意の共役類) たちの集合を $\mathit{\Gamma}(G(F))$ と書く。$\gamma\in G(F)$ の共役類を $\gamma^{G(F)}$, γ の G での中心化群を G_γ と書く。

$$G_\gamma(F)\backslash G(F)\ni G_\gamma(F)\delta \overset{\sim}{\longmapsto} \delta^{-1}\gamma\delta =: \gamma^\delta\in\gamma^{G(F)}$$

は全単射だから、(8.1) の右辺は

$$\begin{aligned}&\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}\sum_{\zeta=\pm1}f(\zeta)+\sum_{\gamma^{G(F)}\in\mathit{\Gamma}(G(F))}\sum_{\delta\in G_\gamma(F)\backslash G(F)}f(g^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta g)\,dg\\ &=\sum_{\zeta=\pm1}\tau(G)f(\zeta)+\sum_{\gamma^{G(F)}\in\mathit{\Gamma}(G(F))}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}\sum_{\delta\in G_\gamma(F)\backslash G(F)}f(g^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta g)\,dg\\ &=\sum_{\zeta=\pm1}\tau(G)f(\zeta)+\sum_{\gamma^{G(F)}\in\mathit{\Gamma}(G(F))}\int_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}\int_{G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A})}f(g^{-1}\gamma g)\,dt\,\frac{dg}{dt}\\ &=\sum_{\zeta=\pm1}\tau(G)f(\zeta)+\sum_{\gamma^{G(F)}\in\mathit{\Gamma}(G(F))}\tau(G_\gamma)O_\gamma(f)\end{aligned}$$

となる。和は g についての広義一様有限和、$G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ はコンパクトであったから、和と積分の順序を入れ替えてよいことに注意する。ここで

$$O_\gamma(f):=\int_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}f(g^{-1}\gamma g)\,\frac{dg}{dt}$$

は f の γ での**軌道積分** *(orbital integral)* である。こうして G の *Selberg* **跡公式**

$$\sum_{\zeta=\pm1}\tau(G)f(\zeta)+\sum_{\gamma^{G(F)}\in\mathit{\Gamma}(G(F))}\tau(G_\gamma)O_\gamma(f)=\sum_{\pi\in\Pi(G(\mathbb{A}))}m(\pi)\mathrm{tr}\pi(f) \tag{8.2}$$

が得られた。ただし $\Pi(G(\mathbb{A}))$ は $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現の同型類の集合を表す。

9　跡公式の前安定化

上の跡公式において $\gamma^{G(F)} \in \mathit{\Gamma}(G(F))$ の特性多項式の定める二次拡大を E とすれば $G_\gamma \simeq U_{E/F}(1)$ だから、小野の公式 (2.2) と二次拡大のノルムの Hasse 原理から

$$\tau(G_\gamma) = |\pi_0(\widehat{G}_\gamma^\Gamma)| = 2$$

がわかる。よって (8.2) を $G^* = SL(2)_F$ の (Duflo-Labesse, Jacquet-Langlands の) 跡公式と比較できれば、$\tau(G)$ と $\tau(G^*)$ の比較が可能である。しかし、この比較には少なくとも次の二つの困難が伴う。

(i) G^* の跡公式は (8.2) に比べてはるかに複雑である。上の右辺に対応する側 (**幾何サイド**) も $\{\pm 1\} \cup \mathit{\Gamma}(G(F))$ に対応する楕円的な共役類以外に双曲、放物共役類に付随する煩雑な項を含む。

(ii) そもそも比較の基盤となる $G(F)$ と $G^*(F)$ の共役類の間の関係が存在しない。

このうち (i) については跡公式を適用するテスト函数を巧妙に選ぶことにより、煩雑な項を消すことで対応できる (10.2 節を参照)。ここではより基本的で重大な問題 (ii) を考えよう。

9.1　安定共役

F の代数閉包 $\bar{F}$ を固定していた。$\gamma, \gamma' \in G(F)$ が**安定共役** *(stably conjugate)* とは、それらが $G(\bar{F})$ 内で共役なこととする。$\mathit{\Gamma}^{\mathrm{st}}(G(F))$ で $G(F)$ の正則元の安定共役類の集合を表す。$\gamma \in G(F)$ の安定共役類を γ^G と書けば、明らかに $\gamma^{G(F)} \subset \gamma^G$ である。この二つの集合の差を記述しよう。

$\gamma \in G(F)$ を正則な元とし、$T := G_\gamma$ と書く。これは G の極大トーラスになる。さて $\gamma' \in \gamma^G$ ならば定義から $\gamma' = \gamma^\delta$, $\exists \delta \in G(\bar{F})$ と書ける。Γ 上の 1 コサイクル $\{\delta\sigma(\delta)^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma}$ は

$$\mathrm{Ad}(\delta\sigma(\delta)^{-1})^{-1}\gamma = \mathrm{Ad}(\delta)^{-1} \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}(\delta)\gamma = \mathrm{Ad}(\delta)^{-1}\gamma' = \gamma$$

から $T(\bar{F})$ に値を持つ。これから明らかにそのクラスは

$$\mathfrak{D}^G(T/F) := \ker[\mathrm{H}^1(F,T) \to \mathrm{H}^1(F,G)]$$

に属する。ただし $\mathrm{H}^1(F,G)$ は群ではなく**原点付き集合** *(pointed set)* だから、$\ker[\mathrm{H}^1(F,T) \to \mathrm{H}^1(F,G)]$ はその原点の逆像のことである。

補題 9.1. $\{\gamma^G$ 内の共役類$\} \ni (\gamma^\delta)^{G(F)} \stackrel{\sim}{\mapsto} \{\delta\sigma(\delta)^{-1}\}$ のクラス $\in \mathfrak{D}^G(T/F)$ は全単射。

証明. γ^δ をその $G(F)$ 共役元で取り替えても δ に右から $G(F)$ の元がかかるだけだから、補題の写像は定義可能。$\partial\delta = \{\delta^{-1}\sigma(\delta)\}$ のクラスの他の元は δ を $T(\bar{F})\delta$ の元で置き換えて得られるから、上の写像は単射でもある。全射性は $\mathfrak{D}^G(T/F)$ の定義から明らか。　□

さて、これを用いて問題点 (ii) を正確に述べることができる。$\gamma \in G^*(F)$ が**楕円正則** *(elliptic regular)* とは、その特性多項式が $F[X]$ で既約なこととする。$G^*(F)$ 内の楕円正則元の共役類の集合を $\varGamma_{\mathrm{ell}}(G^*(F))$, 楕円正則元の安定共役類、つまり $G^*(\bar{F})$ 共役類の集合を $\varGamma^{\mathrm{st}}_{\mathrm{ell}}(G^*(F))$ と書く。$\varGamma^{\mathrm{st}}(G(F))$, $\varGamma^{\mathrm{st}}_{\mathrm{ell}}(G^*(F))$ はともに $X^2 - aX + 1$ の形の F 係数既約多項式 (特性多項式) で分類されるから、これらの間には標準的な全単射がある。それを

$$\varGamma^{\mathrm{st}}(G(F)) \ni \gamma^G \longleftrightarrow \gamma_*^{G^*} \in \varGamma^{\mathrm{st}}_{\mathrm{ell}}(G^*(F))$$

と書くことにする。

例 9.2. 大域体ではないが、$F = \mathbb{R}$ で $G = SU(2)$, $G^* = SL(2)$ の場合を考える。Hamilton の四元数体を $\mathbb{H}$ と書くとき、完全列

$$1 \longrightarrow SU(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{H}^\times \xrightarrow{\nu_{\mathbb{H}}} \mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, SU(2)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \mathbb{H}^\times) = 1$$
$$1 \longrightarrow SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(2,\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, SL(2)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, GL(2)) = 1$$

が成り立つ。$\det(GL(2,\mathbb{R})) = \mathbb{R}^\times$ だから $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, SL(2)) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, GL(2))$ は消えるが、$\nu_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}^\times_+$ であるから、$|\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, SU(2))| = 2$ である。この場合には $T \simeq U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(1)$ しかなく、$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, T) \simeq \mathbb{R}^\times/\mathrm{N}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。基本トーラス T に対して $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, T) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G)$ は全射であることが知られているから [Kot86]、結局

$$\mathfrak{D}^G(T/\mathbb{R}) = 1, \quad \mathfrak{D}^{G^*}(T^*/\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となって $G(\mathbb{R})$ と $G^*(\mathbb{R})$ の楕円正則共役類の間には全単射はない。

この例から G と G^* の跡公式を比較するためには、まずそれらを $\varGamma(G(F))$ の代わりに $\varGamma^{\mathrm{st}}(G(F))$ を用いて記述しなくてはならない。すなわち**跡公式の安定化** *(stabilization)* が必要である。

9.2 前安定化

まず $\gamma_1^G = \gamma^G$ ならば $G_{\gamma_1} \simeq_F G_\gamma$ だから、$\tau(G_{\gamma_1}) = \tau(G_\gamma)$ である。ゆえに (8.2) は

$$\sum_{\zeta=\pm 1} \tau(G) f(\zeta) + \sum_{\gamma_1^G \in \varGamma^{\mathrm{st}}(G(F))} \tau(T) \sum_{\gamma^{G(F)} \subset \gamma_1^G} O_\gamma(f) = \sum_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))} m(\pi) \mathrm{tr}\pi(f) \qquad (9.1)$$

と書ける。ただし $T := G_{\gamma_1}$ と書いている。問題はこの内側の和が Euler 積展開を持たないことである。これは上の和が $\mathfrak{D}^G(T/F) \subset \mathrm{H}^1(F, T)$ を走っているところを

$$\mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, T)$$

上の和で差し替えられれば解決する。

一般の場合には $\mathfrak{D}^G(T/F)$ が $\mathrm{H}^1(F, T)$ の部分群でないことなどから回りくどい構成が必要だが、現在の状況では次のような単純化が可能である。

(i) $\mathrm{H}^1(F,T) \to \mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}}))$ は単射である。実際、$T \simeq U_{E/F}(1)$ (E は γ_1 の特性多項式の分解体) だから、これは $F^\times/\mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \to \bigoplus_v F_v^\times/\mathrm{N}_{E_v/F_v}(E_v^\times)$ の単射性 (二次拡大のノルムの Hasse 原理) そのものである。

(ii) $1 \to T(\bar{F}) \to T(\bar{\mathbb{A}}) \to T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}) \to 1$ の与える完全列

$$\longrightarrow \mathrm{H}^1(F,T) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})) \xrightarrow{\iota} \mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F,T) \longrightarrow$$

において、$\mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}}))/\mathrm{im}\mathrm{H}^1(F,T) = \mathbb{A}^\times/F^\times\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。また自然なペアリング $X^*(T) \times T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}) \to \bar{A}^\times/\bar{F}^\times$ から定まる Tate・中山双対性

$$\mathrm{H}^i(F,X^*(T)) \times \mathrm{H}^{2-i}(F,T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F,\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

から $\mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})) \simeq \mathrm{H}^1(F,X^*(T))^D \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ でもあるから、

$$\iota : \mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}}))/\mathrm{im}\mathrm{H}^1(F,T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))$$

は同型である。

(iii) $\mathfrak{D}^G(T/\mathbb{A}) := \ker[\mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})) \to \mathrm{H}^1(F,G(\bar{\mathbb{A}}))]$ とおけば、$\text{Ш}^1(G/F) = 1$ [Kne66] から

$$\mathfrak{D}^G(T/\mathbb{A}) \cap \mathrm{H}^1(F,T) = \ker[\mathrm{H}^1(F,T) \to \mathrm{H}^1(F,G) \to \mathrm{H}^1(F,G(\bar{\mathbb{A}}))] = \mathfrak{D}^G(T/F)$$

である。

(ii), (iii) から $\delta \in \mathfrak{D}^G(T/\mathbb{A})$ に対して

$$\frac{1}{2}\sum_{\kappa\in\mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^D} \langle\kappa,\delta\rangle = \begin{cases} 1 & \delta \in \mathfrak{D}^G(T/F) \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

が成り立つ。これを使えば (9.1) の $\gamma_1^G \in \mathit{\Gamma}^{\mathrm{st}}(G(F))$ の項は

$$\tau(T)\sum_{\delta\in\mathfrak{D}^G(T/F)} O_{\gamma_1^\delta}(f) = \frac{\tau(T)}{2}\sum_{\delta\in\mathfrak{D}^G(T/\mathbb{A})}\sum_{\kappa\in\mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^D} \langle\kappa,\delta\rangle O_{\gamma^\delta}(f)$$

$\tau(T) = 2$ で $\mathfrak{D}^G(T/\mathbb{A}) \simeq \bigoplus_v \mathfrak{D}^G(T/F_v)$ なので

$$= \sum_{\kappa\in\mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^D}\ \sum_{(\delta_v)\in\bigoplus_v \mathfrak{D}^G(T/F_v)}\ \prod_v \langle\kappa,\delta_v\rangle O_{\gamma^{\delta_v}}(f_v)$$

と書ける。ここでほとんど全ての有限素点 v で

(i) $G_v \simeq G_v^*$ で f_v は $\mathbf{K}_v$ の特性函数である。

(ii) γ_1 の特性多項式 $\Phi_{\gamma_1}(X)$ は $\mathcal{O}_v[X]$ に属し、$\Phi_{\gamma_1}(X) \mod \mathfrak{p}_v$ は重根を持たない。

が成り立つが、そのような v では $\gamma_1^{G_v} \cap \mathbf{K}_v = \gamma_1^{\mathbf{K}_v}$ であることが容易に確かめられる。これから上の $\bigoplus_v \mathfrak{D}^G(T/F_v)$ は $\prod_v \mathfrak{D}^G(T/F_v)$ で置き換えられる。

$$\tau(T) \sum_{\delta \in \mathfrak{D}^G(T/F)} O_{\gamma_1^\delta}(f) = \sum_{\kappa \in \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^D} \prod_v \sum_{\delta_v \in \mathfrak{D}^G(T/F_v)} \langle \kappa, \delta_v \rangle O_{\gamma^{\delta_v}}(f_v)$$

$\mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^D = \{1, \mathbf{s}\}$ と書いて、

$$\begin{aligned} &= \prod_v \sum_{\delta_v \in \mathfrak{D}^G(T/F_v)} O_{\gamma^{\delta_v}}(f_v) + \prod_v \sum_{\delta_v \in \mathfrak{D}^G(T/F_v)} \langle \mathbf{s}, \delta_v \rangle O_{\gamma^{\delta_v}}(f_v) \\ &= SO_{\gamma_1}(f) + \prod_v \sum_{\delta_v \in \mathfrak{D}^G(T/F_v)} \langle \mathbf{s}, \delta_v \rangle O_{\gamma^{\delta_v}}(f_v). \end{aligned}$$

ここで

$$SO_{\gamma_1}(f) := \prod_v SO_{\gamma_1}(f_v), \quad SO_{\gamma_1}(f_v) := \sum_{\gamma_v^{G(F_v)} \subset \gamma_1^{G_v}} O_{\gamma_v}(f_v)$$

は γ_1 での**安定軌道積分** *(stable orbital integral)* である。こうして次が得られた。

命題 9.3. $f = \bigotimes_v f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{\zeta = \pm 1} \tau(G) f(\zeta) + \sum_{\gamma_1^G \in \Gamma^{\mathrm{st}}(G(F))} \Big(SO_{\gamma_1}(f) + \prod_v \sum_{\delta_v \in \mathfrak{D}^G(T/F_v)} \langle \mathbf{s}, \delta_v \rangle O_{\gamma_1^{\delta_v}}(f_v) \Big) \\ = \sum_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))} m(\pi) \mathrm{tr}\pi(f). \end{aligned}$$

10 跡公式の比較と玉河数

10.1 G^* の Selberg 跡公式

G^* の (Arthur, Duflo-Labesse, Jacquet-Langlands による) 跡公式は複雑で証明も長いから、このノートでは結果のみを引用することにする ([GJ79] を参照)。もちろん $G^*(\mathbb{A})$ の種々の部分群上の積分では玉河測度を用い、$i\mathbb{R} \simeq \mathfrak{a}^D$ 上には 4.1 節で固定した測度 $ds/2\pi$ を取っている。

命題 10.1 (G^* の跡公式). $f^* = \bigotimes_v f_v^* \in \mathcal{H}(G^*(\mathbb{A}))$ に対して Schwartz 超函数

$$J_{\mathrm{geom}}(f^*) = \sum_{\zeta = \pm 1} \tau(G^*) f^*(\zeta) + \sum_{\gamma_*^{G^*(F)} \in \Gamma_{\mathrm{ell}}(G^*(F))} \tau(G^*_{\gamma_*}) O_{\gamma_*}(f^*) \tag{10.1}$$

$$+ \mathrm{Res}_{s=1} \zeta_F(s) \sum_{\gamma \in T_0(F)_{G\text{-reg}}} \sum_v J_{T_0}(\gamma, f_v^*) \prod_{v' \neq v} J_G(\gamma, f_{v'}^*) \tag{10.2}$$

$$+ c_0 \Big(\sum_{\zeta = \pm 1} \sum_{\xi \in F^\times / F^{\times 2}} \int_{U(\mathbb{A})\{\pm 1\} \backslash G^*(\mathbb{A})} f^*\Big(\zeta g^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \Big) e^{\langle -2s\rho_B, H_B(g) \rangle} \frac{dg}{du} \Big)_{s=0}, \tag{10.3}$$

$$
\begin{aligned}
J_{\mathrm{spec}}(f^*) = &\sum_{\pi\in\Pi(G^*(\mathbb{A}))} m_0(\pi)\mathrm{tr}\pi(f^*) + \mathbf{1}_{G^*(\mathbb{A})}(f^*) && (10.4)\\
&+ \frac{1}{4\pi}\sum_{\chi\in\Pi(\mathbb{A}^\times/\mathbb{R}_+^\times F^\times)} \int_{i\mathbb{R}} J_{T_0}(\chi_{v,s}, f_v^*, \psi_{F_v}) \prod_{v'\neq v} J_G(\chi_{v',s}, f_{v'})\, ds && (10.5)\\
&- \frac{1}{4\pi}\sum_{\chi\in\Pi(\mathbb{A}^\times/\mathbb{R}_+^\times F^\times)} \int_{i\mathbb{R}} \frac{r'(w,\chi_s)}{r(w,\chi_s)} \mathrm{tr}\mathcal{I}_B^{G^*}(\chi_s, f^*)\, ds && (10.6)\\
&+ \frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{\chi\in\Pi(\mathbb{A}^\times/\mathbb{R}_+^\times F^\times)\\ \chi^2=\mathbf{1}}} \mathrm{tr}M(w,\chi)\mathcal{I}_B^{G^*}(\chi, f^*) && (10.7)
\end{aligned}
$$

は等しい。ここで、

$$
J_{T_0}(\gamma, f_v^*) := -\Delta_{G_v}(\gamma)\int_{T_0(F_v)\backslash G(F_v)} f_v^*(g_v^{-1}\gamma g_v)\big(H_B(g_v) + H_B(wg_v)\big)\frac{dg_v}{dt_v},
$$
$$
J_G(\gamma, f_v^*) := \Delta_{G_v}(\gamma) O_{\gamma_v}(f_v^*), \quad \Delta_{G_v}(\gamma) := |\det(1-\mathrm{Ad}(\gamma)|_{(\mathfrak{g}/\mathfrak{t}_0)(F_v)})|_{F_v}^{1/2}
$$

は**おもみつきしひよう@重み付き軌道積分**であり、$c_0(\cdot)_{s=0}$ は括弧内の $s=0$ での Laurent 展開の定数項を表す。$\Pi(G^*(\mathbb{A}))$ は $G^*(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現の同型類の集合であり、$m_0(\pi)$ は π の L^2 カスプ形式の空間での重複度である。また $\mathcal{I}_B^{G^*}(\chi_s)$ は $B(\mathbb{A})$ の擬指標

$$
\chi_s\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\right) = \chi(a)|a|_{\mathbb{A}}^s
$$

からの (正規化された) 放物型誘導表現であり、$M(w,\chi_s) : \mathcal{I}_B^{G^*}(\chi_s) \to \mathcal{I}_B^{G^*}(\chi_{-s}^{-1})$ は 4.3 節の $M(s)$ ($\chi = \mathbf{1}_{\mathbb{A}^\times}$ の場合) と同様に定義される絡作用素である。さらに

$$
r(w,\chi_s) := \frac{L(s,\chi)}{L(s+1,\chi)\varepsilon(s,\chi)}
$$

は Langlands による $M(w,\chi_s)$ の正規化因子である。最後にその Euler 因子を用いて**重み付き指標**

$$
J_{T_0}(\chi_{v,s}, f, \psi_{F_v}) := -tr\big(N(w,\chi_{v,s},\psi_{F_v})^{-1}N'(w,\chi_{v,s},\psi_{F_v})I_B^G(\chi_{v,s}, f)\big)
$$
$$
N(w,\chi_{v,s},\psi_{F_v}) := \frac{L(s+1,\chi_v)\varepsilon(s,\chi_v,\psi_{F_v})}{L(s,\chi_v)} M(w,\chi_{v,s})
$$

が定まる。同様に $J_G(\chi_{v,s}, f) := \mathrm{tr}I_{B_0}^G(\chi_{v,s}, f)$ と書いた。$(\cdot)'$ は常に $(\cdot)$ の s についての導函数を表す。

10.2 テスト函数と跡公式の単純化

上のような複雑な跡公式を単純な G の跡公式 (8.2) と比較するために、それらに代入するテスト函数 $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$, $f^* \in \mathcal{H}(G^*(\mathbb{A}))$ として非常に特別なものを選ぶ。まずはその鍵となる Euler-Poincaré 函数とその性質を [Kot88] から思い出しておく。

Euler-Poincaré 函数　非アルキメデス素点 $v\in S_D$ を止め、まずは $G^*(F_v)=SL(2,F_v)$ を考える。$\mathbf{K}_v^*=SL(2,\mathcal{O}_v)$ と

$$\mathbf{K}_v' := \mathrm{Ad}\Big(\begin{pmatrix}\varpi_v & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Big)\mathbf{K}_v^*$$

はともに $G^*(F_v)$ の超スペシャル極大コンパクト部分群だが、たがいに $G^*(F_v)$ 共役ではない。それらの交わり

$$\mathbf{I}_v := \mathbf{K}_v^*\cap\mathbf{K}_v' = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathcal{O}_v)\,\middle|\, c\in\mathfrak{p}_v\right\}$$

は $G^*(F_v)$ の**岩堀部分群**の一つである。$G^*(F_v)$ 上の不変測度 dg_v を固定したとき、*Euler-Poincaré* **函数** $f^*_{\mathrm{EP},v}$ は次で与えられる。

$$f^*_{\mathrm{EP},v}(g_v)=\begin{cases}\mathrm{meas}\,\mathbf{K}_v^{-1} & g_v\in\mathbf{K}_v^*\cup\mathbf{K}_v'\smallsetminus\mathbf{I}_v \text{ のとき}\\ (1-q_v)\mathrm{meas}\,\mathbf{K}_v^{-1} & g_v\in\mathbf{I}_v \text{ のとき}\\ 0 & g_v\notin\mathbf{K}_v^*\cup\mathbf{K}_v' \text{ のとき}\end{cases}$$

一方で F_v 上の唯一の四元数斜体を D_v として $G(F_v)=\{g_v\in D_v\,|\,\nu_{D_v}(g_v)=1\}$ はコンパクトである。この場合は $f_{\mathrm{EP},v}:=\mathrm{meas}\,G(F_v)^{-1}$ (定数函数) と定める。これらの Euler-Poincaré 函数は次のように非常に簡単な軌道積分を持つ。

事実 10.2 ([Kot88] 定理 2). (i)$\gamma^*\in G^*(F_v)$ が楕円正則のときには $O_{\gamma^*}(f^*_{\mathrm{EP},v})=\mathrm{meas}(G^*_{\gamma^*}(F_v))^{-1}$. 楕円正則でも ±1 でもない $\gamma^*\in G^*(F_v)$ での軌道積分

$$\int_{G^*_{\gamma^*}(F_v)\backslash G^*(F_v)} f^*_{\mathrm{EP},v}(g_v^{-1}\gamma^* g_v)\,\frac{dg}{di},\quad (di \text{ は } G^*_{\gamma^*}(F_v) \text{ 上の不変測度})$$

は消えている。
(ii) 特に $\gamma\in G(F_v)$, $\gamma^*\in G^*(F_v)$ が $\tau_{D_v}(\gamma)=\mathrm{tr}\gamma^*\neq\pm2$ を満たすときには、$O_\gamma(f_{\mathrm{EP},v})=O_{\gamma^*}(f^*_{\mathrm{EP},v})$ が成り立つ。

中心での値　さらにこの $f_{\mathrm{EP},v}, f^*_{\mathrm{EP},v}$ の軌道積分のマッチングが正則でない元でも成り立つことを確かめておこう。

F_v の不分岐二次拡大 F_v' を使って

$$D_v=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ \sigma(y)\varpi_v & \sigma(x)\end{pmatrix}\,\middle|\, x,y\in F_v'\right\}$$

と実現すれば、7 節の同型の係数拡大 $\eta_v: G_{E_v}\xrightarrow{\sim} G^*_{E_v}$ の適当な $G^*(\bar{F}_v)$ 共役は恒等写像 $D_v\otimes_{F_v}F_v'\xrightarrow{\sim}\mathbb{M}_2(F_v')$ の制限になる。3.2 節で止めた G^* 上の不変 3 次微分形式は

$$\omega_{G^*}(g^*)=-d\beta\wedge d\gamma\wedge\frac{d\delta}{\delta},\quad g^*=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\ \delta\neq0$$

と書けるから、$\omega_G = \eta^*\omega_{G^*}$ は上の実現では

$$\omega_G(g) = -\varpi_v \frac{d\bar{x}}{\bar{x}} \wedge dy \wedge d\bar{y}, \quad g = \begin{pmatrix} x & y \\ \bar{y}\varpi_v & \bar{x} \end{pmatrix}$$

となる。今の場合は ω_G 自身が F_v 上定義されているため、7 節の μ による調整は必要ない。測度の計算のためには $\widetilde{G}^* = GL(2)$ および $\widetilde{G}_v := D_v^\times$ 上の不変 4 次微分形式

$$\omega_{\widetilde{G}^*}(g^*) = \frac{d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma \wedge d\delta}{(\det g^*)^2}, \quad \omega_{\widetilde{G}}(g) = -\varpi_v \frac{dx \wedge d\bar{x} \wedge dy \wedge d\bar{y}}{x\bar{x}}$$

も上の恒等写像で対応していて、それぞれ

$$\omega_{\widetilde{G}^*} = \frac{d(\det g^*)}{\det g^*} \wedge \omega_{G^*}, \quad \omega_{\widetilde{G}} = \frac{d\nu_D(g)}{\nu_D(g)} \wedge \omega_G \tag{†}$$

を満たすことに注意する。ψ_v を取り替えると、これらから定まる $G(F_v)$, $G^*(F_v)$ 上の測度 $|\omega_G|_v$, $|\omega_{G^*}|_v$ には共通の定数がかかるだけだから、以下の議論では ψ_v の位数は 0 であるとしてよい。

さて、$\mathcal{O}_{D_v}$ を D_v の極大コンパクト部分環として、被約ノルムの単数群への制限 $\nu_D : \mathcal{O}_{D_v}^\times \twoheadrightarrow \mathcal{O}_v^\times$ は全射だから $1 \to G(F_v) \to \mathcal{O}_{D_v}^\times \to \mathcal{O}_v^\times \to 1$ は完全である。よって (†) から

$$\begin{aligned}
\mathrm{meas}\, G(F_v) &= \int_{\mathcal{O}_{D_v}^\times} |\omega_{\widetilde{G}}|_v \left(\int_{\mathcal{O}_v^\times} |\omega_{\mathbb{G}_m}|_v \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{1 - q_v^{-1}} \int_{\mathcal{O}_{F'_v}^\times} |\varpi_v|_v \frac{|dx \wedge d\bar{x}|_v}{|x\bar{x}|_v} \int_{\mathcal{O}_{F'_v}} |dy \wedge d\bar{y}|_v \\
&= \frac{\zeta_{F_v}(2)}{q_v - 1}
\end{aligned}$$

が従う。これと補題 3.1 を併せて

$$f_{\mathrm{EP},v}(1) = \frac{1}{\mathrm{meas}\, G(F_v)} = \frac{q_v - 1}{\zeta_{F_v}(2)} = -f^*_{\mathrm{EP},v}(1) \tag{10.8}$$

が成り立つ。

跡公式の簡略化　これらを使ってテスト函数 $f = \bigotimes_v f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$, $f^* = \bigotimes_v f_v^* \in \mathcal{H}(G^*(\mathbb{A}))$ を次のように選ぶ。S_D と少なくとも二つの非アルキメデス素点を含む素点の有限集合 S を固定する。

(i) 非アルキメデス的な $v \in S$ では $f_v = f_{\mathrm{EP},v}$, $f_v^* = f^*_{\mathrm{EP},v}$ とする。

(ii) アルキメデス的な $v \in S$ では、$\mathrm{tr}\gamma_* = \tau_D(\gamma) \neq \pm 2$ なる任意の $\gamma \in G(F_v)$, $\gamma_* \in G^*(F_v)$ に対して

$$SO_{\gamma_*}(f_v^*) := \sum_{\gamma_1^{G(F_v)} \subset \gamma_*^{G_v^*}} O_{\gamma_1}(f_v^*) = SO_\gamma(f_v)$$

を満たし、$f_v(1), f_v^*(1) \neq 0$ であるものを取る。このようなものの存在は Harish-Chandra の結果から簡単に証明できる [今野 a]。また [今野 a] の結果からこれらが

$$f_v(1) = \begin{cases} -f_v^*(1) & G(F_v) \simeq SU(2,\mathbb{R}) \text{ のとき} \\ f_v^*(1) & \text{それ以外のとき} \end{cases} \tag{10.9}$$

を満たすことがわかる。

(iii) 任意の $v \notin S$ では同型 $\eta_v : G(F_v) \xrightarrow{\sim} G^*(F_v)$ を固定し、それによって $f_v = f_v^*$ と同一視されるものを取る。Skolem-Noether の定理から f_v を止めれば、f_v^* は $G^*(E_v)$ 共役を除いて一意に定まる。さらに非アルキメデス素点 $v_0, v_1 \notin S$ で次が成り立つとする。

(a) $G(F_{v_0})$ の既約超カスプ表現 (行列成分がコンパクト台を持つ表現) π_0 を止め、$f_{v_0} = f_{v_0}^*$ をその行列成分とする。

(b) $f_{v_1} = f_{v_1}^*$ は両側 $\mathbf{K}_v$ 不変な元からなる**不分岐** *Hecke* **環** $\mathcal{H}_{\mathbf{K}_v}(G(F_v))$ に属する。

(c) 任意の $v \neq v_1, \notin S$ で $f_v(1) \neq 0$.

この f^* に対しては命題 10.1 の跡公式は著しく単純化する。まず、$G_{v_0}^*$ の任意の Borel 部分群 $B_1 = T_1 U_1$ に対して

$$\int_{U_1(F_{v_0})} f_{v_0}^*(u_1 x)\, du_1 = 0, \quad x \in G^*(F_{v_0})$$

が成り立つ[6]。特に任意の $\phi_{v_0} \in I_B^{G^*}(\chi_{v_0,s})$ に対して

$$\begin{aligned} I_B^{G^*}(\chi_s, f_{v_0}^*)\phi_{v_0}(x) = &\int_{G^*(F_{v_0})} f_{v_0}(x^{-1}g)\phi_{v_0}(g)\, dg \\ =& c_{G^*,v} \int_{\mathbf{K}_{v_0}} \int_{T_0(F_{v_0})} \Big(\int_{U(F_{v_0})} f_{v_0}(x^{-1}utk)\, du \Big) \phi_{v_0}(tk)\delta_B(t)^{-1}\, dt\, dk \\ =& c_{G^*,v} \int_{\mathbf{K}_{v_0}} \int_{T_0(F_{v_0})} \Big(\int_{\mathrm{Ad}(x)^{-1}U(F_{v_0})} f_{v_0}(u_1 xtk)\, du_1 \Big) \phi_{v_0}(tk)\delta_B(t)^{-1}\, dt\, dk \\ =& 0 \end{aligned}$$

であるから、命題の $J_{\mathrm{spec}}(f^*)$ の (10.5), (10.6), (10.7) は全て消える。同様に

$$\mathbf{1}_{G^*(\mathbb{A})}(f^*) = \prod_v c_{G^*,v} \int_{\mathbf{K}_v} \int_{T_0(F_v)} \int_{U(F_v)} f_v^*(u_v t_v k_v)\, du_v\, \delta_B(t_v)^{-1}\, dt_v\, dk_v = 0$$

も成り立つ。

次に非アルキメデス的な $v \in S$ では $J_{G^*}(\gamma, f_v^*) = 0, \gamma \in T_0(F_v)$ (事実 10.2) でそのような v は少なくとも二カ所あるから、$J_{\mathrm{geom}}(f^*)$ の (10.2) は消えている。また (10.3) は $\Re s > 1$

[6] 超カスプ表現についての Harish-Chandra の定理 [BZ76, 定理 3.21] と Jacquet-Langlands の補題 [同上, 補題 2.33] から従う。

で絶対収束している括弧内の $s=1$ の周りでの Laurent 展開の定数項として定義されていた。$v \nmid \infty, \in S$ を止め、そこでの成分が 0 であるアデールたちのなす環を $\mathbb{A}^v$ と書こう。$\Re s > 1$ での括弧内は

$$\begin{aligned}
&\sum_{\zeta=\pm1} \sum_{\xi \in F^\times/F^{\times 2}} \int_{U(\mathbb{A})\{\pm1\}\backslash G^*(\mathbb{A})} f^*\Big(\zeta g^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big) e^{\langle -2s\rho_B, H_B(g)\rangle} \frac{dg}{du} \\
&\quad = \sum_{\zeta=\pm1} \sum_{\xi \in F^\times/F^{\times 2}} \int_{U(\mathbb{A}^v)\{\pm1\}\backslash G^*(\mathbb{A}^v)} f^{*,v}\Big(\zeta g^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big) e^{\langle -2s\rho_B, H_B(g)\rangle} \frac{dg}{du} \\
&\qquad\qquad \times \int_{U(F_v)\backslash G^*(F_v)} f_v^*\Big(\zeta g_v^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_v\Big) e^{\langle -2s\rho_B, H_B(g_v)\rangle} \frac{dg_v}{du_v}
\end{aligned}$$

と書ける。この右辺の二行目は $s=1$ でも定義されているから (10.3) は

$$\begin{aligned}
c_0 \Bigg(&\sum_{\zeta=\pm1} \sum_{\xi \in F^\times/F^{\times 2}} \int_{U(\mathbb{A}^v)\{\pm1\}\backslash G^*(\mathbb{A}^v)} f^{*,v}\Big(\zeta g^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big) e^{\langle -2s\rho_B, H_B(g)\rangle} \frac{dg}{du} \\
&\times 2 \int_{U(F_v)\{\pm1\}\backslash G^*(F_v)} f_v^*\Big(\zeta g_v^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_v\Big) \frac{dg_v}{du_v}\Bigg)_{s=0}
\end{aligned}$$

となる。この二行目は $\zeta\left(\begin{smallmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ での軌道積分に他ならないから、事実 10.2 により消えている。結局、我々のテスト函数に対する跡公式は次のような簡略な形となる。

補題 10.3. $f^* = \bigotimes_v f_v^* \in \mathcal{H}(G^*(\mathbb{A}))$ を 31 ページの通りとするとき、それに対する跡公式 (命題 10.1) は次で与えられる。

$$\sum_{\zeta=\pm1} \tau(G^*) f^*(\zeta) + \sum_{\gamma_*^{G^*(F)} \in \Gamma_{\mathrm{ell}}(G^*(F))} \tau(G^*_{\gamma_*}) O_{\gamma_*}(f^*) = \sum_{\pi^* \in \Pi(G^*(\mathbb{A}))} m_0(\pi^*) \mathrm{tr}\pi^*(f^*)$$

10.3 $SU(2)$ の玉河数

以上の準備の元で次が証明できる。

定理 10.4. $\tau(G) = 1$ である。

証明. $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$, $f^* \in \mathcal{H}(G^*(\mathbb{A}))$ を 31 ページの通りとする。9.2 節の前安定化の議論は補題 10.3 の式の左辺に対しても成り立つから、

$$\begin{aligned}
\sum_{\zeta=\pm1} \tau(G^*) f^*(\zeta) + &\sum_{\gamma_*^{G^*} \in \Gamma_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{st}}(G^*(F))} \Big(SO_{\gamma_*}(f^*) + \prod_v \sum_{\delta_v \in \mathfrak{D}^{G^*}(T^*/F_v)} \langle \mathbf{s}, \delta_v \rangle O_{\gamma_*^{\delta_v}}(f_v^*) \Big) \\
&= \sum_{\pi^* \in \Pi(G^*(\mathbb{A}))} m_0(\pi^*) \mathrm{tr}\pi^*(f^*)
\end{aligned}$$

が得られる。ここでもちろん $T^* := G^*_{\gamma_*}$ と書いている。非アルキメデス的な $u \in S$ に注目すれば、事実 10.2 からこの左辺の括弧内の第二項は

$$\prod_v \sum_{\delta_v \in \mathfrak{D}^{G^*}(T^*/F_v)} \langle \mathbf{s}, \delta_v \rangle O_{\gamma_*^{\delta_v}}(f_v^*)$$
$$= \frac{1}{\operatorname{meas} T(F_u)} \Big(\sum_{\delta_u \in \mathfrak{D}^{G^*}(T^*/F_u)} \langle \mathbf{s}, \delta_u \rangle \Big) \prod_{v \neq u} \Big(\sum_{\delta_v \in \mathfrak{D}^{G^*}(T^*/F_v)} \langle \mathbf{s}, \delta_v \rangle O_{\gamma_*^{\delta_v}}(f_v^*) \Big)$$

と書ける。$\mathbf{s}$ は非自明指標だったからこれは 0 であり、従って上の跡公式は

$$\sum_{\zeta=\pm 1} \tau(G^*) f^*(\zeta) + \sum_{\gamma_*^{G^*} \in \Gamma^{\mathrm{st}}_{\mathrm{ell}}(G^*(F))} SO_{\gamma_*}(f^*) = \sum_{\pi^* \in \Pi(G^*(\mathbb{A}))} m_0(\pi^*) \mathrm{tr}\pi^*(f^*)$$

となる。同様の理由から G の跡公式 (命題 9.3) も現在採用している f に対しては

$$\sum_{\zeta=\pm 1} \tau(G) f(\zeta) + \sum_{\gamma^G \in \Gamma^{\mathrm{st}}(G(F))} SO_\gamma(f) = \sum_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))} m(\pi) \mathrm{tr}\pi(f)$$

となる。これら二つの跡公式を辺ごとに差し引くと、31 ページの f, f^* の選び方から $\tau_D(\gamma) = \mathrm{tr}\gamma_* \neq \pm 2$ となる $\gamma \in G(F), \gamma_* \in G^*(F)$ に対しては、$SO_\gamma(f) = SO_{\gamma_*}(f^*), \quad \tau(T) = \tau(T^*)$ だから

$$\sum_{\zeta=\pm 1} \tau(G) f(\zeta) - \tau(G^*) f^*(\zeta) = \sum_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))} m(\pi) \mathrm{tr}\pi(f) - \sum_{\pi^* \in \Pi(G^*(\mathbb{A}))} m_0(\pi^*) \mathrm{tr}\pi^*(f^*) \quad (10.10)$$

が得られる。

さらに $v \notin S$ での $f_v = f_v^*$ たちの台を適当に小さく取ることにより、$f(-1) = f^*(-1) = 0$ であるとしてよい。(10.8), (10.9) から

$$f_v(1) = \begin{cases} -f_v^*(1) & v \in S_D \text{ のとき} \\ f_v^*(1) & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

であるが、S_D の濃度は偶数であるから $f(1) = f^*(1)$ が成り立つことに注意する。

v_1 以外の素点での f_v, f_v^* を固定し、さらにアルキメデス素点での f_v, f_v^* を $U(\mathfrak{g}_\infty), U(\mathfrak{g}_\infty^*)$ の中心の固有函数の有限線型結合に取る。すると f, f^* はそれぞれある $\mathbf{K}, \mathbf{K}^*$ タイプの有限族 $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_\infty, K), \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}^*_\infty, K^*)$ に属する。(例えば f_∞ は $\mathbf{K}_\infty$ の左右の移動作用で $\mathfrak{F}_\infty$ に属する $\mathbf{K}_\infty$ タイプを生成し、f_{fin} は両側 K 不変になっている。) このとき (10.10) の右辺は

$$\sum_{\pi = \pi_\infty \otimes \pi_{\mathrm{fin}} \in \Pi(G(\mathbb{A}))} m(\pi) \mathrm{tr}\Big(\pi_\infty^{\mathfrak{F}_\infty}(f_\infty) \otimes (\pi_{\mathrm{fin}}^{v_1})^{K^{v_1}}(f_{\mathrm{fin}}^{v_1}) \Big) \mathrm{tr}\pi_{v_1}(f_{v_1})$$
$$- \sum_{\pi^* = \pi^*_\infty \otimes \pi^*_{\mathrm{fin}} \in \Pi(G^*(\mathbb{A}))} m_0(\pi^*) \mathrm{tr}\Big(\pi_\infty^{*,\mathfrak{F}_\infty}(f^*_\infty) \otimes (\pi_{\mathrm{fin}}^{*,v_1})^{K^{*,v_1}}(f_{\mathrm{fin}}^{*,v_1}) \Big) \mathrm{tr}\pi^*_{v_1}(f_{v_1})$$

と書ける。$\pi_\infty^{\mathfrak{F}_\infty}(f_\infty)\otimes(\pi_{\rm fin}^{v_1})^{K^{v_1}}(f_{\rm fin}^{v_1})$, $\pi_\infty^{*,\mathfrak{F}_\infty}(f_\infty^*)\otimes(\pi_{\rm fin}^{*,v_1})^{K^{*,v_1}}(f_{\rm fin}^{*,v_1})$ はいずれも階数有限の作用素で、これらと $m(\pi), m_0(\pi^*)$ が消えない $\pi\in\Pi(G(\mathbb{A})), \pi^*\in\Pi^*(G^*(\mathbb{A}))$ は有限個であることが知られている。

　結局、$\mathbf{K}_{v_1}$ 不変ベクトルを持つ $G(F_{v_1})$ の既約ユニタリ表現の有限族 $\{\pi_i\}_{1\le i\le m}$ があって (10.10) は

$$\big(\tau(G)-\tau(G^*)\big)f^{v_1}(1)\cdot f_{v_1}(1)=\sum_{i=1}^m c_i\mathrm{tr}\pi_i(f_{v_1}),\quad c_i\in\mathbb{C} \tag{10.11}$$

と書ける。ここで f_{v_1} の佐武変換 $f_{v_1}^\vee$ を考える。すなわち $f_{v_1}^\vee$ は $\mathbf{K}_{v_1}$ 不変ベクトルを持つ $G(F_{v_1})$ の既約許容表現の同型類の集合 $\Pi(G(F_v))^{\mathbf{K}_v}$ 上の函数で、$f_{v_1}^\vee(\pi)=\mathrm{tr}\pi(f_{v_1})$ で与えられる。$G(F_{v_1})$ の Plancherel 公式から (10.11) の左辺は、$f_{v_1}^\vee$ の線型汎函数として絶対連続である。対する右辺は Dirac 超函数の有限線型結合であるから、Riesz の表現定理に照らして、このような等式が成り立つのは両辺とも恒等的に 0 である場合に限られる。すなわち $\tau(G)=\tau(G^*)$ が従う。これと系 6.2 を併せて定理を得る。 □

参考文献

[Bor79] A. Borel. Automorphic L-functions. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pp. 27–61. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[BZ76] I. N. Bernšteĭn and A. V. Zelevinskiĭ. Representations of the group $GL(n,F)$, where F is a local non-Archimedean field. *Uspehi Mat. Nauk*, Vol. 31, No. 3(189), pp. 5–70, 1976.

[CF86] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors. *Algebraic number theory*, London, 1986. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Reprint of the 1967 original.

[Che89] V. I. Chernousov. The Hasse principle for groups of type E_8. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 306, No. 5, pp. 1059–1063, 1989.

[DL71] M. Duflo and J.-P. Labesse. Sur la formule des traces de Selberg. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4e. série*, Vol. 4, pp. 193–284, 1971.

[DMOS82] Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, and Kuang-yen Shih. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Vol. 900 of *Lect. Notes in Math.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1982.

[GJ79] Stephen Gelbart and Hervé Jacqeut. Forms on $GL(2)$ from the analytic point of view. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, pp. 213–251. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[JL70] H. Jacquet and R. P. Langlands. *Automorphic forms on* GL(2). Springer-Verlag, Berlin, 1970. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114.

[Kne65a] M. Kneser. Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über $\mathfrak{p}$-adischen Körpern. I. *Math. Zeit*, Vol. 88, pp. 40–47, 1965.

[Kne65b] M. Kneser. Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über $\mathfrak{p}$-adischen Körpern. II. *Math. Zeit*, Vol. 89, pp. 250–272, 1965.

[Kne66] Martin Kneser. Hasse principle for H^1 of simply connected groups. In *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Vol. 9 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pp. 159–163. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.

[Kot84] Robert E. Kottwitz. Stable trace formula: cuspidal tempered terms. *Duke Math. J.*, Vol. 51, No. 3, pp. 611–650, 1984.

[Kot86] Robert E. Kottwitz. Stable trace formula: elliptic singular terms. *Math. Ann.*, Vol. 275, No. 3, pp. 365–399, 1986.

[Kot88] Robert E. Kottwitz. Tamagawa numbers. *Ann. of Math.*, Vol. 127, pp. 629–646, 1988.

[Lai80] K. F. Lai. Tamagawa number of reductive algebraic groups. *Composit. Math.*, Vol. 41, No. 2, pp. 153–188, 1980.

[Lan66] R. P. Langlands. The volume of the fundamental domain for some arithmetical subgroups of Chevalley groups. In *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Vol. 9 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pp. 143–148. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.

[Lan76] R. P. Langlands. *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Vol. 544 of *Lect. Notes in Math.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1976.

[Lan79] R. P. Langlands. Automorphic representations, motives, and Shimura varieties. Ein Märchen. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pp. 205–246. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Mil86] J. S. Milne. *Arithmetic duality theorems.* Academic Press Inc., Orlando, Florida, 1986.

[San81] J. J. Sansuc. Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. *J. reine angew. Math.*, Vol. 327, pp. 12–80, 1981.

[Ser79] Jean-Pierre Serre. *Local fields*, Vol. 67 of *GTM*. Springer Verlag, New York, 1979. Translation of “Corps Locaux” by M.J. Greenberg.

[Tat79] J. Tate. Number theoretic background. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pp. 3–26. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Wei82] André Weil. *Adeles and algebraic grolups*, Vol. 23 of *Progress in Math.* Birkhäuser, 1982. Princeton 高等研究所の 1961 年のレクチャーノートの再版.

[Wei95] André Weil. *Basic number theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the second (1973) edition.

[今野 a] 今野和子, 今野拓也. 実簡約群上の軌道積分について. 実簡約群上の軌道積分の特異挙動についての Harish-Chandra の結果をまとめた個人的なノート。2004 年 4 月 30 日。

[今野 b] 今野和子, 今野拓也. 跡公式の安定化—楕円正則項. ノート、`http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/~tkonno/papers/Stabell.pdf` からダウンロードできる。

[小野 63] 小野孝. 玉河数について. 雑誌「数学」, Vol. 15, pp. 8–17, 1963.

索引