# 跡公式の安定化 — 楕円正則項

今野 和子 * 今野 拓也 †

2004 年 9 月 20 日

**概 要**

Arthur 跡公式の安定化 (stabilization) は保型形式の整数論的研究の基盤となるものである。Langlands は [Lan83a] で安定化の過程で現れるさまざまな課題を明らかにし、最後に跡公式の楕円正則項からなる部分の安定化を行った。このノートの目的はその安定化の議論を解説することである。ただし構成の多くは $L$ 群による Tate-中山双対性の記述を活用した Kottwitz のものに従っており [Kot84b], [Kot86]、最後に用いられる軌道積分の移行の記述は Langlands-Shelstad によっている [LS87]。

## 目 次



*京都大学大学院理学研究科数学教室
*E-mail* : kkonno@math.kyoto-u.ac.jp
*URL* : http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/~kkonno/Kazuko.html
†九州大学大学院数理学研究院
*E-mail* : takuya@math.kyushu-u.ac.jp
*URL* : http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/~tkonno/index-j.html
訂正およびコメントなどありましたら、上記の電子メールアドレスまでお寄せ下さい。

# 1 準備と記号

Bourbaki に倣って $\mathbb{N}$ で 0 以上の整数の集合を表す。群 $G$ の元 $\gamma$ の中心化群を $G^\gamma$ と書く。$G$ が位相群、または代数群の場合には $G^0$ でその単位元の連結成分を表し、$\pi_0(G) = G/G^0$ でその連結成分のなす離散位相群を表す。また $G_\gamma := (G^\gamma)^0$ と書く。$G$ **加群**とは $G$ の作用を備えたアーベル群のこととする。$x, g \in G(F)$ に対して $\mathrm{Ad}(g)x := gxg^{-1}$ と書く。

## 1.1 Galois コホモロジー

特に断らない限り $F$ は代数的数体とする。$\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^\times$ で $F$ のアデール環およびイデール群を表し、$\mathbb{A}^\times$ 上のイデールノルムを $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ で表す。$F$ の素点 $v$ での $F$ の完備化を $F_v$ と書き、アルキメデス素点での $F$ の完備化たちの直積環を $F_\infty = \prod_{v|\infty} F_v$, 有限アデールたちのなす $\mathbb{A}$ の部分環を $\mathbb{A}_f$ で表す。

$F$ の代数閉包 $\bar{F}$ を固定して $\Gamma = \Gamma_F$ で絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を表す。これは $\bar{F}$ に含まれる有限次 Galois 拡大 $E/F$ の Galois 群 $\Gamma_{E/F} := \mathrm{Gal}(E/F)$ たちの射影極限 $\Gamma = \varprojlim_{E/F} \Gamma_{E/F}$ として、自然な副有限位相群の構造を備えていた。有限次 Galois 拡大 $E/F$ の Galois 群 $\Gamma_{E/F}$ 上の加群 $A$ に対して、その *Galois* **コホモロジー群** $\mathrm{H}^i(E/F, A) = \mathrm{H}^i(\Gamma_{E/F}, A)$, $(i \in \mathbb{N})$

および *Tate* **コホモロジー群** $\widehat{\mathrm{H}}^i(E/F, A) = \widehat{\mathrm{H}}^i(\Gamma_{E/F}, A)$, $(i \in \mathbb{Z})$ が考えられる [Ser79, VII, VIII 章]。$\Gamma$ 加群 $A$ に対して、$\bar{F}$ 内の有限次 Galois 拡大の塔 $E' \supset E \supset F$ での**インフレーション射** $\mathrm{H}^i(E/F, A^{\Gamma_E}) \to \mathrm{H}^i(E'/F, A^{\Gamma_{E'}})$ に関する帰納極限を

$$\mathrm{H}^i(\Gamma, A) = \mathrm{H}^i(F, A) := \varinjlim_{E} \mathrm{H}^i(E/F, A^{\Gamma_E})$$

と書く。$A$ が $\Gamma$ 作用を備えた非可換群の場合でも $\mathrm{H}^i(F, A)$, $(i = 0, 1)$ は定義されていたが、$\mathrm{H}^1(F, A)$ は**原点付き集合** *(pointed set)* であって必ずしも群構造を持たないことに注意する [Ser79, VII 章 補遺]。

$W_F$ で $\bar{F}/F$ の Weil 群を表す [Tat79]。Galois コホモロジーと同様に $W_F$ 加群 $A$ の Weil コホモロジー群 $\mathrm{H}^i(W_F, A)$ などが定義できるが、この場合には $W_F$ 上の函数として連続なコサイクルのコホモロジー類のみを考えることとする。([KS99] などでは $\mathrm{H}^i_{\mathrm{cont}}(W_F, A)$ と書かれている。)

$F$ の素点 $v$ に対しても $F_v$ の代数閉包 $\bar{F}_v$ を固定し、$\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ を $\Gamma_v$ と書く。代数閉包の (同型を除いた) 一意性 [今野, 補題 6.3] から $F$ 同型 $\bar{v} : \bar{F} \hookrightarrow \bar{F}_v$ がある。

$$\begin{tikzcd} \bar{F} \arrow[r, "\bar{v}"] & \bar{F}_v \\ F \arrow[u] \arrow[r, "v"] & F_v \arrow[u] \end{tikzcd}$$

特に $\bar{v}^* : \Gamma_v \ni \sigma \mapsto (\sigma|_{\bar{v}(\bar{F})}) \in \Gamma$ は定義可能な準同型であり、これによって $\Gamma_v$ は $\bar{v}$ での**分解群** *(decomposition group)* と同一視される。同様に $\bar{F}_v/F_v$ の Weil 群 $W_{F_v}$ から $W_F$ への連続準同型で

$$\begin{tikzcd} W_F \arrow[r] & \Gamma \\ W_{F_v} \arrow[u] \arrow[r] & \Gamma_v \arrow[u, "\bar{v}^*"'] \end{tikzcd}$$

を可換にするものが $W_F^0$ の内部自己同型を除いてただ一つある [Tat79, 1.6.1]。

$E/F$ が $\bar{F}$ に含まれる有限次 Galois 拡大として、$F$ の素点 $v$ に対して $E_v := E \otimes_F F_v$ と書く。$v$ を割る $E$ の素点 $w$ を固定する。$\Gamma_{E/F}$ における $w$ の固定化群 $(\Gamma_{E/F})_w$ ($w$ での**分解群**) は自然に $\Gamma_{E_w/F_v}$ と同一視されていた。$F$ トーラス $T$ に対して

$$T(E_v) \simeq \mathrm{ind}_{\Gamma_{E_w/F_v}}^{\Gamma_{E/F}} T(E_w) := T(E_w) \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_{E_w/F_v}]} \mathbb{Z}[\Gamma_{E/F}]$$

であるから、Shapiro の補題 (Frobenius 相互律の導来函手を取ったもの) により

$$\mathrm{H}^i(E/F, T(E_v)) \simeq \mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(E_w))$$

である。さらに $E_w/F_v$ が不分岐で $T$ が $F_v$ のある不分岐拡大上で分裂しているとすると、$T$ は $\mathcal{O}_v$ 上の滑らかな群スキームに延びる。特に $T(\mathcal{O}_w)$ が考えられるが、このとき

$\mathrm{H}^i(\Gamma_{E_w/F_v}, T(\mathcal{O}_w)) = 0$ である[1]。これらから同型

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^i(E/F, T(\mathbb{A}_E)) &\simeq \varinjlim_S \Big( \bigoplus_{v\in S} \mathrm{H}^i(E/F, T(E_v)) \times \prod_{v\notin S} \mathrm{H}^i(E/F, \bigoplus_{w|v} T(\mathcal{O}_w)) \Big) \\ &\simeq \varinjlim_S \Big( \bigoplus_{v\in S} \mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(E_w)) \times \prod_{v\notin S} \mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(\mathcal{O}_w)) \Big) \\ &\simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(E_w))\end{aligned}$$

が得られる。さらにインフレーションについての帰納極限を取れば、$\bar{\mathbb{A}} = \varinjlim_E \mathbb{A}_E$ として同型

$$\mathrm{H}^i(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^i(F_v, T) \tag{1.1}$$

を得る。

## 1.2 Tate-中山双対性

トーラスの Galois コホモロジー群を記述する Tate-中山双対性を復習しておこう。

### 1.2.1 局所理論

ここでは $F$ を標数 0 の局所体とする。$\bar{F}$, $\Gamma = \Gamma_F := \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ などを代数体の場合と同様に定める。$F$ トーラス $T$ の指標群を $X^*(T) := \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ と書く。これは $\Gamma$ 加群である。$X^*(T) \times T \ni (\chi, t) \mapsto \chi(t) \in \mathbb{G}_m$ に対応してカップ積

$$\mathrm{H}^i(F, X^*(T)) \times \mathrm{H}^{k-i}(F, T) \longrightarrow \mathrm{H}^k(F, \mathbb{G}_m), \quad 0 \le i \le k$$

が定まる。特に $k = 2$ として、*Tate-***中山双対性**

$$\mathrm{H}^1(F, X^*(T)) \times \mathrm{H}^1(F, T) \longrightarrow \mathrm{Br}(F)$$

が知られている。ただし、

$$\mathrm{Br}(F) := \mathrm{H}^2(F, \mathbb{G}_m) \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & F \text{ が非アルキメデス的なとき} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & F = \mathbb{R} \text{ のとき} \\ \{0\} & F = \mathbb{C} \text{ のとき} \end{cases}$$

は $F$ の *Brauer* **群**である[2]。ここで $T$ の Langlands 双対

$$\widehat{T} := \mathrm{Hom}(X_*(T), \mathbb{C}^*) \simeq (X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})/X^*(T)$$

[1]証明は例えば [CF86, VI.1.2, 命題 1] と同じようにできる。

[2]古典的には $\mathrm{Br}(F)$ は $F$ 上の中心的斜体の集合である。$D_1$, $D_2 \in \mathrm{Br}(F)$ に対して $D_1 \otimes_F D_2$ は再び $F$ 上の中心的単純代数だから $\mathbb{M}_m(D)$ と書ける。このとき $D_1, D_2$ の $\mathrm{Br}(F)$ での積は $D_1 * D_2 := D$ と定義される [CF86, Ch. VI]。

を導入しよう。$\widehat{\mathfrak{t}} := X^*(T) \otimes \mathbb{C}$ と書くと、短完全列 $0 \to X^*(T) \to \widehat{\mathfrak{t}} \overset{\exp}{\to} \widehat{T} \to 0$ の Galois コホモロジー完全列:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & X^*(T)^\Gamma \longrightarrow \widehat{\mathfrak{t}}^\Gamma \xrightarrow{\exp} \widehat{T}^\Gamma \\ \longrightarrow & \mathrm{H}^1(F, X^*(T)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma, \widehat{\mathfrak{t}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma, \widehat{T}) \longrightarrow \dots \end{aligned} \tag{1.2}$$

が得られる。

**注意 1.1.** 有限群 $\Gamma$ の作用付きのアーベル群 $V$ が $|\Gamma|$ **可除** ($|\Gamma|$-*divisible*)、すなわち $V \ni v \mapsto |\Gamma|v \in V$ が全射であるとする。$V$ に値を持つ $\Gamma$ 上の 1 コサイクル $v$ に対して、$w := \sum_{\tau\in\Gamma} v(\tau)$ とおけば、$v(\sigma\tau) = v(\sigma) + \sigma(v(\tau))$ より

$$\sigma(w) = \sum_{\tau\in\Gamma} \sigma(v(\tau)) = \sum_{\tau\in\Gamma} (v(\sigma\tau) - v(\sigma)) = \sum_{\tau\in\Gamma} v(\sigma\tau) - |\Gamma| \cdot v(\sigma) = w - |\Gamma| \cdot v(\sigma).$$

従って

$$v(\sigma) = \frac{1}{|\Gamma|}(w - \sigma(w)) = \frac{w}{|\Gamma|} - \sigma\left(\frac{w}{|\Gamma|}\right), \quad \forall\sigma \in \Gamma$$

つまり $v = \partial(w/|\Gamma|)$ ゆえ、$\mathrm{H}^1(\Gamma, V) = 0$ がわかる。実はさらに $\mathrm{H}^i(\Gamma, V) = 0$, $(i \in \mathbb{N})$ も成り立つ。

この注意から有限次 Galois 拡大 $E/F$ に対しては $\mathrm{H}^1(\Gamma_{E/F}, \widehat{\mathfrak{t}}^{\Gamma_E}) = \{0\}$ であり、従ってそれらの帰納極限である $\mathrm{H}^1(\Gamma, \widehat{\mathfrak{t}})$ も消えている。これを (1.2) に代入すれば

$$\pi_0(\widehat{T}^\Gamma) = \widehat{T}^\Gamma / (\widehat{T}^\Gamma)^0 = \widehat{T}^\Gamma / \exp(\widehat{\mathfrak{t}}^\Gamma) \simeq \mathrm{H}^1(F, X^*(T))$$

が得られる。これを使って Tate-中山双対性を

$$\pi_0(\widehat{T}^\Gamma) \times \mathrm{H}^1(F, T) \longrightarrow \mathrm{Br}(F)$$

と書く。$F$ が非アルキメデス的なら $\mathrm{Br}(F) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は有限アーベル群の双対性の像を常に含むから

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \pi_0(\widehat{T}^\Gamma) \times \mathrm{H}^1(F, T) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \overset{\exp(2\pi i\cdot)}{\longrightarrow} \mathbb{C}^1 \tag{1.3}$$

は Pontrjagin 双対性である。$F$ がアルキメデス的なときには $T$ は $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$, $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ (およびその Weil の係数制限), $U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(1)$ の直積に同種だから、その一次 Galois コホモロジー群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の直積の拡大である。よってこの場合にも (1.3) (で $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を $\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ に換えたもの) は完全双対性である [Kot84b, 2.2, 3.3]。

### 1.2.2 大域理論

**類体論からの復習**　$F$ が代数体の状況に戻る。大域的な Tate-中山双対性を述べるために類体論の復習をしておこう。$1 \to \bar{F}^\times \to \bar{\mathbb{A}}^\times \to \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times \to 1$ に付随する長完全列

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow & F^\times \longrightarrow \mathbb{A}^\times \longrightarrow (\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times)^\Gamma \\ \longrightarrow & \mathrm{H}^1(F, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, \bar{\mathbb{A}}^\times) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) \\ \longrightarrow & \mathrm{H}^2(F, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) \\ \longrightarrow & \mathrm{H}^3(F, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathrm{H}^3(F, \bar{\mathbb{A}}^\times) \longrightarrow \mathrm{H}^3(F, \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) \longrightarrow \dots \end{aligned} \tag{1.4}$$

を考える。

(i) $\mathrm{H}^1(F, \mathbb{G}_m) = \{1\}$ (Hilbert の定理 90) から $(\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times)^\Gamma \cong \mathbb{A}^\times/F^\times$ である。

(ii) 大域類体論の第二不等式 [CF86, VII. Th. 9.1] から $\mathrm{H}^1(F, \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) = 0$ である。

以上から (1.4) の二行目は自明な完全列である。そこで 3 行目の完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) \tag{1.5}$$

が問題となる。局所理論から同型

$$\mathrm{inv}_v : \mathrm{H}^2(F_v, \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{H}^2(F_v, \bar{F}_v^\times) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & v \text{ が非アルキメデスのとき} \\ \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} & v \text{ が実のとき} \\ \{0\} & v \text{ が複素のとき} \end{cases}$$

があった [Ser79, XIII.3 節]。これらの和の制限

$$\mathrm{inv} : \mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times) \longrightarrow \bigoplus_v \mathrm{H}^2(F_v, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sum_v \mathrm{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

は完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Br}(F) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times) \xrightarrow{\mathrm{inv}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

を与えるが (Brauer 群の Hasse 原理)、これは (1.5) と同型になることが知られている。つまり

$$\mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{1.6}$$

であり、$\mathrm{H}^3(F, \mathbb{G}_m) = \{1\}$ もわかる [CF86, VII § 11]。

**大域的な Tate-中山双対性**　$T$ を $F$ トーラスとする。

$$X^*(T) \times T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}) \ni (\chi, t \cdot T(\bar{F})) \longmapsto \chi(t) \in \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times$$

から再びカップ積

$$\mathrm{H}^i(F, X^*(T)) \times \mathrm{H}^{2-i}(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})) \longrightarrow \mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times)$$

が定まる。これに (1.6) を代入して、局所理論と同様の構成から完全双対性 $\pi_0(\widehat{T}^\Gamma) \times \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ あるいは

$$\mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\widehat{T}^\Gamma)^D \tag{1.7}$$

を得る。大域的な inv が $\mathrm{inv}_v$ たちの和であったことから明らかに次の可換図式が成り立つ。ただし第 1 行は合成 $\mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \to \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\widehat{T}^\Gamma)^D$ である。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[d, "(1.1)"'] & \pi_0(\widehat{T}^\Gamma)^D \\ \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, T) \arrow[r, "(1.3)"] & \bigoplus_v \pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_v})^D \arrow[u, "\Pi_v"'] \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

最後に以下でよく用いる Weil 群コホモロジーについての結果を一つ思い出しておく。$\mathrm{H}^i(W_F, A)$ で $A$ 係数の Weil 群のコホモロジーを表す。定義は通常の群コホモロジーと同じだが、Weil 群の場合にはコチェインが連続であることを要求するものとする。

**事実 1.2** ([Lab84] 命題 5.5, [Lan79] 補題 4)**.** $\widehat{T}$ が $W_F$ の連続な作用付きの複素トーラスのとき $\mathrm{H}^2(W_F, \widehat{T}) = 0$.

## 1.3 簡約群

連結簡約線型代数群 $G$ に対して、その導来群および随伴群を各々$G_{\mathrm{der}}$, $G_{\mathrm{ad}}$ と書き、$D_G := G/G_{\mathrm{der}}$ とおく。

### 1.3.1 $L$ 群

$G$ の Borel 部分群とその極大トーラスの対 $(B, T)$ を *Borel* **対** *(Borel pair)* と呼ぶ。Borel 対に対して**基底付きルートデータ** *(based root datum)* [Spr79, 1 節]

$$RD(B, T) = (X^*(T), \Delta(B, T), X_*(T), \Delta^\vee(B, T))$$

が定まる。ここで $X_*(T) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$ は $T$ の一変数部分群たちのなす自由アーベル群で、$\Delta(B, T)$ は $T$ の $B$ に関する正ルート系内の単純ルートの集合、$\Delta^\vee(B, T)$ は $\Delta(B, T)$ の各元に対するコルートの集合を表す。$(B, T)$ にさらに $\Delta(B, T)$ 内の各ルートに対するルートベクトルの集合を付加した三つ組 $(B, T, \{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta(B,T)})$ を $G$ の**分裂** *(splitting)* と呼ぶ。$G$ の内部自己同型群 $\mathrm{Int}(G) = G_{\mathrm{ad}}$ は $G$ の分裂全体の集合に忠実かつ推移的に作用している。特に $G$ の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$ の各元 $\theta$ に、分裂 $\mathbf{spl} = (B, T, \{X_\alpha\})$ を固定する $\theta$ の元を対応させることで、拡大

$$1 \longrightarrow \mathrm{Int}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Out}(G) \longrightarrow 1$$

の分裂が得られる。これをやはり $\mathbf{spl}$ で表す。二つの Borel 対 $(B, T)$, $(B', T')$ に対して $\mathrm{Ad}(g)(B, T) = (gBg^{-1}, gTg^{-1})$ が $(B', T')$ となる $g \in G$ は基底付きルートデータの同型 $\mathrm{Ad}(g) : RD(B, T) \xrightarrow{\sim} RD(B', T')$ を与える。これはそのような $g$ の取り方によらず定まり、この同型に関して $\{RD(B, T)\}_{(B,T)}$ は射影系をなす。そこで $G$ の基底付きルートデータをその射影極限

$$RD(G) = (X^*, \Delta, X_*, \Delta^\vee) := \varprojlim_{(B,T)} RD(B, T)$$

と定める。定義から同一視 $\mathrm{Aut}(RD(G)) = \mathrm{Out}(G)$ が従う。

さて $G$ が代数体 $F$ 上の連結簡約群の場合に戻ろう。$G$ の分裂の集合には $\Gamma$ が作用する。この作用で不変な分裂のことを $F$ **分裂**と呼び、$G$ は $F$ 分裂を持つとき $F$ 上**準分裂** *(quasisplit)* であると言われる。以下のデータを固定しておく。

(i) 準分裂データ。$F$ 上準分裂な連結簡約群 $G^*$ と、$\bar{F}$ 同型 $\psi : G \xrightarrow{\sim}_{\bar{F}} G^*$ で $\psi \circ \sigma(\psi)^{-1} \in G^*_{\mathrm{ad}}(\bar{F}), \forall\sigma \in \Gamma$ を満たすもの ($G$ から $G^*$ への**内部ひねり** *(inner twist)*) の対 $(G^*, \psi)$. ここで $\sigma(\psi) := \sigma \circ \psi \circ \sigma^{-1}$, $(\sigma \in \Gamma)$ と書いた。

(ii) $G^*$ の $F$ 分裂 $\mathbf{spl}_{G^*} = (B_0, T_0, \{X_\alpha\})$.

(iii) $L$ 群データ ${}^LG = \widehat{G} \rtimes_{\rho_G} W_F$. ただし、$\widehat{G}$ は $\mathbb{C}$ 上の連結簡約群で、$RD(\widehat{G})$ が $RD(G)$ の双対ルートデータ $RD(G)^\vee = (X_*, \Delta^\vee, X^*, \Delta)$ に同型なもの。その分裂 $\mathbf{spl}_{\widehat{G}} = (\mathcal{B}, \mathcal{T}, \{\mathcal{X}_{\alpha^\vee}\})$ を固定しておく。また $\rho_G : W_F \to \mathrm{Aut}(\widehat{G})$ は

$$\Gamma \xrightarrow{G^* \text{への作用}} \mathrm{Aut}(G^*) \longrightarrow \mathrm{Out}(G^*) = \mathrm{Aut}(RD(G^*))$$
$$\xrightarrow{\text{同一視}} \mathrm{Aut}(RD(\widehat{G})) = \mathrm{Out}(\widehat{G}) \xrightarrow{\mathbf{spl}_{\widehat{G}}} \mathrm{Aut}(\widehat{G})$$

と $W_F \to \Gamma$ の合成である。

### 1.3.2 単連結被覆

Borel 対 $(B, T)$ に対して $(B_{\mathrm{der}} := B \cap G_{\mathrm{der}}, T_{\mathrm{der}} := T \cap G_{\mathrm{der}})$ は $G_{\mathrm{der}}$ の Borel 対になる。$X^*_{\mathrm{der}} := X^*/X^*(D_G)$, $X_{*,\mathrm{der}} := \{\lambda^\vee \in X_* \,|\, \langle \chi, \lambda^\vee \rangle = 0, \forall \chi \in X^*(D_G)\}$ とおけば

$$RD(G_{\mathrm{der}}) = (X^*_{\mathrm{der}}, \Delta, X_{*,\mathrm{der}}, \Delta^\vee)$$

である。さらに $X_{*,\mathrm{sc}}$ を単純コルートたちで張られる格子 $\mathbb{Z}\langle \Delta^\vee \rangle \subset X_{*,\mathrm{der}}$ とし、

$$X^*_{\mathrm{sc}} := \{\lambda \in X^*_{\mathrm{der}} \otimes \mathbb{Q} \,|\, \langle \lambda, X_{*,\mathrm{sc}} \rangle \subset \mathbb{Z}\}$$

と定めれば、$(X^*_{\mathrm{sc}}, \Delta, X_{*,\mathrm{sc}}, \Delta^\vee)$ はルートデータをなす。Chevalley の定理によりこれを基底付きルートデータに持つ連結簡約群 $G_{\mathrm{sc}}$ が同型を除いてただ一つあり、単準同型 $X^*_{\mathrm{der}} \hookrightarrow X^*_{\mathrm{sc}}$ は明らかに [Spr79, 1.7] の意味の同種射 $RD(G_{\mathrm{der}}) \to RD(G_{\mathrm{sc}})$ を与える。従って [Spr79, 定理 2.9 (ii)] から中心的同種 $G_{\mathrm{sc}} \twoheadrightarrow G_{\mathrm{der}}$ がある。定義から $G_{\mathrm{sc}}$ は半単純単連結である。$\mathrm{Int}(G_{\mathrm{sc}}) \to \mathrm{Int}(G_{\mathrm{der}})$ は全射なので、$G_{\mathrm{sc}}$ の $F$ 形式でこの中心的同種が $F$ 有理的であるものが取れる。これを $G_{\mathrm{sc}}$ で表し $G_{\mathrm{der}}$ の**単連結被覆**と呼ぶ。

さて、$X^*_{\mathrm{ad}} := \mathbb{Z}\langle \Delta \rangle$, $X_{*,\mathrm{ad}} = \{\lambda^\vee \in \mathbb{Q}\langle \Delta^\vee \rangle \,|\, \langle \chi, \lambda^\vee \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \chi \in X^*_{\mathrm{ad}}\}$ と書けば、$G_{\mathrm{ad}}$ の基底付きルートデータは $(X^*_{\mathrm{ad}}, \Delta, X_{*,\mathrm{ad}}, \Delta^\vee)$ で与えられる。これから $G_{\mathrm{sc}}$ および $D_G$ の $L$ 群は各々

$${}^LG_{\mathrm{sc}} = \widehat{G}/Z(\widehat{G}) \rtimes_{\rho_G} W_F, \quad {}^LD_G = Z(\widehat{G}) \rtimes_{\rho_G} W_F \tag{1.9}$$

である。さらに Borel 対 $(B, T)$ に対して $T_{\mathrm{der}} = T \cap G_{\mathrm{der}}$ の $G_{\mathrm{sc}}$ での逆像を $T_{\mathrm{sc}}$ と書けば、

$$1 \longrightarrow Z(\widehat{G}) \longrightarrow \widehat{T} \longrightarrow \widehat{T}_{\mathrm{sc}} \longrightarrow 1$$

である。定義から $X^*(\widehat{T}_{\mathrm{sc}})$ は $T$ の $G$ でのコルート格子 $\mathbb{Z}\langle \Delta^\vee(B, T) \rangle$ だから $X^*(Z(\widehat{G})) = X_*(T)/\mathbb{Z}\langle \Delta^\vee(B, T) \rangle$ が従う。よって

$$X^*(Z(\widehat{G})) = X_*(T)/X_*(T_{\mathrm{der}}) \oplus X_*(T_{\mathrm{der}})/\mathbb{Z}\langle \Delta^\vee(B, T) \rangle$$

である。ここで $X_*(T)/X_*(T_{\mathrm{der}}) = X_*(D_G)$ は自由だから次がわかる。

**補題 1.3.** $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ であるためには、$Z(\widehat{G})$ が連結であることが必要十分。

### 1.3.3 簡約群の Galois コホモロジー

$L$ 群を使って 1.2 節の結果を以下のように簡約群に拡張できる。一般に非可換 $F$ 代数群 $G$ に対しても Galois コホモロジー (原点付き) 集合 $\mathrm{H}^1(F,G)$ が定義できた。特に $\mathrm{H}^1(F,\bullet)$ は $F$ 上の連結簡約群たちを対象としそれらの間の正規準同型 (像が正規部分群である準同型) を射とする圏から、原点付き集合の圏への函手である。

まず $F$ が標数 0 の局所体の場合を考えよう。

(i) $F$ が $p$ 進体のとき、Tate-中山双対性 (1.3) は函手の同型 $\alpha : \mathrm{H}^1(F,\bullet) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Z(\widehat{\bullet})^\Gamma)^D$ に一意に延びる。

(ii) $F=\mathbb{R}$ のとき、(1.3) は函手の準同型 $\alpha : \mathrm{H}^1(F,\bullet) \to \pi_0(Z(\widehat{\bullet})^\Gamma)^D$ に一意に延び、次の完全列が成り立つ。

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R},(\bullet)_{\mathrm{sc}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R},\bullet) \xrightarrow{\alpha} \pi_0(Z(\widehat{\bullet})^\Gamma)^D \longrightarrow \pi_0(Z(\widehat{\bullet}))^D.$$

次に $F$ を代数体とする。$G$ の中心を $Z_G$ と書く。

(i) Tate-中山双対性 (1.7) は函手の準同型 $\beta_G : \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F})) \to \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D$ に一意に延びて、完全列

$$\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{ad}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F,G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F})) \xrightarrow{\beta_G} \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D$$

が成り立つ。

(ii) 局所、大域 Tate-中山双対性の整合図式 (1.8) は次の図式に拡張される。第 1 行はやはり合成 $\mathrm{H}^1(F,G(\bar{\mathbb{A}})) \to \mathrm{H}^1(F,G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F})) \xrightarrow{\beta_G} \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D$ である。

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^1(F,G(\bar{\mathbb{A}})) & \longrightarrow & \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D \\
\big\downarrow & & \big\uparrow \textstyle\prod_v \\
\bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v,G) & \xrightarrow{\bigoplus_v \beta_{G_v}} & \bigoplus_v \pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_v})^D
\end{array}$$

最後に Hasse 原理について復習しておこう。$\ker^1(F,G)$ で制限射の直積 $\mathrm{H}^1(F,G) \to \prod_v \mathrm{H}^1(F_v,G)$ の核を表す (Shafarevich-Tate 群の一種)。また一般に $\Gamma$ 加群 $A$ に対しても

$$\ker^i(F,A) := \ker[\mathrm{H}^i(\Gamma,A) \to \prod_v \mathrm{H}^i(\Gamma_v,A)]$$

と定める。$F$ トーラス $T$ に対して、$\ker^i(F,T)$ と $\ker^{3-i}(F,X^*(T))$ は互いに双対であることが知られている [KS99, 補題 D.2.C]。1.2.1 節と同様に完全列 $0 \to X^*(T) \to \hat{\mathfrak{t}} \overset{\exp}{\to} \widehat{T} \to 0$ から $0 = \ker^1(F,\hat{\mathfrak{t}}) \to \ker^1(F,\widehat{T}) \to \ker^2(F,X^*(T)) \to \ker^2(F,\hat{\mathfrak{t}}) = 0$ が従うので、特に

$$\ker^1(F,T) \xrightarrow{\sim} \ker^1(F,\widehat{T})^D \tag{1.10}$$

が得られる。一方、Kneser [Kne66], Chernousov [Che89] により $G$ が半単純単連結な場合には $\ker^1(F,G)$ は自明である (Hasse 原理)。これを拡張して、$G$ の導来群が単連結な場合には

$$\ker^1(F,G) \xrightarrow{\sim} \ker^1(F,D_G) \tag{1.11}$$

が成り立つ [Kot84b, (4.2.2)]。このとき $\widehat{D}_G = Z(\widehat{G})$ だから、(1.10) と併せて $\ker^1(F,G) \xrightarrow{\sim} \ker^1(F,Z(\widehat{G}))^D$ が得られる。

## 2 跡公式の楕円正則部分

$G$ を $F$ 上定義された連結簡約線型代数群とし、$A_G$ で $G$ の中心 $Z_G$ 内の極大 $F$ 分裂トーラスを表す。定義からある $r \in \mathbb{N}$ に対して $F$ 同型 $\mathbb{G}_m^r \xrightarrow{\sim} A_G$ があるが、それによる対角部分群 $(\mathbb{R}_+^\times)^r \subset (F_\infty^\times)^r$ の像を $\mathfrak{A}_G \subset A_G(F_\infty)$ と書く。$G(F)$ は $G(\mathbb{A})$ の離散部分群であり、商空間 $G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})$ は測度有限である [BHC62]。$G(\mathbb{A})$ 上の可測函数 $\phi$ で

- $\phi(\gamma a g) = \phi(g)$, $\gamma \in G(F)$, $a \in \mathfrak{A}_G$, $g \in G(\mathbb{A})$;
- $|\phi|^2$ は $G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})$ 上で可積分

なるものたちのなす Hilbert 空間を $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ と書く。これは $G(\mathbb{A})$ の右正則作用

$$R(g)\phi(x) := \phi(xg), \quad g \in G(\mathbb{A}),\ \phi \in L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$$

により $G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現と見なせる。一方、函数 $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ であって

- $G(F_\infty)$ 成分について滑らかで、ある極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}_\infty \subset G(F_\infty)$ に関して両側 $\mathbf{K}_\infty$ 有限。
- $G(\mathbb{A}_f)$ 成分の函数として局所定数。

を満たすものたちの空間を $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ と書く。Arthur の跡公式は $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ への $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の作用:

$$[R(f)\phi](x) := \int_{G(\mathbb{A})} f(y)\phi(xy)\,\frac{dy}{da}, \quad \phi \in L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$$

のトレース (実際はその代替物) を記述するものである。

$\gamma \in G(F)$ の $G(F)$ での共役類を $\gamma^{G(F)}$ と書く。$\gamma$ が**正則半単純** *(regular semisimple)* とは $G_\gamma$ がトーラスになることだった。そこでこの場合は $G_\gamma$ を $T_\gamma$ と書くことにする。$G(F)$ 内の正則半単純元の集合を $G(F)_{\mathrm{reg}}$、その中の $G(F)$ 共役類の集合を $\varGamma(G(F))$ と書く。$\gamma \in G(F)_{\mathrm{reg}}$ が $G$ で**楕円的** *(elliptic)* とは $T_\gamma$ が楕円的、すなわち $T_\gamma/Z_G$ が $F$ 上非等方的であることだった。$G(F)$ 内の楕円的正則半単純元の集合を $G(F)_{\mathrm{ell}}$、その中の $G(F)$ 共役類の集合を $\varGamma(G(F))_{\mathrm{ell}}$ と書く。$G_{\mathrm{der}} \twoheadrightarrow G/Z_G$ は同種射だから、極大トーラス $T \subset G$ が楕円的であるためには $T_{\mathrm{der}}$ が非等方的であることが必要十分である。さらに

$$0 \longrightarrow X^*(D_G) \longrightarrow X^*(T) \longrightarrow X^*(T_{\mathrm{der}}) \longrightarrow 0$$

だから、これは $X^*(T)_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = X^*(G)_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ に同値である。ただし $X^*(G)_F$ は $G$ の $F$ 有理指標の群を表す。

一般に Arthur 跡公式の幾何サイドの項たちは $G(F)$ 内の半単純共役類に対応するが、中でも $\Gamma(G(F))_{\mathrm{ell}}$ でパラメタライズされる部分は次で与えられる。

$$T_{\mathrm{ell}}(f) = \sum_{\gamma^{G(F)} \in \Gamma(G(F))_{\mathrm{ell}}} \frac{\mathrm{meas}(T_\gamma(F)\mathfrak{A}_G \backslash T_\gamma(\mathbb{A}))}{[G^\gamma(F) : T_\gamma(F)]} O_\gamma(f).$$

ここで

$$O_\gamma(f) := \int_{T_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f(x^{-1}\gamma x) \, \frac{dx}{dt}$$

は $f$ の $\gamma$ での**軌道積分** *(orbital integral)* である。右辺の各項は $\gamma$ の共役類 $\gamma^{G(F)}$ および $G(\mathbb{A})$, $\mathfrak{A}_G$ 上の不変測度のみに依存していることに注意する。

以下簡単のため、$G$ の導来群 $G_{\mathrm{der}}$ はその普遍 (単連結) 被覆 $G_{\mathrm{sc}}$ に一致すると仮定する。これは Steinberg の定理[3]により $G^\gamma = T_\gamma$ を意味する。さらに、特に断らない限り $F$ 簡約群の $\mathbb{A}$ 有理点の群上の測度として**玉河測度**を取ることにする。これにより上の式は

$$T_{\mathrm{ell}}(f) = \sum_{\gamma^{G(F)} \in \Gamma(G(F))_{\mathrm{ell}}} \tau(T_\gamma) O_\gamma(f) \tag{2.1}$$

と簡略化する。ただし $\tau(T_\gamma)$ は $T_\gamma$ の**玉河数**である。

**補足：玉河測度と玉河数**　$G$ を上の通り $F$ 上定義された連結簡約線型代数群とし、$\mathbb{A}/F$ の非自明指標 $\psi = \bigotimes_v \psi_v$ を固定する。$G$ 上の $F$ 有理的な左不変最高次微分形式 $\omega$ を取れば、各素点 $v$ でこれと $F_v$ 上の $\psi_v$ 自己双対測度 $dx_v$ は $G(F_v)$ 上の左不変測度 $|\omega|_v$ を決める。$X^*(G) := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m)$ を $G$ の指標群とすれば、これは $\Gamma$ 加群ゆえ $V_G := X^*(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ 上の Galois 表現 $\rho_G$ の *Artin* $L$ **函数**

$$L_f(s, \rho_G) := \prod_{v \nmid \infty} L_v(s, \rho_G), \quad L_v(s, \rho_G) := \det(\mathbf{1} - \rho_G(\Phi_v) q_v^{-s} | V_G^{I_{F_v}})^{-1}$$

が定まる。ここで $\Phi_v \in \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ は**幾何的** *Frobenius* **元**、$I_{F_v} \subset \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ は**惰性群** *(inertia group)* を表す。このとき有限個を除くほとんど全ての非アルキメデス素点 $v$ で

$$\int_{G(\mathcal{O}_v)} |\omega|_v$$

はある収束 Euler 積の $v$ 成分に $L_v(1, \rho_G)^{-1}$ をかけたものになる。特に $G(F_v)$ 上の不変測度を

$$dg_v := \begin{cases} |\omega|_v & v \text{ がアルキメデス的なとき}, \\ L_v(1, \rho_G)|\omega|_v & \text{それ以外のとき}. \end{cases}$$

[3]「単連結な半単純群の半単純自己同型による固定部分群は連結である。」

と定めれば、積測度 $\prod_v dg_v$ は $G(\mathbb{A})$ 上の定義可能な不変測度を与える。イデールノルムの積公式からこれは $\omega$ の取り方に依存しない。

$A_G$ の次元 $r$ は $X^*(G)_F := X^*(G)^\Gamma$ の階数に等しく、従って $L(s, \rho_G)$ は $s = 1$ で $r$ 次の極を持つ。このとき

$$dg := \left(\lim_{s\to 1}(s-1)^r L_f(s, \rho_G)\right)^{-1} \prod_v dg_v$$

で定まる $G(\mathbb{A})$ 上の左不変測度を**玉河測度**という [小野 63]。

$\mathfrak{a}_G := \mathrm{Hom}(X^*(G)_F, \mathbb{R})$ とおけば、標準的な準同型 $H_G : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_G$ が

$$\langle \chi, H_G(g)\rangle = |\chi(g)|_{\mathbb{A}}, \quad \forall \chi \in X^*(G)_F$$

により定まる。特に $H_G|_{\mathfrak{A}_G} : \mathfrak{A}_G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_G$ は同型である。$\mathfrak{A}_G$ 上の測度 $da$ を、$X^*(G)_F$ の双対格子 $\Lambda_G := \{H \in \mathfrak{a}_G \,|\, \langle \chi, H\rangle \in \mathbb{Z}, \forall \chi \in X^*(G)_F\}$ による商 $\mathfrak{a}_G/\Lambda_G$ の測度が 1 となる $\mathfrak{a}_G$ 上の Lebesgue 測度の $H_G$ による引き戻しとする。このとき

$$\tau(G) := \int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} f(g)\,\frac{dg}{da}$$

は有限整数値を取り、$G$ の**玉河数**と呼ばれる。次の事実の後半は Weil によって予想され、まず分裂群の場合に Langlands が証明し [Lan66]、それを Lai が準分裂な場合に拡張し [Lai80]、最後に一般の場合を Kottwitz が証明した [Kot88]。前半は後半と [小野 63] の議論から従う。

**事実 2.1.** $\tau(G) = |\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)|/|\ker^1(F, G)|$. 特に $G$ が半単純単連結ならば $\tau(G) = 1$ である。

# 3 安定超函数と安定化の問題

## 3.1 安定共役

跡公式の安定化とは、跡公式を安定共役で不変な安定超函数で展開することである。そこでまず安定共役の定義を思い出しておこう。この節では $F$ は標数 0 の任意の体でよい。

$\gamma, \gamma' \in G(F)_{\mathrm{reg}}$ が**安定共役** *(stably conjugate)* とは $g \in G(\bar{F})$ があって

- $\gamma' = g^{-1}\gamma g$,
- 特に任意の $\sigma \in \Gamma$ に対して $\mathrm{Ad}(g\sigma(g)^{-1})\gamma = \mathrm{Ad}(g)\sigma(\gamma') = \gamma$ から $g\sigma(g)^{-1} \in G^\gamma(\bar{F})$ であるが、さらに $g\sigma(g)^{-1} \in G_\gamma(\bar{F})$.

が成り立つことだった [Kot82]。このノートでは $G_{\mathrm{der}}$ は単連結としているので後者の条件は常に満たされ、安定共役類は単に $G$ 共役類の $F$ 有理点の集合である。しかし、ここではこの仮定をはずして一般の場合の安定共役類の記述を復習しよう。$\mathit{\Gamma}^{\mathrm{st}}(G(F))$ で $G(F)_{\mathrm{reg}}$ 内

の安定共役類の集合を表し、$\gamma \in G(F)_{\mathrm{reg}}$ の安定共役類を $\gamma^G$ と書く。もちろん $\gamma^{G(F)} \subset \gamma^G$ だが、一つの安定共役類に含まれる $G(F)$ 共役類の構造は次のように記述される。

$\gamma \in G(F)_{\mathrm{reg}}$ に対して $G_\gamma$ を $T$ と書き、

$$\mathfrak{A}(T/F) := \left\{ g \in G(\bar{F}) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & g^{-1}Tg \text{ は再び } F \text{ 上のトーラス} \\ \text{(ii)} & \mathrm{Ad}(g^{-1}) : T \xrightarrow{\sim} g^{-1}Tg \text{ は } F \text{ 同型} \end{array} \right\}$$

とおく。明らかに $\gamma^G = \{g^{-1}\gamma g \,|\, g \in \mathfrak{A}(T/F)\}$ だから、全単射

$$T(\bar{F})\backslash\mathfrak{A}(T/F)/G(F) \ni T(\bar{F})gG(F) \stackrel{\sim}{\longmapsto} (g^{-1}\gamma g)^{G(F)} \in \gamma^G/\mathrm{Ad}(G(F))$$

を得る。次に $\mathfrak{D}(T/F) := \ker[\mathrm{H}^1(F,T) \to \mathrm{H}^1(F,G)]$ とおく。ただし、$\mathrm{H}^1(F,G)$ は原点付き集合なので $\ker[\mathrm{H}^1(F,T) \to \mathrm{H}^1(F,G)]$ は $\mathrm{H}^1(F,T) \to \mathrm{H}^1(F,G)$ による原点の逆像を表す。定義から明らかに

$$T(\bar{F})\backslash\mathfrak{A}(T/F)/G(F) \ni T(\bar{F})gG(F) \stackrel{\sim}{\longmapsto} \{g\sigma(g)^{-1}\}_\sigma \text{ のクラス} \in \mathfrak{D}(T/F)$$

は全単射だから、これらを合成して全単射

$$\mathfrak{D}(T/F) \ni \delta \stackrel{\sim}{\longmapsto} \gamma^\delta \in \gamma^G/\mathrm{Ad}(G(F)) \tag{3.1}$$

が得られる。ここで $\delta \in \mathfrak{D}(T/F)$ を代表するコサイクル $\{g\sigma(g)^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma}$ に対して $\gamma^\delta := (g^{-1}\gamma g)^{G(F)}$ と書いた。

さて $\mathrm{H}^1(F,G)$ は群ではないので $\mathfrak{D}(T/F) \subset \mathrm{H}^1(F,T)$ は部分群とは限らない。そこで次の構成が必要になる。

**補題 3.1.** $T_{\mathrm{sc}} \twoheadrightarrow T_{\mathrm{der}} \hookrightarrow T$ が誘導する写像 $\mathfrak{D}(T_{\mathrm{sc}}/F) \to \mathfrak{D}(T/F)$ は全射。

**証明**. $\delta \in \mathfrak{D}(T/F)$ を代表する 1 コサイクル $\{g\sigma(g)^{-1}\}_\sigma$ を取る。$G = T \cdot G_{\mathrm{der}}$ だから $g$ の $T(\bar{F})\backslash\mathfrak{A}(T/F)/G(F)$ でのクラスの代表元を $G_{\mathrm{der}}(\bar{F})$ に取れる。その $G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ での逆像の元 $\widetilde{g}$ を取れば、

(i) $\mathrm{Ad}(g^{-1})T$ が $F$ 有理的なことから、$\mathrm{Ad}(\widetilde{g}^{-1})T_{\mathrm{sc}}$ も $G_{\mathrm{sc}}$ の $F$ 極大トーラス。

(ii) $p_G(\widetilde{g}\sigma(\widetilde{g})^{-1}) \in T_{\mathrm{der}}(\bar{F})$ より $\widetilde{g}\sigma(\widetilde{g})^{-1} \in T(\bar{F})$, $(\forall\sigma \in \Gamma)$。よって $\mathrm{Ad}(\widetilde{g})^{-1} : T_{\mathrm{sc}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ad}(\widetilde{g})^{-1}T_{\mathrm{sc}}$ は $F$ 同型。

すなわち $\widetilde{g} \in \mathfrak{A}(G_{\mathrm{sc}}/T_{\mathrm{sc}})$ である。これの $\mathfrak{D}(T_{\mathrm{sc}}/F)$ での像 $\alpha_{\mathrm{sc}}$ が $\alpha$ に落ちることは明らかであろう。 □

$\mathfrak{D}(T/F)$ の代用の群として $\mathfrak{E}(T/F) := \mathrm{im}[\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}) \to \mathrm{H}^1(F,T)]$ を導入する。

**系 3.2.** (i) $\mathfrak{E}(T/F)$ は $\mathfrak{D}(T/F)$ を含む。
(ii) $F$ が非アルキメデス局所体ならば $\mathfrak{E}(T/F) = \mathfrak{D}(T/F)$.

**証明**. (i) は上の補題から明らか。$F$ が非アルキメデス的なら Kneser の定理 [Kne65a], [Kne65b] から $\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}})$ は自明なので $\mathfrak{D}(G_{\mathrm{sc}}/T_{\mathrm{sc}})$ は $\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}})$ に一致し、(ii) も従う。 □

## 3.2 局所安定超函数

この節では $F$ を標数 0 の局所体とする。函数 $f: G(F) \to \mathbb{C}$ で

- $f$ は $F$ がアルキメデス的なら滑らかで、非アルキメデス的なら局所定数。
- $\mathrm{supp} f$ はコンパクト。
- $F$ がアルキメデス的なときには $G(F)$ のある極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}$ で両側有限。

を満たすものたちのなす畳み込み代数を $\mathcal{H}(G(F))$ と書く。$F$ がアルキメデス的の場合を考えよう。$G(F)$ の Lie 環 $\mathfrak{g}(F)$ の複素化の普遍包絡環を $U(\mathfrak{g}(F)_{\mathbb{C}})$ とし、$G(F)$ 上の高さ函数 $\|\cdot\|$ を固定する。このとき $\mathcal{H}(G(F))$ はセミノルム

$$\nu_{r,X,Y}(f) := \sup_{g\in G(F)} \|g\|^r |R(X)L(Y)f(g)|, \quad X, Y \in U(\mathfrak{g}(F)_{\mathbb{C}}),\ r \in \mathbb{N}$$

たちの定める Fréchet 位相を備える。この位相に関して連続な $\mathcal{H}(G(F))$ 上の線型汎函数を $G(F)$ 上の**超函数** *(distribution)* と呼ぶ。$F$ が非アルキメデス的な場合には $G(F)$ 上の超函数とは $\mathcal{H}(G(F))$ 上の線型形式にすぎない。例えば $\gamma^{G(F)} \in \Gamma(G(F))$ での**軌道積分** *(orbital integral)*

$$O_\gamma(f) := \int_{T_\gamma(F)\backslash G(F)} f(x^{-1}\gamma x)\,\frac{dx}{dt}, \quad f \in \mathcal{H}(G(F))$$

は $G(F)$ 上の超函数で、*Schwartz-Harish-Chandra* **空間** $\mathscr{C}(G(F))$ 上の連続線型汎函数 (**緩増加超函数**) に延びることが知られている。ここで $dx$, $dt$ はもちろんあらかじめ固定した $G(F)$ および $T_\gamma(F)$ 上の不変測度である。さらに定義から明らかに $O_\gamma$ は $G(F)$ の随伴作用で不変 $O_\gamma(\mathrm{Ad}(g^{-1})f) = O_\gamma(f)$, $\forall g \in G(F)$ という意味での**不変超函数** *(invariant distribution)* である。実は $F$ が非アルキメデス的な場合には $\{O_\gamma \,|\, \gamma^{G(F)} \in \Gamma(G(F))\}$ たちは不変超函数の空間の稠密部分空間を張ることが知られている (Kazhdan の稠密性定理 [Kaz86])。

$\gamma^G \in \Gamma^{\mathrm{st}}(G(F))$ での**安定軌道積分** *(stable orbital integral)* を

$$SO_\gamma(f) := \sum_{\delta\in\mathfrak{D}(T_\gamma/F)} O_{\gamma^\delta}(f), \quad f \in \mathcal{H}(G(F))$$

と定める。ただし $T_{\gamma^g}(F)$, $(g \in \mathfrak{A}(T_\gamma/F))$ 上には $T_\gamma(F)$ 上の不変測度を $\mathrm{Ad}(g)^{-1} : T_\gamma(F) \xrightarrow{\sim} T_{\gamma^g}(F)$ で持っていった測度を取ることにする。上の Kazhdan の結果を受けて、不変超函数の空間における

$$\mathrm{span}\{SO_\gamma \,|\, \gamma^G \in \Gamma^{\mathrm{st}}(G(F))\}$$

の弱位相についての閉包の元を $G(F)$ 上の**安定超函数** *(stable distribution)* という。

次に $F$ が $p$ 進体で $G$ が**不分岐**、すなわち $F$ 上準分裂で $F$ のある不分岐拡大上で分裂する場合を考える。このとき $G(F)$ の Bruhat-Tits ビルディングには**超スペシャル点** *(hyperspecial point)* があり、対応して $G$ の $\mathcal{O}$ 上の滑らかな群スキーム $\mathbb{G}$ への延長が定まる [Tit79]。$\mathbf{K} := \mathbb{G}(\mathcal{O})$ は $G(F)$ の**超スペシャル極大コンパクト部分群**である。$e_{\mathbf{K}} \in \mathcal{H}(G(F))$

で $\mathbf{K}$ の特性函数を表す。$\gamma \in \mathbf{K} \cap G(F)_{\mathrm{reg}}$ に対して有限次拡大 $E/F$ で $T_\gamma$ が $E$ 上分裂するようなものを取れば、$T_\gamma$ の $G$ でのルート $\alpha \in X^*(T_\gamma)_E$ に対して $1-\alpha(\gamma)$ は $E$ の整数環 $\mathcal{O}_E$ に属する。さらに $1-\alpha(\gamma) \in \mathcal{O}_E^\times$ が $T_\gamma$ の任意のルートに対して成り立つものたちの集合を $\mathbf{K}_{\mathrm{reg}}$ と書く。

**事実 3.3.** (a) $\gamma \in \mathbf{K}_{\mathrm{reg}}$ のとき、$T_\gamma$ は不分岐で $T_\gamma \cap \mathbf{K}$ は $T_\gamma$ の超スペシャル極大コンパクト部分群である。さらに $\gamma^G \cap \mathbf{K} = \mathrm{Ad}(\mathbf{K})\gamma$ が成り立つ。
(b) $\gamma \in G(F)_{\mathrm{reg}}$ に対して

$$O_\gamma(e_{\mathbf{K}}) = \begin{cases} 1 & \gamma \in \mathbf{K}_{\mathrm{reg}}, \\ 0 & \text{それ以外のとき}. \end{cases}$$

(a) はより一般に $\gamma$ が半単純な場合が [Kot86, § 7] にあり、(b) は (a) から直ちに従う。

## 3.3 安定化

$F$ が代数的数体の場合に戻ろう。有限個を除く全ての非アルキメデス素点 $v$ では $G_v := G \otimes_F F_v$ は不分岐で、$G(F_v)$ の超スペシャル極大部分群 $\mathbf{K}_v$ が取れる。定義から

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{A})) = \varinjlim_{S} \Big( \mathcal{H}(G(F_\infty)) \otimes \bigotimes_{v \in S} \mathcal{H}(G(F_v)) \otimes \bigotimes_{v \notin S} e_{\mathbf{K}_v} \Big)$$

であるから、$G(\mathbb{A})$ 上の**超函数**とは各素点 $v$ での $G(F_v)$ 上の超函数 $T_v$ たちのテンソル積 $T = \bigotimes_v T_v$ であって、ほとんど全ての非アルキメデス素点で $T_v(e_{\mathbf{K}_v}) = 1$ を満たすもののことである。例えば $\gamma \in G(F)_{\mathrm{reg}}$ はほとんど全ての非アルキメデス素点で $\mathbf{K}_{v,\mathrm{reg}}$ に属するので、命題 3.3 (b) から $\gamma$ での軌道積分

$$O_\gamma(f) = \prod_v O_\gamma(f_v), \quad f = \bigotimes_v f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$$

は $G(\mathbb{A})$ 上の超函数である。このような $G(\mathbb{A})$ 上の超函数 $T = \bigotimes_v T_v$ が**安定超函数** *(stable distribution)* であるとは、各 $T_v$ が安定超函数であることとする。再び命題 3.3 (b) から $\gamma \in G(F)_{\mathrm{reg}}$ での大域安定軌道積分

$$SO_\gamma(f) = \prod_v SO_\gamma(f_v), \quad f = \bigotimes_v f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$$

は安定超函数である。

Arthur の不変跡公式の両辺を $G(\mathbb{A})$ およびその内視群たちの上の安定超函数たちで展開することを跡公式の**安定化** *(stabilization)* と呼ぶ。$GL(n)$, $SL(n)$, $U_{E/F}(3)$ やその内部形式を除いてそのような展開が存在するかどうかは今のところ知られていない。しかし調和解析におけるいくつかの基本的な予想を仮定して、その安定化のプロセスを記述することは Arthur によって完成されている [Art02], [Art01], [Art03]。以下ではそのうち、幾

何サイドのしかも楕円的正則共役類でパラメタライズされる部分のみの安定化の過程を [Lan83a], [Kot86] にそって解説する。

まず (2.1) で $\gamma^{G(F)} \in \mathit{\Gamma}(G(F))_{\rm ell}$ についての和を $G(F)_{\rm ell}$ 内の安定共役類の集合 $\mathit{\Gamma}^{\rm st}(G(F))_{\rm ell}$ についての和にまとめ、$\gamma^G = \gamma'^G$ ならば $T_\gamma$ と $T_{\gamma'}$ は $F$ 同型で従って $\tau(T_\gamma) = \tau(T_{\gamma'})$ であることを使えば次が得られる。

$$\begin{aligned} T_{\rm ell}(f) &= \sum_{\gamma^G \in \mathit{\Gamma}^{\rm st}(G(F))_{\rm ell}} \sum_{\gamma'^{G(F)} \in \gamma^G} \tau(T_{\gamma'}) O_{\gamma'}(f) \\ &= \sum_{\gamma^G \in \mathit{\Gamma}^{\rm st}(G(F))_{\rm ell}} \tau(T_\gamma) \sum_{\gamma'^{G(F)} \in \gamma^G} O_{\gamma'}(f). \end{aligned}$$

ここで Kottwitz による Steinberg の定理の拡張を思い出す[4]。

**事実 3.4** ([Kot82] 定理 4.4)**.** 一般に体 $F$ 上定義された連結簡約群 $G^*$ が $F$ 上準分裂でその導来群が単連結ならば、$G^*$ の任意の $F$ 上定義された共役類は $F$ 有理点を持つ。

$G$ 内の半単純共役類 (閉部分多様体になる) たちの集合を $\mathcal{C}\ell_{\rm ss}(G)$ と書く。$\psi : G \xrightarrow{\sim}_{\bar{F}} G^*$ は全単射 $\psi : \mathcal{C}\ell_{\rm ss}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}\ell_{\rm ss}(G^*)$ を与えるが、$\psi$ が内部ひねりであることからこれは $F$ 上定義されている。さて、$\mathit{\Gamma}^{\rm st}(G(F))$ の元はある $C \subset \mathcal{C}\ell_{\rm ss}(G)$ の $F$ 有理点の集合 $C(F)$ である。よって $\psi(C) \in \mathcal{C}\ell_{\rm ss}(G^*(F))$ は $F$ 上定義されており、したがって $\psi(C)(F)$ は空でない $\mathit{\Gamma}^{\rm st}(G^*(F))$ の元である。こうして単射

$$\psi : \mathit{\Gamma}^{\rm st}(G(F)) \longrightarrow \mathit{\Gamma}^{\rm st}(G^*(F))$$

が得られる。これは $\psi$ の取り方によらず、$\mathit{\Gamma}^{\rm st}(G(F))_{\rm ell}$ を $\mathit{\Gamma}^{\rm st}(G^*(F))_{\rm ell}$ に送る。よって上は

$$T_{\rm ell}(f) = \sum_{\gamma_*^{G^*} \in \mathit{\Gamma}^{\rm st}(G^*(F))_{\rm ell}} \tau(T) \sum_{\gamma^{G(F)} \in \psi^{-1}(\gamma_*^{G^*})} O_\gamma(f) \tag{3.2}$$

となる。ただし $T = G^*_{\gamma_*}$ である。

**補題 3.5.** $\gamma, \gamma' \in G(F)_{\rm reg}$ が $G(\bar{\mathbb{A}})$ 共役ならばそれらは $G(\bar{F})$ 共役、従って安定共役である。

**証明**. $\bar{F}$ 内の有限次拡大 $L/F$ でその上で $T_\gamma, T_{\gamma'}$ が分裂するようなものを取れば、$\delta \in G(L)$ で $\gamma'^{\delta} \in T_\gamma(L)$ となるものがある。仮定から $F$ の素点 $v$ で $\gamma, \gamma'$ は $G(\bar{F}_v)$ 共役ゆえ、必要なら $L$ を取り替えて、$v$ を割る $L$ の素点 $w$ で $\gamma' = \gamma^g$, $(\exists g \in G(L_w))$ が成り立つようにできる。$\gamma^{g\delta} \in T_\gamma(L_w)$ から $g\delta$ は $T_\gamma$ を正規化するから、その $\Omega(G, T_\gamma)$ での像を代表する $\nu \in {\rm Norm}(T_\gamma, G(\bar{F}))$ が取れる。このとき

$$\gamma' = {\rm Ad}(\delta)\gamma^{g\delta} = {\rm Ad}(\delta)\gamma^{\nu} = {\rm Ad}(\delta\nu^{-1})\gamma \in \gamma^G$$

である。 □

[4] $G^*$ 自身が半単純単連結で準分裂かつ半単純共役類の場合が Steinberg の定理である。

さて、$\gamma^{G(F)}, \gamma'^{G(F)} \in \Gamma(G(F))_{\mathrm{ell}}$ が $G(\mathbb{A})$ 共役なら軌道積分 $O_\gamma(f)$ と $O_{\gamma'}(f)$ は等しい。(3.2) の内側の和でそのような項をまとめよう。

**系 3.6.** 写像 (3.1) は全単射 $(\gamma^{G(\mathbb{A})} \cap G(F))/\mathrm{Ad}(G(F)) \xrightarrow{\sim} \ker[\mathfrak{D}(T_\gamma/F) \to \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, T_\gamma)]$ に制限される。

**証明**. 補題と (3.1) から

$$(\gamma^{G(\mathbb{A})} \cap G(F))/\mathrm{Ad}(G(F)) \hookrightarrow \gamma^G/\mathrm{Ad}(G(F)) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{D}(T_\gamma/F)$$

が得られ、この像は明らかに $\ker[\mathfrak{D}(T_\gamma/F) \to \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, T_\gamma)]$ に属する。従ってこれの全射性のみ確かめればよい。$\gamma^\delta \in \gamma^G$, $(\delta \in \mathfrak{A}(T_\gamma/F))$ が (3.1) で $\ker[\mathfrak{D}(T_\gamma/F) \to \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, T_\gamma)]$ の元に対応するとしよう。仮定から各素点 $v$ で $t_v \in T(\bar{F}_v)$ があって $\delta\sigma(\delta)^{-1} = t_v^{-1}\sigma(t_v)$, $\sigma \in \Gamma_v$ である。よって $g_v := t_v\delta \in G(F_v)$ で $\gamma^{g_v} = \gamma^\delta$ である。一方ほとんど全ての素点 $v$ で $\gamma, \gamma^\delta \in \mathbf{K}_{v,\mathrm{reg}}$ だから、事実 3.3 から $\gamma^\delta = \gamma^{k_v}$, $\exists k_v \in \mathbf{K}_v$ である。ほとんど全ての $v$ で $g_v = k_v$ とできるから、$g = (g_v)_v \in G(\mathbb{A})$ で $\gamma^\delta = \gamma^g \in \gamma^{G(\mathbb{A})} \cap G(F)$ である。 □

一方、可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^1(F, T_\gamma) & \longrightarrow & \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, T_\gamma) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^1(F, G) & \longrightarrow & \prod_v \mathrm{H}^1(F_v, G)
\end{array}$$

から系の全単射の像は

$$\begin{aligned}
\ker[\ker^1(F, T_\gamma) \to \ker^1(F, G)] &\overset{(1.11)}{\simeq} \ker[\ker^1(F, T_\gamma) \to \ker^1(F, D_G)] \\
&\overset{(1.10)}{\simeq} \mathrm{cok}[\ker^1(F, Z(\widehat{G})) \to \ker^1(F, \widehat{T}_\gamma)]^D \\
&\simeq \mathrm{cok}[\ker^1(F, Z(\widehat{G})) \to \ker^1(F, \widehat{T})]^D
\end{aligned}$$

に一致する。補題 3.5 から $\psi^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(F) = \psi^{-1}(\gamma_*^{G^*})$ だから、結局 (3.2) の内側の和は

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma^{G(F)} \subset \psi^{-1}(\gamma_*^{G^*})} O_\gamma(f) &= \left|\mathrm{cok}[\ker^1(F, Z(\widehat{G})) \to \ker^1(F, \widehat{T})]\right| \sum_{\substack{\gamma \in \psi^{-1}(\gamma_*^{G^*}) \\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Ad}(G(\mathbb{A}))}} O_\gamma(f) \\
&= \left|\mathrm{cok}[\ker^1(F, Z(\widehat{G})) \to \ker^1(F, \widehat{T})]\right| \sum_{\substack{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \subset \psi^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(\mathbb{A}) \\ \gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \emptyset}} O_\gamma(f)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

となる。この式の問題点は $G(F_v)$ 上の超函数たちによる Euler 積展開を持たないことであり、安定化はこの障害を取り除くことを目的としている。問題の和の条件の 1 行目はすでに局所的なものだから、2 行目の条件を書き換えることが課題となる。

# 4 Kottwitz 障害

## 4.1 問題設定

$\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{reg}}$ が $\gamma_{\mathbb{A}} = (\gamma_v)_v \in G(\mathbb{A})$ の**アデール像** *(adelic image)* (または**アデールノルム** *(adelic norm)*) であるとは、$F$ の各素点 $v$ で $\psi(\gamma_v)$ と $\gamma_*$ が $G^*(F_v)$ 共役なこととととする。

$$\mathrm{Ad}(g_v) \circ \psi(\gamma_v) = \gamma_*, \quad \exists g_v \in G^*(F_v).$$

ここで $\gamma_*$ はほとんど全ての非アルキメデス素点 $v$ で $\mathbf{K}_{v,\mathrm{reg}}$ に属するから、上でほとんど全ての $g_v$ は $\mathbf{K}$ 内に取れる。すなわち $\mathrm{Ad}(g) \circ \psi(\gamma_{\mathbb{A}}) = \gamma_*$ となる $g \in G^*(\bar{\mathbb{A}})$ がある。さらに $G^*(\bar{\mathbb{A}}) = T(\bar{\mathbb{A}})G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ [Kot84a, (3.3.4)] なので、上の定義は

$$\mathrm{Ad}(g) \circ \psi(\gamma_{\mathbb{A}}) = \gamma_*, \quad \exists g \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}) \tag{4.1}$$

に同値である。定義から (3.3) の和は、$\gamma_*$ をアデール像に持つ $\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})$ で $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}$ が $G(F)$ と交わるものを走る。

**問題 4.1.** $\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})$ が $\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{ell}}$ をアデール像に持つとする。$\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \emptyset$ となるのはどのようなときか。

## 4.2 主等質空間の復習

問題 4.1 のような有理点の存在判定には、Galois 群の作用を備えた主等質空間が有効になる。ここではその要点をさっと復習しておこう。

群 $G$ が集合 $X$ に**作用**している、つまり写像 $G \times X \ni (g, x) \mapsto g.x \in X$ で条件

- $g.(h.x) = (gh).x, \forall g, h \in G, x \in X;$
- $1.x = x, \forall x \in X$

を満たすものが与えられているとする。$X$ 上の関係 $x \sim_G y$ を $y = g.x$ となる $g \in G$ が存在することと定めればこれは同値関係になる。この各同値類を $X$ 内の $G$ **軌道** *(G-orbit)* といい、$X$ 内の $G$ 軌道の集合を $G\backslash X := X/\sim_G$ と書く。

$$X = \coprod_{O \in G\backslash X} O$$

$G\backslash X$ の濃度が 1 のとき $G$ の $X$ への作用は**推移的** *(transitive)* であると言われ、$X$ は $G$ **等質空間** *(G-homogeneous space)* と呼ばれる。このとき、$x \in X$ の**固定化群** *(stabilizer, isotropic subgroup)* を $G_x := \{g \in G \,|\, g.x = x\} \subset G$ と定めれば、

$$G/G_x \ni g.G_x \xrightarrow{\sim} g.x \in X$$

は全単射である。別の $y \in X$ を $y = h.x$, $(h \in G)$ と書けば $G_y = \mathrm{Ad}(h)G_x$ であり、次の可換図式が成立する。

$$\begin{tikzcd} G/G_x \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(h)"'] & X \arrow[d, equal] \\ G/G_y \arrow[r, "\sim"] & X \end{tikzcd}$$

更に $x \in X$ に対して $G_x = \{1\}$ となるとき $G$ の $X$ への作用は**忠実** *(faithful)* あるいは**単純** *(simple)* であると言われ、$X$ は**主** $G$ **等質空間** *(principal $G$-homogeneous space, $G$-torsor)* と呼ばれる。主 $G$ 等質空間 $X, Y$ の間の**射**とは写像 $\varphi : X \to Y$ であって

$$\varphi(g.x) = g.\varphi(x), \forall g \in G, x \in X$$

なるもののことする。こうして定まる主 $G$ 等質空間の圏を $(G\text{-tors})$ と書こう。

さらに第二の群 $\Gamma$ が**主** $G$ **等質空間** $X$ **に作用**する状況を考える。すなわち作用

$$\Gamma \times G \ni (\sigma, g) \longmapsto \sigma(g) \in G, \quad \Gamma \times X \ni (\sigma, x) \longmapsto \sigma(x) \in X$$

が与えられ、

$$\sigma(g.x) = \sigma(g).\sigma(x), \quad \forall \sigma \in \Gamma, g \in G, x \in X$$

が成り立つとする。このような $\Gamma$ 作用付きの主 $G$ 等質空間 $X, Y$ の間の射とは、主 $G$ 等質空間としての射 $\varphi : X \to Y$ で $\Gamma$ 作用と可換なものである。$\Gamma$ 作用付き主 $G$ 等質空間の圏を ${}_\Gamma(G\text{-tors})$ と書く。さて、$X \in {}_\Gamma(G\text{-tors})$ の点 $x \in X$ を止めれば、主 $G$ 等質空間の定義から $\sigma \in \Gamma$ に対して $\sigma(x) = g_\sigma^{-1}.x$ となる $g_\sigma \in G$ が唯一つある。$\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ は

$$g_\sigma \sigma(g_\tau).\sigma\tau(x) = g_\sigma.\sigma(g_\tau.\tau(x)) = g_\sigma.\sigma(x) = x = g_{\sigma\tau}.\sigma\tau(x) \tag{4.2}$$

から $g_{\sigma\tau} = g_\sigma \sigma(g_\tau)$, $\forall \sigma, \tau \in \Gamma$ を満たすので、$G$ に値を持つ $\Gamma$ 上の 1 コサイクルである。$x$ を $h.x \in X$ で取り替えれば

$$\sigma(h.x) = \sigma(h).\sigma(x) = \sigma(h)g_\sigma^{-1}.x = \sigma(h)g_\sigma^{-1}h^{-1}.hx$$

となって、$\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ は $\{hg_\sigma\sigma(h)^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma}$ になる。よって $\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ のコホモロジー類 $\mathrm{inv}(X) \in H^1(\Gamma, G)$ は $x \in X$ によらず定義可能である。次の補題はこれらの定義から明らかであろう。

**補題 4.2.** (a) ${}_\Gamma(G\text{-tors})/$同型 $\ni X \mapsto \mathrm{inv}(X) \in H^1(\Gamma, G)$ は全単射である。
(b) 更に $G$ がアーベル群のとき (従って $\mathrm{H}^1(\Gamma, G)$ も (アーベル) 群構造を持つが)、$X$ が $\Gamma$ 不動点を持つ: $X^\Gamma \neq \emptyset$ ためには $\mathrm{inv}(X) = 0$ が必要十分である。

## 4.3 $G_{\mathrm{sc}}$ での障害 $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)$

問題 4.1 を解く際には半単純単連結群の 1 次の Galois コホモロジー群に対する Hasse 原理が鍵となるので、最初に次の問題を考えることにしよう。

**問題 4.3.** $\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{reg}}$ が $\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})$ のアデール像であるとする。$\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \emptyset$ となるのはどのようなときか。

この問題を主等質空間の言葉で記述しよう。仮に $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})} \cap G(F)$ が空でないとしてみる。

$$\mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}} =: \gamma \in G(F), \quad \exists h \in G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A}). \tag{4.3}$$

$G(F)$ の元は全ての素点で正則半単純ならば正則半単純であるから、$\gamma$ は自動的に正則半単純でその中心化群 $T_\gamma \subset G$ は極大トーラスである。ゆえに

$$\mathrm{Ad}(\delta) \circ \psi : T_\gamma \xrightarrow{\sim}_{\bar{F}} T, \quad \exists \delta \in G_{\mathrm{sc}}^*(\bar{F}). \tag{4.4}$$

さて $F$ の有限次拡大 $L/F$ で

- $\psi : G \xrightarrow{\sim} G^*$ は $L$ 同型で、
- $g\psi(h)^{-1} \in G_{\mathrm{sc}}^*(\mathbb{A}_L)$ かつ $\delta \in G_{\mathrm{sc}}^*(L)$

を満たすものを取る。(4.1) と (4.3) から

$$\gamma_* = \mathrm{Ad}(g\psi(h)^{-1}) \circ \psi(\gamma) \tag{4.5}$$

である。特に $L$ の各素点 $v$ で $\mathrm{Ad}(g_v\psi(h_v)^{-1}) \circ \psi : T_{\gamma,v} \xrightarrow{\sim} T_v$ が得られるので、(4.4) と併せて

$$\omega_v := \mathrm{Ad}(g_v\psi(h_v)^{-1}\delta^{-1}) : T_v \xrightarrow{\sim} T_v \in \Omega(G_v^*, T_v) = \Omega(G_{\mathrm{sc}}^*, T_{\mathrm{sc}})$$

が成り立つ。ここで (4.5) は

$$\gamma_* = \mathrm{Ad}(g_v\psi(h_v)^{-1}\delta^{-1}) \circ \mathrm{Ad}(\delta)\psi(\gamma) = \omega_v(\mathrm{Ad}(\delta)\psi(\gamma))$$

を与え、$\gamma_*$ は (強) 正則だから、上の $\omega_v \in \Omega(G_{\mathrm{sc}}^*, T_{\mathrm{sc}})$ は実は $v$ によらない。そこでその $\mathrm{Norm}(T_{\mathrm{sc}}, G_{\mathrm{sc}}^*)$ での代表元 $w \in G_{\mathrm{sc}}^*(\bar{F})$ を取れば、単準同型 $\eta := \psi^{-1} \circ \mathrm{Ad}(w\delta)^{-1}|_T : T \hookrightarrow G$ であって

$$\eta(\gamma_*) = \gamma = \mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}}$$

となるものが得られる。

この考察を受けて

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}}) := \left\{ (h, \eta) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & h \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}), \\ \text{(ii)} & \eta : T \hookrightarrow G \in \psi^{-1} \circ \mathrm{Ad}(G_{\mathrm{sc}}^*(\bar{F}))|_T \\ & \text{s.t. } \eta(\gamma_*) = \mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}} \end{array} \right\}$$

と定める。$\gamma_*$ は $\gamma_{\mathbb{A}}$ のアデール像であるとしたからこれは空ではなく、$\Gamma$ 作用

$$\sigma(h, \eta) = (\sigma(h), \sigma(\eta) := \sigma \circ \eta \circ \sigma^{-1}), \quad \sigma \in \Gamma$$

を備えている。

**補題 4.4.** $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\rm sc}(\mathbb{A})} \cap G(F)$ が空でないためには、$\widetilde{X}^{\Gamma} \neq \emptyset$ が必要十分である。

**証明**. 必要性。上の考察の $(h, \eta = \psi^{-1} \circ \mathrm{Ad}(w\delta)^{-1})$ が $\Gamma$ 不変なことを見ればよい。仮定から $h \in G(\mathbb{A})$ である。一方、$\sigma \in \Gamma$ に対して

$$\eta^{-1} \circ \sigma(\eta) = \mathrm{Ad}(w\delta) \circ (\psi \circ \sigma(\psi)^{-1}) \circ \mathrm{Ad}(\sigma(w\delta))^{-1} \in \Omega(G_{\rm sc}^*, T_{\rm sc}^*)$$

が正則な $\gamma_*$ を保つ

$$\eta^{-1} \circ \sigma(\eta)(\gamma_*) = \eta^{-1} \circ \sigma(\eta(\gamma_*)) = \eta^{-1}(\sigma(\gamma)) = \gamma_*$$

のだから、$\sigma(\eta) = \eta$ である。逆に $(h, \eta) \in \widetilde{X}^{\Gamma}$ ならば、$(\eta(\gamma_*) = \mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}}) \in G(\bar{F}) \cap G(\mathbb{A}) = G(F)$ である。 $\square$

$\widetilde{X}$ はアーベル群の主等質空間になっていないので次のリダクションを施す。$\widetilde{X}$ には $G_{\rm sc}(\bar{F})$ が左から

$$\delta.(h, \eta) := (\delta h, \mathrm{Ad}(\delta) \circ \eta), \quad \delta \in G_{\rm sc}(\bar{F})$$

と作用する。この作用で $\widetilde{X}$ を割ったものを $X = X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ とおく。

$$X := G_{\rm sc}(\bar{F}) \backslash \widetilde{X} \xrightarrow{\sim} \left\{ G_{\rm sc}(\bar{F}).(h, \eta_0) \;\middle|\; \begin{array}{l} \bullet \;\; h \in G_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}}) \\ \bullet \;\; \mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}} = \psi^{-1}(\gamma_*) \end{array} \right\}.$$

ここで $\eta_0 := \psi^{-1}|_T : T \hookrightarrow G$ と書いている。

**系 4.5.** $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\rm sc}(\mathbb{A})} \cap G(F)$ が空でないためには、$X^{\Gamma} \neq \emptyset$ が必要十分。

**証明**. 補題 4.4 から、$X^{\Gamma}$ が空でなければ $\widetilde{X}^{\Gamma}$ も同様なことを見れば十分。$G_{\rm sc}(\bar{F}).(h, \eta) \in X^{\Gamma}$ とすれば、$\sigma \in \Gamma$ に対して

$$\sigma(h, \eta) = \delta_\sigma^{-1}(h, \eta), \quad \exists \delta_\sigma \in G_{\rm sc}(\bar{F})$$

が成り立つ。特に第一成分に注目して $\sigma(h) = \delta_\sigma^{-1} h$, すなわち $\delta_\sigma = h\sigma(h)^{-1}$ であるから、$\{\delta_\sigma\}_\sigma$ は $G_{\rm sc}(\bar{F})$ 値 1 コサイクルでそのクラスは $\ker^1(F, G_{\rm sc})$ に属する。この群は自明であったから (10 頁参照)、ある $\delta_1 \in G_{\rm sc}(\bar{F})$ があって $\delta_\sigma = \delta_1^{-1}\sigma(\delta_1)$, $(\sigma \in \Gamma)$ が成り立つ。このとき $\delta_1.(h, \eta) \in \widetilde{X}^{\Gamma}$ である。 $\square$

さて、$\widetilde{X}$ には $T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})$ が右から

$$(h, \eta).t := (\eta(t)^{-1}h, \eta), \quad t \in T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})$$

と作用し、これは $X$ への $T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})$ 作用に落ちる。$G_{\rm sc}(\bar{F}).(h, \eta_0), G_{\rm sc}(\bar{F}).(h', \eta_0) \in X$ ならば、$\eta_0(\gamma_*) = \mathrm{Ad}(h')\gamma_{\mathbb{A}} = \mathrm{Ad}(h'h^{-1})\eta_0(\gamma_*)$ から $h'h^{-1} \in \eta_0(T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}}))$ だから、$X$ は $T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})$ 等質空間である。さらに $(\eta(t)^{-1}h, \eta) \in G_{\rm sc}(\bar{F}).(h, \eta)$ であるためには $\eta(t) \in \eta(T_{\rm sc})(\bar{F})$ が必要十分だから、$X$ は主 $T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\rm sc}(\bar{F})$ 等質空間である。$X = X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ の $\mathrm{H}^1(F, T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\rm sc}(\bar{F}))$ でのクラス $\mathrm{inv}(X)$ (補題 4.2 (i) 参照) の (1.7)

$$\mathrm{H}^1(F, T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\rm sc}(\bar{F})) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\widehat{T}_{\rm sc}^{\Gamma})^D$$

による像を $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)$ と書く。系 4.5 と補題 4.2 (ii) から次は明らかである。

**命題 4.6.** $\gamma_{\mathbb{A}}$ が $\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{reg}}$ をアデール像に持つとき、$\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})} \cap G(F)$ が空でないためには $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) = 1$ が必要十分である。

実用上は $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)$ を次のように具体的に書いておくのが便利である。$\psi$ の定義から任意の $\sigma \in \Gamma$ に対して

$$\psi \circ \sigma(\psi)^{-1} = \mathrm{Ad}(u(\sigma)), \quad \exists u(\sigma) \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$$

が成り立つ。$\{\mathrm{Ad}(u_\sigma)\}_{\sigma\in\Gamma}$ は $G^*_{\mathrm{ad}}(\bar{F})$ 値の 1 コサイクルだから、1 コチェイン $\{u(\sigma)\}_{\sigma\in\Gamma}$ のコバウンダリは $Z^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ に属する: $\partial u(\sigma,\tau) \in Z^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$, $(\sigma,\tau \in \Gamma)$. さて $\gamma_*$ が $\gamma_{\mathbb{A}}$ のアデール像のとき、(4.1) の記号で

$$v(\sigma) := gu(\sigma)\sigma(g)^{-1} \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F}), \quad \sigma \in \Gamma \tag{4.6}$$

と定める。$\mathrm{Ad}(v(\sigma)) = \mathrm{Ad}(g) \circ \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1} \circ \mathrm{Ad}(g)^{-1} \circ \sigma^{-1}$ は $T_{\mathrm{sc}}$ を保つから $\{v(\sigma)\}_{\sigma\in\Gamma}$ は $T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ 値 1 コチェインで、$\partial v = \partial u$ を満たす。特にその $\mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma})^D$ での像 $\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ は定義可能である。

**補題 4.7.** $\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})$ が $\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{reg}}$ をアデール像に持つとき、$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) = \mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^{-1}$.

**証明**. $G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})(h, \eta_0) \in X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ を取る。$\mathrm{Ad}(g) \circ \psi(\gamma_{\mathbb{A}}) = \gamma_* = \mathrm{Ad}(\psi(h)) \circ \psi(\gamma_{\mathbb{A}})$ から $\gamma_*^g = \psi(\gamma_{\mathbb{A}}) = \gamma_*^{\psi(h)}$ ゆえ、$t := \psi(h)g^{-1}$ は $T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ に属する。$\sigma \in \Gamma$ に対して

$$\sigma(h, \eta_0) = \delta_\sigma^{-1}.(h, \eta_0).t_\sigma, \quad \delta_\sigma \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}), t_\sigma \in T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$$

と書いたとき、$\{t_\sigma^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma}$ の $\mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\mathrm{sc}}(\bar{F}))$ でのクラスが $\mathrm{inv}(X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}}))$ の定義であった[5]。この等式の第一成分に注目して、

$$\begin{aligned}
t_\sigma =& \eta_0^{-1}(h\sigma(h)^{-1}\delta_\sigma^{-1}) = \psi(h)\psi(\sigma(h))^{-1}\psi(\delta_\sigma)^{-1} \\
=& \psi(h)\big(\psi \circ \sigma(\psi)^{-1} \circ \sigma(\psi(h))\big)\psi(\delta_\sigma)^{-1} \\
=& \psi(h)u(\sigma)\sigma(\psi(h))^{-1}u(\sigma)^{-1}\psi(\delta_\sigma)^{-1} \\
=& tgu(\sigma)\sigma(g)^{-1}\sigma(t)^{-1}u(\sigma)^{-1}\psi(\delta_\sigma)^{-1} \\
=& tv(\sigma)\sigma(t)^{-1}(\psi(\delta_\sigma)u(\sigma))^{-1}
\end{aligned}$$

を得る。一方で第二成分の等式は

$$\psi^{-1} \circ \mathrm{Ad}(u(\sigma))|_T = \sigma(\psi)^{-1}|_T = \sigma(\eta_0) = \psi^{-1} \circ \mathrm{Ad}(\psi(\delta_\sigma))^{-1}|_T$$

と書けるから、$\psi(\delta_\sigma)u(\sigma) \in T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}) \cap G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}) = T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ が従う。これらから補題を得る。 □

[5] $T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ は $X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ に右から作用するので $t_\sigma$ の逆元になる。

## 4.4 $G_{\mathrm{sc}}$ から $G$ へ

完全列 $1 \to T_{\mathrm{sc}} \to T \to D_{G^*} \to 1$ の双対完全列 $1 \to Z(\widehat{G}) \to \widehat{T} \to \widehat{T}_{\mathrm{sc}} \to 1$ (1.3 節参照) の $\Gamma$ コホモロジー長完全列

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow & X_*(Z(\widehat{G}))^\Gamma \longrightarrow X_*(\widehat{T})^\Gamma \longrightarrow X_*(\widehat{T}_{\mathrm{sc}})^\Gamma \\ \longrightarrow & \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma) \longrightarrow \pi_0(\widehat{T}^\Gamma) \longrightarrow \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma) \xrightarrow{(\dagger)} \mathrm{H}^1(\Gamma, Z(\widehat{G})) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma, \widehat{T}) \longrightarrow \dots \end{aligned} \tag{4.7}$$

を取る。この連結射と $\Gamma_v \subset \Gamma$ への制限射たちの直積との合成

$$\pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma) \xrightarrow{(\dagger)} \mathrm{H}^1(\Gamma, Z(\widehat{G})) \longrightarrow \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z(\widehat{G}))$$

の核を $\mathfrak{K}(T)$ で表す。$\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{reg}}$ をアデール像に持つ $\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})$ に対して、$\mathfrak{K}(T) \subset \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma)$ への $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) \in \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma)^D$ の制限を $\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)$ と書き、$\gamma_{\mathbb{A}}$ の *Kottwitz* **障害**と呼ぶ。この節の目的は、可換図式と実簡約群の Galois コホモロジーの考察により、命題 4.6 から次の定義を引き出すことである。

**定理 4.8.** $\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{reg}}$ をアデール像に持つ $\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})$ の $G(\mathbb{A})$ 共役類が $G(F)$ の元を含むためには $\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)$ が消えることが必要十分である。

**証明**. (4.7) と制限射の可換性

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma, Z(\widehat{G})) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \prod_v \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v}) & \longrightarrow & \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z(\widehat{G})) \end{array}$$

から

$$\mathfrak{K}(T) = \ker\Big(\pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma) \to \prod_v \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v}) \to \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z(\widehat{G}))\Big)$$

である。Pontrjagin 双対を取れば、各素点 $v$ での (4.7) の類似の双対

$$\dots \longleftarrow \pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_v})^D \longleftarrow \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v})^D \longleftarrow \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z(\widehat{G}))^D \longleftarrow \dots$$

から

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(T)^D = & \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma)^D \Big/ A\Big(\bigoplus_v \mathrm{im}\big(\mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z(\widehat{G}))^D \to \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v})^D\big)\Big) \\ = & \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma)^D \Big/ A\Big(\bigoplus_v \ker\big(\pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v})^D \to \pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_v})^D\big)\Big) \end{aligned}$$

を得る。ただし、$\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma \hookrightarrow \widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v}$ が引き起こす準同型を $i_v : \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma) \to \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v})$ として、

$$A : \bigoplus_v \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v})^D \ni (\kappa_v)_v \longmapsto \sum_v \kappa_v \circ i_v \in \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma)^D$$

と書いた。よって obs$(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)$ の消滅は

$$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)\in A(\ker B),\quad B:=\bigoplus_v\Big(B_v:\pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v})^D\to\pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_v})^D\Big) \tag{4.8}$$

に同値である。

**主張 4.8.1.** $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\emptyset$ であるためには、$\gamma'_{\mathbb{A}}=\gamma_{\mathbb{A}}^{h_1}\in\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})$ で

(i) $\mathrm{obs}_1(\gamma'_{\mathbb{A}},\gamma_*)=0$;

(ii) $\{h_1\sigma(h_1)^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma}$ の $\mathrm{H}^1(F,G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})$ でのクラスは消えている。

を満たすものがあることが必要十分。

**証明**. 必要性。$\gamma=\mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}}$, $(h\in G(\mathbb{A}))$ が $G(F)$ に属するとする。18 頁と同様に $h=th_1$, $(t\in T_\gamma(\bar{\mathbb{A}}),\ h_1\in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}))$ と書き、$\gamma'_{\mathbb{A}}:=\mathrm{Ad}(h_1)\gamma_{\mathbb{A}}\in\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})}$ とおく。このとき実は $\gamma'_{\mathbb{A}}=\mathrm{Ad}(t)^{-1}\gamma=\gamma$ だから $\mathrm{obs}_1(\gamma'_{\mathbb{A}},\gamma_*)=0$ は明らかで、

$$h_1\sigma(h_1)^{-1}=t^{-1}h\sigma(h)^{-1}\sigma(t)=t^{-1}\sigma(t),\quad \sigma\in\Gamma$$

も分解している。

十分性。条件 (ii) からある $t\in G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}$ があって、$h_1\sigma(h_1)^{-1}=t^{-1}\sigma(t)$, $(\sigma\in\Gamma)$. よって $h:=th_1\in G(\mathbb{A})$ で、条件 (i) から $\gamma_{\mathbb{A}}=\mathrm{Ad}(h)\gamma'_{\mathbb{A}}$ の $G(\mathbb{A})$ 共役類は $G(F)$ の元を含む。 □

この主張をさらに言い換えよう。主張の条件 (i) は補題 4.7 から

$$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)=\mathrm{obs}_1(\gamma'_{\mathbb{A}},\gamma_*)\frac{\mathrm{inv}(\gamma_*,\gamma'_{\mathbb{A}})}{\mathrm{inv}(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})}=\frac{\mathrm{inv}(\gamma_*,\gamma'_{\mathbb{A}})}{\mathrm{inv}(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})} \tag{i$'$}$$

と書くこともできる。一方 $\mathrm{Ad}(g')\circ\psi(\gamma'_{\mathbb{A}})=\gamma_*=\mathrm{Ad}(g)\circ\psi(\gamma)$ は $\mathrm{Ad}(g\psi(h_1))\circ\psi(\gamma'_{\mathbb{A}})$ であるから、$g'=g\psi(h_1)$ と取ってよい。すると

$$\begin{aligned}v'(\sigma)=&g'u(\sigma)\sigma(g')^{-1}=g\psi(h_1)\mathrm{Ad}(u(\sigma))\circ\sigma(\psi(h_1))^{-1}u(\sigma)\sigma(g)^{-1}\\=&g\psi(h_1\sigma(h_1)^{-1})u(\sigma)\sigma(g)^{-1}\\=&\mathrm{Ad}(g)\circ\psi(h_1\sigma(h_1)^{-1})v(\sigma)\end{aligned}$$

だから、(i)$'$ の $\mathrm{inv}(\gamma_*,\gamma'_{\mathbb{A}})/\mathrm{inv}(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})$ は $\{h_1\sigma(h_1)^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma}$ の $\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})$ でのクラスの

$$\varphi:\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})\xrightarrow{\mathrm{Ad}(g)\circ\psi}\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}))\longrightarrow\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\mathrm{sc}}(\bar{F}))\xrightarrow{\sim}\pi_0(\widetilde{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma})^D$$

による像に他ならない。最後にその $\{h_1\sigma(h_1)^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma}$ のクラスは

$$C:\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_g)\longrightarrow\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}))$$

の核に属するが、主張の条件 (ii) はそれが

$$D:\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_g)\longrightarrow\mathrm{H}^1(F,G(\bar{\mathbb{A}})_g)$$

の核にも含まれていることに同値である。結局、主張 4.8.1 は $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\cap G(F)$ が空でないためには、$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)\in\varphi(\ker C\cap\ker D)$ が必要十分なことを主張している。これと (4.8) から、定理は次の主張に帰着される。

**主張 4.8.2.** $A(\ker B) = \varphi(\ker C \cap \ker D)$.

まず (1.8) から次の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \arrow[r, "\mathrm{Ad}(g)\circ\psi"] \arrow[d, "D"'] & \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)\circ\psi"'] & \bigoplus_v \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v})^D \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"] & \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma})^D \\
\mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] & \bigoplus_v \pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_v})^D &
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

第 1 行と第 3 列の合成が $\varphi$ であることと右上のスクエアの可換性から、

$$\begin{aligned}
\varphi(\ker C \cap \ker D) \subset& \varphi(\ker D) \subset \varphi\Big(\ker\Big(\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \to \bigoplus_v \pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_v})^D\Big)\Big) \\
\subset& A(\ker B)
\end{aligned}$$

は直ちにわかる。

逆向きの包含関係を示そう。$\gamma_{\mathbb{A}}$ は $\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{reg}}$ をアデール像に持つのだから、ほとんど全ての $v$ で $\gamma_v$ は $\mathbf{K}_{v,\mathrm{reg}}$ に属し、従って $G_{\mathrm{sc},\gamma_v}$ は $F_v$ 上の不分岐トーラスである (命題 3.3)。特に $T$ を分裂させる有限次 Galois 拡大 $L/F$ を取れば、そのような $v$ では $\mathrm{H}^1(L_w/F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v}(\mathcal{O}_w)) = 0$ が成り立つ。ここで $w$ は $v$ を割る任意の $L$ の素点である。よって 4 頁と同様に

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) &\simeq \mathrm{H}^1(L/F, G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A}_L)_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \\
&\simeq \varinjlim_S \Big(\bigoplus_{v\in S} \mathrm{H}^1(L_w/F_v, G_{\mathrm{sc}}(L_w)_{\gamma_v}) \times \prod_{v\notin S} \mathrm{H}^1(L_w/F_v, G_{\mathrm{sc}}(\mathcal{O}_w)_{\gamma_v})\Big) \\
&\simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^1(L_w/F_v, G_{\mathrm{sc}}(L_w)_{\gamma_v}) \simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v})
\end{aligned}$$

が得られる。最初と最後の同型は「インフレーション・制限」完全列 [Ser79, VII.6] によるものである。これと非アルキメデス素点 $v$ での Kneser の消滅定理 $\mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc}}) = \{1\}$ [Kne65a], [Kne65b] から

$$C : \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v}) \longrightarrow \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc}}) \simeq \bigoplus_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc}})$$

と見なせるから

$$\begin{aligned}
\ker C = \bigoplus_{v|\infty} \ker\big(\mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v}) \to \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc}})\big) \oplus \bigoplus_{v\nmid\infty} \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v}) \\
\supset \bigoplus_{v\nmid\infty} \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v})
\end{aligned}$$

である。ここで再び (4.9) から

$$\varphi : \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \to \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, T_{\mathrm{sc}}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_v \pi_0(\widetilde{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v})^D \xrightarrow{A} \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma})^D$$

だから

$$\begin{aligned}\varphi(\ker C \cap \ker D) &\supset \varphi\Big(\bigoplus_{v \nmid \infty} \ker\big(\mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v}) \to \mathrm{H}^1(F_v, G_{\gamma_v})\big)\Big) \\ &= \bigoplus_{v \nmid \infty} \ker\big(\pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v})^D \to \pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_v})^D\big) = \bigoplus_{v \nmid \infty} \ker B_v\end{aligned}$$

を得る。よって次を示せば十分である。

**主張 4.8.3.** $A(\bigoplus_{v \nmid \infty} \ker B_v) = A(\ker B)$.

$\ker B_f := \bigoplus_{v \nmid \infty} \ker B_v$, $\ker B_\infty := \bigoplus_{v \mid \infty} \ker B_v$ と略記する。$\ker B$ は $\ker B_\infty$ と $\ker B_f$ の直積だから

$$\begin{tikzcd} \ker B \arrow[r, "A"] \arrow[d, "p_\infty"'] & A(\ker B) \arrow[d, "A(p)"] \\ \ker B_\infty \arrow[r, "A"] & A(\ker B)/A(\ker B_f) \end{tikzcd}$$

は可換である。主張は $A(p) \circ A = 0$ に同値だから $A \circ p_\infty = 0$, すなわち

$$p_\infty(\ker A \cap \ker B) = \ker B_\infty$$

を示せばよい。そこで各行が完全系列である可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[ddd] & \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[d, "同型"'] & \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})) \arrow[d, "同型"] \\ & \bigoplus_v \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v})^D \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"] & \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma})^D \arrow[d] \\ & \bigoplus_v \pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_v})^D \arrow[r] & \pi_0(\widehat{T}^{\Gamma})^D \\ \mathrm{H}^1(F, T) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[u, "同型"] & \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})) \arrow[u, "同型"'] \end{tikzcd}$$

を考えよう。右上のスクエアの可換性から $\ker A$ は $\mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}})$ の $\bigoplus_v \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v})^D$ での像である。さらに左のスクエアの可換性を使って $\ker A \cap \ker B$ は $\ker(\mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}}) \to \mathrm{H}^1(F, T))$ の $\bigoplus_v \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v})^D$ での像に等しいことがわかる。次に $1 \to T_{\mathrm{sc}} \to T \to D_G \to 1$ の Galois コ

ホモロジー完全列のなす可換図式

$$\begin{tikzcd}
D_G(F) \arrow[r, "a"] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & \mathrm{H}^1(F,T) \arrow[d] \\
D_G(F_\infty) \arrow[r] \arrow[d, "(\dagger)"'] & \bigoplus_{v|\infty}\mathrm{H}^1(F_v,T_{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & \bigoplus_{v|\infty}\mathrm{H}^1(F_v,T) \arrow[d] \\
\bigoplus_{v|\infty}\mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z(\widehat{G}))^D \arrow[r, "d"] & \bigoplus_{v|\infty}\pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v})^D \arrow[r, "\bigoplus_{v|\infty}B_v"] & \bigoplus_{v|\infty}\pi_0(\widehat{T}^{\Gamma_v})^D
\end{tikzcd}$$

を考える。問題の $\ker(\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}})\to\mathrm{H}^1(F,T))$ の像の $p_\infty$ による行き先は $\mathrm{im}(c\circ b\circ a)$ で、$\ker B_\infty=\mathrm{im}\, d$ だから、第一列の射の合成が全射なことを示せばよい。

ここでアルキメデス素点 $v$ での $\mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z(\widehat{G}))^D$ は次のように計算できる。$D_G$ に対する (1.2) から $\mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z(\widehat{G}))\simeq\mathrm{H}^2(\Gamma_v,X^*(D_{G^*}))$ である。一方 $\Gamma_v\hookrightarrow\Gamma_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ は有限群なので Tate コホモロジー群の Tate・中山双対性

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathrm{H}^2(\Gamma_v,X^*(D_{G^*}))\times\widehat{\mathrm{H}}^0(F_v,D_G)\longrightarrow\mathrm{H}^2(F_v,\mathbb{G}_m)\subset\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

があり、標準同型 $\mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z(\widehat{G}))^D=\mathrm{H}^0(F_v,D_G)=D_G(F_v)/\mathrm{N}_{\bar{F}_v/F_v}D_G(\bar{F}_v)$ が従う。特に上の図式で射 $(\dagger)$ は自然な射影 $D_G(F_v)\twoheadrightarrow D_G(F_v)/\mathrm{N}_{\bar{F}_v/F_v}D_G(\bar{F}_v)$, $(v|\infty)$ たちの直和である。$\prod_{v|\infty}\mathrm{N}_{\bar{F}_v/F_v}D_G(\bar{F}_v)\subset D_G(F_\infty)$ は開部分群で $D_G(F)\subset D_G(F_\infty)$ は稠密だから、図式の第一列の射の合成は全射である。 □

## 4.5 $G(F)$ 共役から $G(\mathbb{A})$ 共役へ

完全列 (4.7) とその局所類似のなす可換図式

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\longrightarrow X_*(\widehat{T})^\Gamma \arrow[r] & X_*(\widehat{T}_{\mathrm{sc}})^\Gamma \arrow[r] & \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma) \arrow[r] & \pi_0(\widehat{T}^\Gamma) & \\
\longrightarrow & \pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\Gamma,Z(\widehat{G})) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\Gamma,\widehat{T}) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
& \prod_v\pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma_v}) \arrow[r] & \prod_v\mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z(\widehat{G})) \arrow[r] & \prod_v\mathrm{H}^1(\Gamma_v,\widehat{T}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

から完全列

$$\begin{aligned}
&\longrightarrow X_*(\widehat{T})^\Gamma\longrightarrow X_*(\widehat{T}_{\mathrm{sc}})^\Gamma\longrightarrow\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)\longrightarrow\pi_0(\widehat{T}^\Gamma)\\
&\longrightarrow\mathfrak{K}(T)\longrightarrow\ker^1(F,Z(\widehat{G}))\longrightarrow\ker^1(F,\widehat{T})
\end{aligned}$$

が得られる。$T$ は楕円的ゆえ $X_*(\widehat{T}_{\mathrm{sc}})^\Gamma=0$ となることに注意して、この位数を取れば

$$\frac{|\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)||\mathfrak{K}(T)||\ker^1(F,\widehat{T})|}{|\pi_0(\widehat{T}^\Gamma)||\ker^1(F,Z(\widehat{G}))|}=\left|\mathrm{cok}[\ker^1(F,Z(\widehat{G}))\to\ker^1(F,\widehat{T})]\right|$$

すなわち、事実 2.1 と併せて

$$\frac{\left|\mathrm{cok}[\ker^1(F, Z(\widehat{G})) \to \ker^1(F, \widehat{T})]\right|}{|\mathfrak{K}(T)|} = \frac{\tau(G)}{\tau(T)} \tag{4.10}$$

である。また有限群の指標の直交関係を用いて定理 4.8 を書き直すと、

$$\frac{1}{|\mathfrak{K}(T)|} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(T)} \langle \mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*), \kappa \rangle = \begin{cases} 1 & \gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \emptyset \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{4.11}$$

となる。これらから (3.3) は

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{cok}[\ker^1(F, Z(\widehat{G})) \to \ker^1(F, \widehat{T})]\right| \sum_{\substack{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \subset \psi^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(\mathbb{A}) \\ \gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \emptyset}} O_\gamma(f) \\
&\overset{(4.11)}{=} \frac{\left|\mathrm{cok}[\ker^1(F, Z(\widehat{G})) \to \ker^1(F, \widehat{T})]\right|}{|\mathfrak{K}(T)|} \sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \subset \psi^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(\mathbb{A})} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(T)} \langle \mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*), \kappa \rangle O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f) \\
&\overset{(4.10)}{=} \frac{\tau(G)}{\tau(T)} \sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \subset \psi^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(\mathbb{A})} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(T)} \langle \mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*), \kappa \rangle O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f)
\end{aligned}$$

と書ける。ここで $f = \bigotimes_v f_v$, ($f_v \in \mathcal{H}(G(F_v))$ と書けば、ほとんど全ての $v$ で

- $G_v = G \otimes_F F_v$ は不分岐。
- $\gamma_* \in \mathbf{K}_{v,\mathrm{reg}}$.
- $f_v$ は $\mathbf{K}_v$ の特性函数。

が成り立っている。よって事実 3.3 から上の $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}$ についての和は実は有限で、和の順序の交換が許される。結局、(3.2) 全体は

$$T_{\mathrm{ell}}(f) = \tau(G) \sum_{\gamma_*^{G^*} \in \varGamma^{\mathrm{st}}(G^*(F))_{\mathrm{ell}}} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(T)} \sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \in \psi^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(\mathbb{A})} \langle \mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*), \kappa \rangle O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f). \tag{4.12}$$

となる。

## 5 内視論

次のステップは (4.12) の右辺の $(\gamma_*, \kappa)$ についての和を $G$ の楕円的内視群 $H$ と $\gamma_H \in H(F)$ についての和で置き換えることである。

## 5.1 内視データとノルム写像

内視群は内視データと呼ばれる四つ組のメンバーの一つである。すなわち $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ が $G$ の**内視データ** *(endoscopic datum)* とは、

(i) $H$ は $F$ 上の準分裂な連結簡約群。これに対しても $F$ 分裂 $\mathbf{spl}_H = (B_0^H, T_0^H, \{Y_\beta\})$, $L$ 群データ ${}^L H = \widehat{H} \rtimes_{\rho_H} W_F$ 及び $\widehat{H}$ の $\Gamma$ 安定な分裂 $\mathbf{spl}_{\widehat{H}} = (\mathcal{B}_H, \mathcal{T}_H, \{\mathcal{Y}_{\beta^\vee}\})$ を止めておく。

(ii) 位相群の分裂拡大 $1 \to \widehat{H} \to \mathcal{H} \xrightarrow{p} W_F \to 1$ で、その切断 $c : W_F \hookrightarrow \mathcal{H}$ がある $\mathrm{Int}(\widehat{H})$ 値 1 コサイクル $\{\bar{h}_w\}_{w \in W_F}$ に対して

$$\mathrm{Ad}(c(w))|_{\widehat{H}} = \mathrm{Ad}(\bar{h}_w) \circ \rho_H(w), \quad \forall w \in W_F$$

を満たすもの。

(iii) $s \in \widehat{G}$ は半単純元。

(iv) $\xi : \mathcal{H} \hookrightarrow {}^L G$ は $W_F$ の拡大の埋め込み ($L$ **埋め込み**) で条件

(a) $\xi(\widehat{H}) = \widehat{G}_s$.

(b) $Z(\widehat{G})$ 値 1 コサイクル $\{a(w)\}_{w \in W_F}$ でそのクラスが

$$\ker^1(W_F, Z(\widehat{G})) := \ker[\mathrm{H}^1(W_F, Z(\widehat{G})) \to \prod_v \mathrm{H}^1(W_{F_v}, Z(\widehat{G}))]$$

に属するものがあって、

$$\mathrm{Ad}(s)\xi(h) = a(p(h))\xi(h), \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

を満たすもの。

なることとする。内視データ $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ から $(H', \mathcal{H}', s', \xi')$ への**同型**とは、$g \in \widehat{G}$ で

(i) $\mathrm{Ad}(g)\xi(\mathcal{H}) = \xi'(\mathcal{H}')$;

(ii) $\mathrm{Ad}(g)s \in s' Z(\widehat{G})$

を満たすものである。$G$ の内視データの同型類の集合を $\mathcal{E}(G)$ と書く。内視データ $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ が**楕円的** *(elliptic)* とは $\xi(Z(\widehat{H})^\Gamma)^0 \subset Z(\widehat{G})$ なることとする。$\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)$ で $\mathcal{E}(G)$ 内の楕円的な元のなす部分集合を表す。

**補題 5.1.** *$G$ の導来群が単連結ならば、その内視群 $H$ の導来群も単連結である。*

**証明**. $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ であるためには、$X_*(T_{0,\mathrm{der}}) = \mathbb{Z}\langle \Delta^\vee(B_0, T_0)\rangle$ が必要十分である。$X_*(T_{0,\mathrm{der}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は $\Delta^\vee = \Delta^\vee(B_0, T_0)$ で張られるから、これを双対群の言葉で書けば

$$X^*(\mathcal{T}) \cap \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \Delta^\vee = \mathbb{Z}\langle \Delta^\vee \rangle$$

となる。ただし、$\Delta^\vee$ は $\mathcal{T}$ の $\mathcal{B}$ での単純ルートの集合と同一視されている (1.3.1 節参照)。さて、必要なら内視データを $\mathrm{Ad}(\widehat{G})$ でひねって $s \in \xi(\mathcal{T}_H) = \mathcal{T}$ であるとしてよい。すると $\Delta_s^\vee := \{\alpha^\vee \in \Delta^\vee \,|\, \alpha^\vee(s) = 1\}$ として

$$X^*(\mathcal{T}) \cap \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \Delta_s^\vee = \mathbb{Z}\langle \Delta_s^\vee \rangle$$

である。内視データの定義 (iv) (a) から $\xi^*(\Delta_s^\vee)$ は $\mathcal{T}_H$ の $\mathcal{B}_H$ での単純ルートの集合 $\Delta_H^\vee$ に等しいから、これは

$$X^*(\mathcal{T}_H) \cap \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\Delta_H^\vee) = \mathbb{Z}\langle \Delta_H^\vee \rangle,$$

すなわち $H_{\mathrm{der}} = H_{\mathrm{sc}}$ を意味する。 □

**注意 5.2.** 上の証明では $\mathrm{Ad}(s)$ が $\mathcal{T}$ の各ルートのルート空間を保つことから、$X^*(\mathcal{T}) \cap \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \Delta_s^\vee = \mathbb{Z}\langle \Delta_s^\vee \rangle$ を引き出している。従ってルート空間を並べ替える自己同型を扱うひねり付き内視論の場合には補題 5.1 は成立しない。これによりひねり付き内視論では $G$ の「$z$ 拡大」の代わりに内視群 $H$ の方の $z$ 拡大を扱うことになる [KS99, 2.2]。

**系 5.3.** *$G$ の導来群が単連結ならば、その内視データ $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ において $\mathcal{H}$ は ${}^L H$ に同型である。*

**証明**. $1 \to \widehat{H} \to \mathcal{H} \xrightarrow{p} W_F \to 1$ の分解 $c : W_F \to \mathcal{H}$ を取り、$\rho_{\mathcal{H}}(w) := \mathrm{Ad}(c(w))|_{\widehat{H}}$ とおく。仮定から各 $w \in W_F$ に対して $h_w \in \widehat{H}$ があって

$$\rho_{\mathcal{H}}(w) = \mathrm{Ad}(h_w) \circ \rho_H(w)$$

が成り立つ。ここで $\{\mathrm{Ad}(h_w)\}_{w \in W_F}$ は $\mathrm{Int}(\widehat{H})$ 値 1 コサイクルだが、$\{h_w\}_{w \in W_F}$ 自身は非自明なコバウンダリ

$$\partial h_{v,w} = h_v \rho_H(v)(h_w) h_{vw}^{-1} \in Z(\widehat{H}), \quad v,\, w \in W_F$$

を持ちうる。しかし補題 5.1 と補題 1.3 から $Z(\widehat{H})$ はトーラスだから、$\mathrm{H}^2(W_F, Z(\widehat{H})) = 0$ である (事実 1.2)。よって $Z(\widehat{H})$ 値 1 コチェイン $\{z_w\}_{w \in W_F}$ で $\partial h_{v,w} = \partial z_{v,w}^{-1}$ となるものがある。言い換えれば $\{h'_w := h_w z_w\}_{w \in W_F}$ は $\widehat{H}$ 値 1 コサイクルである。そこで

$$\mathcal{H} \ni h \cdot c(w) \longmapsto h h'_w \rtimes w \in {}^L H$$

とおけば、これが求める同型を与える。 □

$G^*$ 内の Borel 対 $(B, T)$ に対して $\mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Int}(G^*)$ で $\mathrm{Ad}(g)(B) = B_0$, $\mathrm{Ad}(g)(T) = T_0$ となるものが存在し、さらにその $T$ への制限 $\eta_{B,T} = \mathrm{Ad}(g)|_T : T \xrightarrow{\sim} T_0$ は $(B, T)$ から一意に定まる。これを $T$ の**擬対角化** *(pseudo-diagonalization)* という。一方、同一視 $\mathcal{T} = \widehat{T}_0$,

$\mathcal{T}_H = \widehat{T}_0^H$ により $\xi : \mathcal{T}_H \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$ の双対同型 $\xi^* : T_0 \xrightarrow{\sim} T_0^H$ が定まる。よって、Borel 対 $(B,T) \subset G^*$, $(B_H, T_H) \subset H$ に対して同型

$$A_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\eta_{B_H,T_H}} T_0^H \xrightarrow{\xi^{*-1}} T_0 \xrightarrow{\eta_{B,T}^{-1}} T$$

が得られる。$G$ の半単純共役類の集合を $\mathcal{C}\ell_{ss}(G)$ と書けば、$\mathcal{C}\ell_{ss}(G^*) \ni C \mapsto C \cap T \in T/\Omega(G^*,T)$ は全単射だから、上は写像

$$\mathcal{A}_{H/G} : \mathcal{C}\ell_{ss}(H) \xrightarrow{\sim} T_H/\Omega(H,T_H) \xrightarrow{A_{B,B_H}} T/\Omega(G^*,T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}\ell_{ss}(G^*) = \mathcal{C}\ell_{ss}(G)$$

を与える。$\gamma_H \in H$ はその共役類の $\mathcal{A}_{H/G}$ による像が正則半単純なとき、$G$ **正則**といわれる。$H(F)$ 内の $G$ 正則元の集合を $H(F)_{G\text{-reg}}$、その中の $H(F)$ 共役類および安定共役類の集合を各々$\mathit{\Gamma}_G(H(F))$, $\mathit{\Gamma}_G^{\mathrm{st}}(H(F))$ と書く。

**補題 5.4.** $G$ の導来群は単連結であるとする。$H$ の Borel 対 $(B_H, T_H)$ で $T_H$ が $F$ 上定義されているものに対して、$G^*$ の Borel 対 $(B,T)$ で対応する同型 $A_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T$ が $F$ 上定義されているものが $\mathfrak{A}(T/F)$ 共役を除いてただ一つある。

**証明**. $G^*$ の勝手な Borel 対 $(B',T')$ で $T'$ が $F$ 上定義されているものを取る。対応して得られる同型を $\eta' : T_H \xrightarrow{\sim} T'$ と書けば、

$$\sigma(\eta') : (\sigma(B_H), T_H) \xrightarrow{\sigma^{-1}} (B_H, T_H) \xrightarrow{\eta'} (B', T') \xrightarrow{\sigma} (\sigma(B'), T'), \quad \sigma \in \Gamma$$

(本当はBorel部分群の間の射は存在しないが、データとして書き添えている。) は $A_{\sigma(B'),\sigma(B_H)} : T_H \xrightarrow{\sim} T'$ に一致する。$w_H(\sigma) \in \Omega(H,T_H)$, $w(\sigma) \in \Omega(G^*,T')$ を $\sigma(B_H) = w_H(\sigma)(B_H)$, $\sigma(B') = w(\sigma)(B')$ なるものとすれば

$$\sigma(\eta') = w(\sigma) \circ \eta' \circ w_H(\sigma)^{-1} = w(\sigma)\eta'(w_H(\sigma)^{-1}) \circ \eta'$$

ゆえ、$w_\sigma := w(\sigma)\eta'(w_H(\sigma)^{-1}) \in \Omega(G^*,T')$ として $\{w_\sigma = \sigma(\eta') \circ \eta'^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma}$ は $\Omega(G^*,T')$ 値の 1 コサイクルである。

さて強 $G$ 正則な $\gamma \in T_H(F)$ を取り、$\delta := \eta(\gamma) \in T'(\bar{F})$ とおけば

$$\sigma(\delta) = \sigma(\eta(\gamma)) = \sigma(\eta)(\gamma) = \sigma(\eta) \circ \eta^{-1}(\delta) = w_\sigma(\delta), \quad \sigma \in \Gamma.$$

すなわち $\delta \in T'(\bar{F})$ の共役類は $F$ 上定義されている。$G^*$ は準分裂でその導来群は単連結だから、事実 3.4 からこの共役類は $F$ 有理点 $g^{-1}\delta g \in G(F)$, $\exists g \in G(\bar{F})$ を持つ。このとき

$$\mathrm{Ad}(g\sigma(g)^{-1})w_\sigma(\delta) = \mathrm{Ad}(g)\sigma(g^{-1}\delta g) = \mathrm{Ad}(g)(g^{-1}\delta g) = \delta, \quad \sigma \in \Gamma$$

で $\delta$ は強正則ゆえ、$w_\sigma = \mathrm{Ad}(\sigma(g)g^{-1})$, $\sigma \in \Gamma$ を得る。そこで $(B,T) := \mathrm{Ad}(g^{-1})(B',T')$ とおけば $\eta := \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \eta' = A_{B,B_H}$ は

$$\sigma(\eta) = \mathrm{Ad}(\sigma(g)^{-1}) \circ w_\sigma \circ \eta' = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \eta' = \eta, \quad \sigma \in \Gamma$$

より $F$ 上定義されている。

次に $A_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T$, $A_{B',B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T'$ が共に $F$ 有理的ならば、定義から $A_{B',B_H} \circ A_{B,B_H}^{-1} = \eta_{B',T'}^{-1} \circ \eta_{B,T}$ は $\mathrm{Ad}(g)|_T$, $(g \in G(\bar{F}))$ と書け、しかも $F$ 同型だから $g \in \mathfrak{A}(T/F)$ である。 □

この $F$-同型 $A_{B,B_H}$ を $\eta=\eta_{B,B_H}$ と書き $T_H$ の $G^*$ への**許容埋め込み** *(admissible embedding)* という。これにより $\mathcal{A}_{H/G}$ は $\Gamma$ 作用と可換であり、特に

$$\mathcal{A}_{H/G}: \varGamma_G^{\mathrm{st}}(H(F)) \longrightarrow \varGamma^{\mathrm{st}}(G^*(F))$$

を与える。$\psi: G \xrightarrow{\sim} G^*$ と併せて図式

$$\varGamma_G^{\mathrm{st}}(H(F)) \xrightarrow{\mathcal{A}_{H/G^*}} \varGamma^{\mathrm{st}}(G^*(F)) \xleftarrow{\psi} \varGamma^{\mathrm{st}}(G(F))$$

が得られた。$\gamma_H \in H(F)_{G\text{-reg}}$ と $\gamma \in G(F)_{\mathrm{reg}}$ が $\psi(\gamma^G)=\mathcal{A}_{H/G^*}(\gamma_H)$ を満たすとき、$\gamma_H$ は $\gamma$ の**像** *(image)* であるという。

**補題 5.5.** $(H,\mathcal{H},s,\xi)$ を $G$ の楕円的内視データとする。$\gamma_H \in H(F)_{\mathrm{ell}}$ ならば $\mathcal{A}_{H/G}(\gamma_H^H)$ も楕円的である。

**証明**. $T_H := H_{\gamma_H}$ は $H$ の楕円的極大トーラスゆえ 2 節から

$$\begin{aligned} X_*(\widehat{T}_H)^{\Gamma}\otimes_{\mathbb{Q}} =& X^*(T_H)_F\otimes\mathbb{Q} = X^*(D_H)_F\otimes\mathbb{Q} = X_*(Z(\widehat{H})^0)^{\Gamma}\otimes\mathbb{Q} \\ =& X_*((Z(\widehat{H})^{\Gamma})^0)\otimes\mathbb{Q} \end{aligned}$$

である。$\eta_{B,B_H}: T_H \xrightarrow{\sim}_F T$ を $T_H$ の $G^*$ への許容埋め込みとしてこの両辺に $(\eta^*_{B,B_H})^{-1}: \widehat{T}_H \xrightarrow{\sim} \widehat{T}$ を施せば、楕円的内視データの定義から

$$\begin{aligned} X_*(\widehat{T})^{\Gamma}\otimes_{\mathbb{Q}} =& X_*\big(\eta^*_{B,T}\circ\xi\circ(\eta^*_{B_H,T_H})^{-1}(Z(\widehat{H})^{\Gamma})^0\big)\otimes\mathbb{Q} \\ =& X_*\big(\eta^*_{B,T}\big(\xi(Z(\widehat{H})^{\Gamma})^0\big)\big)\otimes\mathbb{Q} \\ \subset& X_*(Z(\widehat{G})^{\Gamma})\otimes\mathbb{Q} = X_*(Z(\widehat{G}))^{\Gamma}\otimes\mathbb{Q} \end{aligned}$$

となって $X^*(T)_F\otimes\mathbb{Q}=X^*(D_G)_F\otimes\mathbb{Q}$ を得る。すなわち $T$ は $G$ の楕円的極大トーラスである。 □

これにより $(H,\mathcal{H},s,\xi)$ が楕円的な場合には、上の図式は

$$\varGamma_G^{\mathrm{st}}(H(F))_{\mathrm{ell}} \xrightarrow{\mathcal{A}_{H/G}} \varGamma^{\mathrm{st}}(G^*(F))_{\mathrm{ell}} \xleftarrow{\psi} \varGamma^{\mathrm{st}}(G(F))_{\mathrm{ell}}$$

に制限される。

## 5.2 $(H,s,\xi;\gamma_H)$ から $(\gamma_*,\kappa)$ へ

以下でこの節では常に $G$ の導来群は単連結であるとする。

- $G$ の楕円的内視データ $(H,\mathcal{H},s,\xi)$ と、
- $\gamma_H^H \in \varGamma_G^{\mathrm{st}}(H(F))_{\mathrm{ell}}$

を固定する。系 5.3 から $\mathcal{H} = {}^L H$ であるとしてよい。$T_H := H_{\gamma_H}$ の許容埋め込み $\eta_{B,B_H}$ : $T_H \xrightarrow{\sim}_F T \subset G^*$ を取り、$\gamma_* := \eta_{B,B_H}(\gamma_H)$ とおく。その安定共役類 $\gamma_*^{G^*} \in \mathit{\Gamma}^{\rm st}(G^*(F))_{\rm ell}$ は $\gamma_H^H$ のみで定まる。

**補題 5.6.** $G^*$ の Borel 対 $(B, T)$ で $T$ が $F$ 上定義されているものに対して、$W_F$ の拡大としての埋め込み (つまり $W_F$ への射影と可換な単準同型) $\xi_T : {}^L T \hookrightarrow {}^L G$ で $\xi_T|_{\widehat{T}} = (\eta_{B,T}^*)^{-1}$ : $\widehat{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$ となるものが、$W_F$ 上の $\widehat{T}$ 値 1 コサイクル倍を除いてただ一つある。

**証明**. これは系 5.3 と同じ議論で証明できる。$\eta_{B,T} : T \xrightarrow{\sim} T_0$ は $G^*$ の内部自己同型の制限であったから、$\omega_T(\sigma) := \eta_{B,T} \circ \sigma(\eta_{B,T})^{-1}$, $(\sigma \in \Gamma)$ は $\Omega(G^*, T_0)$ に値を持つ 1 コサイクルである。$\Omega(G^*, T_0) = \Omega(\widehat{G}, \mathcal{T})$ と同一視すれば、

$$\omega_T(\sigma) = (\eta_{B,T}^*)^{-1} \circ \rho_T(\sigma) \circ \eta_{B,T}^* \circ \rho_G(\sigma)^{-1}, \quad \sigma \in \Gamma$$

となる。$\Omega(\widehat{G}, \mathcal{T})$ の ${\rm Norm}(\mathcal{T}, \widehat{G})$ での完全代表系 $\{n(\omega) \,|\, \omega \in \Omega(\widehat{G}, \mathcal{T})\}$ を止め、$W_F \to \Gamma$ で $\sigma$ に行く $w$ に対して $n_T(w) := \omega_T(\sigma)$ とおく。これのコバウンダリ

$$\partial n_T(v, w) = n_T(v)\rho_G(w)(n_T(w))n_T(vw)^{-1}$$

は $\mathcal{T}$ 値 2 コサイクルゆえ、事実 1.2 から $\widehat{T}$ 値 1 コチェイン $\{t(w)\}_{w \in W_F}$ があって $\partial n_T(v, w) = t(v)^{-1}\rho_G(v)(t(w))^{-1}t(vw)$, $(v, w \in W_F)$ となるものがある。このとき

$$\xi_T : {}^L T \ni t \rtimes w \longmapsto (\eta_{B,T}^*)^{-1}(t)t(w)n_T(w) \rtimes w \in {}^L G$$

は求める埋め込みを与える。

次に $\xi_T, \xi'_T : {}^L T \hookrightarrow {}^L G$ が共に補題の条件を満たせば、

$${\rm Ad}(\xi_T(w))|_{\mathcal{T}} = (\eta_{B,T}^*)^{-1} \circ \rho_T(w) \circ \eta_{B,T}^* = {\rm Ad}(\xi'_T(w))|_{\mathcal{T}}, \quad w \in W_F$$

ゆえ、$\widehat{T}$ 値 1 コサイクル $\{t(w)\}_{w \in W_F}$ があって $\xi'_T(w) = (\eta_{B,T}^*)^{-1}(t(w))\xi_T(w)$, $(w \in W_F)$ と書ける。 □

この補題の $\xi_T$ を ${}^L T$ の ${}^L G$ への**許容埋め込み**という。さて、上の $T, T_H$ の $L$ 群の許容埋め込み $\xi_T : {}^L T \hookrightarrow {}^L G$, $\xi_{T_H} : {}^L T_H \hookrightarrow {}^L H$ を取り、$s_T := \xi_T^{-1}(s) \in \widehat{T}$ とおく。$\xi_{T_H}(w) = w \ltimes h_w$, $(h_w \in \widehat{H})$ と内視データの定義の (a) から

$${\rm Ad}(\xi \circ \xi_{T_H}(w))s = {\rm Ad}(\xi(w)) \circ {\rm Ad}(h_w)s = {\rm Ad}(\xi(w))s$$

である。一方 $\xi_T$, $\xi \circ \xi_{T_H} \circ \eta_{B,B_H}^*$ は共に ${}^L T$ の許容埋め込みだから、$\widehat{T}$ 値 1 コサイクル $\{t(w)\}_{w \in W_F}$ があって

$$\xi \circ \xi_{T_H}(w) = (\eta_{B,T}^*)^{-1}(t(w))\xi_T(w), \quad w \in W_F$$

と書ける。よって、

$$\begin{aligned}\rho_T(w)s_T =&\mathrm{Ad}(w)\xi_T^{-1}(s) = \xi_T^{-1}(\mathrm{Ad}(\xi_T(w))s)\\ =&\xi_T^{-1}\Big(\mathrm{Ad}\big((\eta_{B,T}^*)^{-1}(t(w))^{-1}\big)\circ\mathrm{Ad}\big(\xi\circ\xi_{T_H}(w)\big)s\Big)\\ =&\mathrm{Ad}(t(w))^{-1}\circ\xi_T^{-1}(\mathrm{Ad}(\xi(w))s)\\ =&\xi_T^{-1}(\mathrm{Ad}(\xi(w))s)\end{aligned}\tag{5.1}$$

が成り立つ。

さて、内視データの定義の (c) によれば $Z(\widehat{G})$ 値 1 コサイクル $\{a(w)\}_{w\in W_F}$ でそのクラスが $\ker^1(W_F, Z(\widehat{G}))$ に属するものがあって

$$s\xi(w)s^{-1}\xi(w)^{-1} = a(w),\quad w\in W_F$$

が成り立っていた。これを $\xi_T^{-1}$ で引き戻すと、上から

$$\partial s_T(w) = s_T\rho_T(w)(s_T)^{-1} = a(w),\quad w\in W_F$$

となる。$L$ 作用 $\rho_T$ は $W_F \to \Gamma$ を経由するので、これは特に $a$ が実は $\Gamma$ 上の 1 コサイクル $\{a(\sigma)\}_{\sigma\in\Gamma}$ の $W_F$ へのインフレーションであることを意味し、さらにそのクラスは $\ker^1(F, Z(\widehat{G}))$ に属する。つまり $\kappa := s_T Z(\widehat{G})\in\widehat{T}/Z(\widehat{G})$ は

$$\mathfrak{K}(T) = \ker\Big(\pi_0((\widehat{T}/Z(\widehat{G}))^\Gamma)\longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma, Z(\widehat{G}))\longrightarrow\prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z(\widehat{G}))\Big)$$

に属する。ここで $T$ は楕円的なので $X_*(\widehat{T}/Z(\widehat{G}))^\Gamma\otimes\mathbb{Q} = X^*(T_{\mathrm{sc}})\otimes\mathbb{Q} = 0$ ゆえ、$\pi_0((\widehat{T}/Z(\widehat{G}))^\Gamma)$ と $(\widehat{T}/Z(\widehat{G}))^\Gamma$ は同じものである。

## 5.3 $(\gamma_*, \kappa)$ から $(H, s, \xi; \gamma_H)$ へ

今度は逆に

- $\gamma_*^{G^*}\in\varGamma^{\mathrm{st}}(G^*(F))_{\mathrm{ell}}$ と
- $T := G^*_{\gamma_*}$ として $\kappa\in\mathfrak{K}(T)$

が与えられているとする。やはり $T$ は楕円的だから $\kappa\in\pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma) = (\widehat{T}/Z(\widehat{G}))^\Gamma$ は $\kappa = s_T Z(\widehat{G}),\ \exists s_T\in\widehat{T}$ と書ける。許容埋め込み $\xi_T : {}^LT\hookrightarrow {}^LG$ を取り、

$$s := \xi_T(s_T),\quad \widehat{H} := \widehat{G}_s,\quad \mathcal{H} := \widehat{H}\xi_T(W_F)$$

とおく。$\widehat{G}$ の Lie 環を $\widehat{\mathfrak{g}}$, $\widehat{G}$ での $\mathcal{T}$ のルート $\alpha^\vee$ のルート空間を $\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha^\vee}\subset\widehat{\mathfrak{g}}$ として

$$\mathrm{Lie}\widehat{H} = \widehat{\mathfrak{g}}^{\mathrm{Ad}(s)} = \mathrm{Lie}\mathcal{T}\oplus\sum_{\substack{\alpha^\vee\in R(\widehat{G},\mathcal{T})\\ \alpha^\vee(s)=1}}\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha^\vee}$$

である。これと

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\xi_T(w))\alpha^\vee(s) =&\alpha^\vee\bigl(\mathrm{Ad}(\xi_T(w))^{-1}\xi_T(s_T)\bigr) = \alpha^\vee\bigl(\xi_T(\rho_T(w)^{-1}(s_T))\bigr)\\ =&\alpha^\vee\bigl(\xi_T(s_T Z(\widehat{G}))\bigr) = \alpha^\vee(s)\end{aligned}$$

から $\mathcal{H} = \widehat{H} \rtimes \xi_T(W_F)$ は定義可能である。

ここで

$$\bar{\rho}_H : W_F \ni w \longmapsto \mathrm{Ad}(\xi_T(w))|_{\widehat{H}} \in \mathrm{Aut}(\widehat{H}) \longrightarrow \mathrm{Out}(\widehat{H})$$

とおく。$T$ を分裂させる有限次 Galois 拡大 $L/F$ を取れば、$W_L$ はルートデータ

$$(X^*(T), \Delta(B,T), X_*(T), \Delta^\vee(B,T))$$

に自明に作用する。$\bar{\rho}_H$ は $\widehat{H} \subset \widehat{G}$ のルートデータへの $W_F$ 作用だから $W_F/W_L = \Gamma_{L/F}$ を経由し、特に $\widehat{H}$ の分裂 $\mathbf{spl}_{\widehat{H}}$ に対して $\bar{\rho}_H$ はそれを保つ $\rho_H : \Gamma \twoheadrightarrow \Gamma_{L/F} \to \mathrm{Aut}(\widehat{H})$ に一意に持ち上がる。そこで ${}^L H := \widehat{H} \rtimes_{\rho_H} W_F$ とおき、これを $L$ 群に持つ $F$ 上準分裂な連結簡約群を $H$ と書く。$G$ の導来群は単連結としていたから、系 5.3 と同様に同型 $\xi : {}^L H \xrightarrow{\sim} \mathcal{H} \subset {}^L G$ がある。

**補題 5.7.** $(H, {}^L H, s, \xi)$ は $G$ の楕円的内視データである。

**証明**. 作り方から $(H, {}^L H, s, \xi)$ が内視データの条件 (b) 以外を満たすことは明らか。$\mathfrak{K}(T)$ の定義から、$Z(\widehat{G})$ 値 1 コサイクル $\{a(\sigma)\}_{\sigma\in\Gamma}$ でそのクラスが $\ker^1(F, Z(\widehat{G}))$ に属するものがあって、

$$s_T\rho_T(\sigma)(s_T)^{-1} = a(\sigma), \quad \sigma \in \Gamma$$

である。$a$ の $W_F$ へのインフレーションを再び $a$ と書けばそのクラスは $\ker^1(W_F, Z(\widehat{G}))$ に属し、上式に $\xi_T$ を施したものは (5.1) から

$$s\xi(w)s^{-1}\xi(w)^{-1} = a(w), \quad w \in W_F$$

となるから条件 (b) も従う。

さて、2 節で見たように $T$ が $G^*$ で楕円的であることは

$$X_*(\widehat{T})^\Gamma \otimes \mathbb{Q} = X^*(T)_F \otimes \mathbb{Q} = X^*(D_G)_F \otimes \mathbb{Q} = X_*(Z(\widehat{G}))^\Gamma \otimes \mathbb{Q},$$

すなわち $\mathrm{Lie}\widehat{T}^\Gamma = \mathrm{Lie}Z(\widehat{G})^\Gamma$ に同値である。$\widehat{T} \supset Z(\widehat{G})$ は明らかだから、これは $\xi_T(\widehat{T}^\Gamma)^0 \subset Z(\widehat{G})$ といっても同じことである。定義から $\xi({}^L H) = \mathcal{H} = \widehat{G}_s\xi_T({}^L T)$ だから、

$$\xi(Z(\widehat{H})^\Gamma)^0 \subset \xi_T(\widehat{T}^\Gamma)^0 \subset Z(\widehat{G})$$

となって $(H, {}^L H, s, \xi)$ は楕円的である。 □

次に $\xi_T^H : {}^LT \xrightarrow{\xi_T} \mathcal{H} \xrightarrow{\xi^{-1}} {}^LH$ は定義可能な許容埋め込みである。特に $\Omega(\widehat{H}, \mathcal{T}_H)$ 値 1 コサイクル $\omega_T^H$ があって、$W_F \ni w \to \sigma \in \Gamma$ と書くとき

$$\mathrm{Ad}(\xi_T^H(w))|_{\mathcal{T}_H} = \omega_T^H(\sigma) \rtimes \rho_H(\sigma)$$

が成り立つ。双対同型 $(\xi_T^{H,*})^{-1} : T \xrightarrow{\sim}_{\bar{F}} T_0^H$ を取れば、これは $(\xi_T^{H,*})^{-1}\sigma(\xi_T^{H,*}) = \omega_T^H(\sigma)$ から

$$\sigma((\xi_T^{H,*})^{-1}(\gamma_*)) = \sigma(\xi_T^{H,*})^{-1}(\gamma_*) = \omega_T^H(\sigma)^{-1}(\gamma_*), \quad \sigma \in \Gamma$$

を意味する。つまり $(\xi_T^{H,*})^{-1}(\gamma_*)$ の $H$ 共役類は $F$ 上定義されている。補題 5.1 から $H$ の導来群は単連結だから、事実 3.4 から $(\xi_T^{H,*})^{-1}(\gamma_*)$ の $H$ 共役類は $F$ 有理点 $\gamma_H$ を持つ。

$$\gamma_H = \mathrm{Ad}(h)^{-1}(\xi_T^{H,*})^{-1}(\gamma_*) \in H(F).$$

そこで $T_H := H_{\gamma_H} = \mathrm{Ad}(h)^{-1}T_0^H$ とおき $\eta_{B,B_H} := \xi_T^{H,*} \circ \mathrm{Ad}(h) : T_H \xrightarrow{\sim} T$ と定める。定義から $\eta_{B,B_H}^{-1} \circ \sigma(\eta_{B,B_H}) \in \Omega(H, T_H)$, $\sigma \in \Gamma$ かつ

$$\eta_{B,B_H}^{-1} \circ \sigma(\eta_{B,B_H})(\gamma_H) = \eta_{B,B_H}^{-1}(\sigma(\gamma_*)) = \eta_{B,B_H}^{-1}(\gamma_*) = \gamma_H$$

だから、$\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \hookrightarrow G^*$ は $T_H$ の許容埋め込みである。ここで Borel 対 $(B_H, T_H)$ は $R(B_H, T_H) \subset \eta_{B,B_H}^*(R(B,T))$ となるように選んでいる。

## 5.4 内視データの自己同型

まず 5.2, 5.3 節の結果を次のようにまとめておく。

$$\widetilde{K}_{\mathrm{ell}}(G) := \{(\gamma_*, \kappa) \,|\, \gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{ell}},\ \kappa \in \mathfrak{K}(T_{\gamma_*})\}$$

とおく。$(\gamma_*, \kappa), (\gamma'_*, \kappa') \in \widetilde{K}_{\mathrm{ell}}(G)$ が**安定共役**とは、$\gamma_*$ と $\gamma'_*$ が安定共役で、$\mathrm{Ad}(g)^{-1}\gamma_* = \gamma'_*$ となる $g \in \mathfrak{A}(G^*/T_{\gamma_*})$ が引き起こす同型 $\mathrm{Ad}(g)^{-1} : T_{\gamma^*} \xrightarrow{\sim}_F T_{\gamma'_*}$ で $\kappa$ が $\kappa'$ に移ることとする。$\widetilde{K}_{\mathrm{ell}}(G)$ 内の安定共役類の集合を $K_{\mathrm{ell}}(G)$ と書く。これを使って (4.12) は

$$T_{\mathrm{ell}}(f) = \tau(G) \sum_{(\gamma_*,\kappa) \in K_{\mathrm{ell}}(G)} \sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \in \psi^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(\mathbb{A})} \langle \mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*), \kappa \rangle O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f). \tag{5.2}$$

と書ける。次に

$$\widetilde{E}_{\mathrm{ell}}(G) = \left\{ (H, s, \xi; \gamma_H) \;\middle|\; \begin{array}{l} (H, {}^LH, s, \xi) \text{ は } G \text{ の楕円的内視データ} \\ \gamma_H \in H(F)_{G\text{-reg}} \cap H(F)_{\mathrm{ell}} \end{array} \right\}$$

とおく。$(H, s, \xi; \gamma_H), (H', s', \xi'; \gamma_{H'}) \in \widetilde{E}_{\mathrm{ell}}(G)$ が**同値**とは、

- $(H, {}^LH, s, \xi)$ と $(H', {}^LH', s', \xi')$ は同型。よってある $g \in \widehat{G}$ に対して $\mathrm{Ad}(g)s \in s'Z(\widehat{G})$, $\mathrm{Ad}(g)\xi({}^LH) = \xi'({}^LH')$ が成り立つが、この $\xi'^{-1} \circ \mathrm{Ad}(g) \circ \xi : {}^LH \xrightarrow{\sim} {}^LH'$ は $\Gamma$ 同型

$$\bar{\alpha} : RD(H) \xrightarrow{\sim} RD(\widehat{H})^\vee \xrightarrow{\xi'^{-1}\circ\mathrm{Ad}(g)\circ\xi} RD(\widehat{H}')^\vee \xrightarrow{\sim} RD(H')$$

を与える。さらに $H$, $H'$ の $F$ 分裂 $\mathbf{spl}_H$, $\mathbf{spl}_{H'}$ を止めるごとに、$\bar{\alpha}$ は $F$ 同型 $\alpha : H \xrightarrow{\sim} H'$ で $\alpha(\mathbf{spl}_H) = \mathbf{spl}_{H'}$ を満たすものに一意に持ち上がる。一方 $H$ の $F$ 分裂の集合には $H_{\mathrm{ad}}(F)$ が忠実かつ推移的に作用しているので、

$$\mathrm{Isom}((H, {}^LH, s, \xi), (H', {}^LH', s', \xi')) \ni g \longmapsto \alpha \circ H_{\mathrm{ad}}(F) \in \mathrm{Isom}_F(H, H')/H_{\mathrm{ad}}(F) \tag{5.3}$$

は定義可能な写像である。

- 上の記号で $\gamma_{H'}^{H'} = \alpha(\gamma_H^H)$.

なることとする。$T_H := H_{\gamma_H}$ とすれば $\mathfrak{A}(H/T_H)$ の $H_{\mathrm{ad}}(\bar{F})$ での像は $H_{\mathrm{ad}}(F)$ を含むから、$\gamma_H$ の $H_{\mathrm{ad}}(F)$ 軌道は $\gamma_H^H$ に含まれ、従って $\alpha(\gamma_H^H)$ は $\alpha \circ H_{\mathrm{ad}}(F)$ の代表元の取り方によらず定義可能なことに注意する。$\widetilde{E}_{\mathrm{ell}}(G)$ 内の同値類の集合を $E_{\mathrm{ell}}(G)$ と書こう。5.2, 5.3 節の構成はこれらを用いて次のようにまとめられる。

**命題 5.8.** $K_{\mathrm{ell}}(G)$ と $E_{\mathrm{ell}}(G)$ の間の全単射で

- $\gamma_*^{G^*} = \mathcal{A}_{H/G^*}(\gamma_H^H)$;
- $\kappa = \xi_T^{-1}(s)Z(\widehat{G})$

を満たすものがある。

$(H, s, \xi; \gamma_H) \in \widetilde{E}_{\mathrm{ell}}(G)$ の同値類を $[(H, s, \xi; \gamma_H)]$ と書く。命題 5.8 により (5.2) は

$$T_{\mathrm{ell}}(f) = \tau(G) \sum_{[(H,s,\xi;\gamma_H)] \in E_{\mathrm{ell}}(G)} \sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \in \psi^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(\mathbb{A})} \langle \mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*), \kappa \rangle O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f). \tag{5.4}$$

となる。

$\mathrm{Out}_F(H) := \mathrm{Aut}_F(H)/H_{\mathrm{ad}}(F)$ と書こう。(5.3) で $(H', {}^LH', s', \xi') = (H, {}^LH, s, \xi)$ の場合を考えれば、

$$\mathrm{Aut}(H, {}^LH, s, \xi) \longrightarrow \mathrm{Out}_F(H)$$

が得られる。この像を $\mathrm{Out}(H, s, \xi)$ と書き、

$$\iota(G, H) := \frac{\tau(G)}{\tau(H)|\mathrm{Out}(H, s, \xi)|}$$

と定める。

**補題 5.9.** 上の記号で $\mathrm{Aut}(H,{}^LH,s,\xi)\ni g\mapsto\alpha(\gamma_H^H)\in\mathit{\Gamma}_G^{\mathrm{st}}(H(F))_{\mathrm{ell}}$ は全単射

$$\mathrm{Out}(H,s,\xi)\xrightarrow{\sim}\{{\gamma'_H}^H\in\mathit{\Gamma}_G^{\mathrm{st}}(H(F))_{\mathrm{ell}}\,|,(H,s,\xi,\gamma'_H)\in[(H,s,\xi;\gamma_H)]\}$$

を与える。

**証明**. 定義から明らかに

$$\begin{aligned}&\mathrm{Out}(H,s,\xi)\ni\alpha\circ H_{\mathrm{ad}}(F)\\&\qquad\qquad\longmapsto\alpha(\gamma_H^H)\in\{{\gamma'_H}^H\in\mathit{\Gamma}_G^{\mathrm{st}}(H(F))_{\mathrm{ell}}\,|,(H,s,\xi,\gamma'_H)\in[(H,s,\xi;\gamma_H)]\}\end{aligned}$$

は全射である。単射性、すなわち $\alpha\circ H_{\mathrm{ad}}(F)\in\mathrm{Out}(H,s,\xi)$ が $\alpha(\gamma_H)\in\gamma_H^H$ を満たせば $\alpha\in H_{\mathrm{ad}}(F)$ であることを示そう。仮定からある $h\in H(\bar F)$ に対して $\alpha(\gamma_H)=h^{-1}\gamma_H h$、すなわち $\alpha_0:=\mathrm{Ad}(h)\circ\alpha$ は

$$\alpha_0(\gamma_H)=\gamma_H,\quad\alpha_0(T_H:=H_{\gamma_H})=T_H$$

を満たす。必要なら $g$ を $g\xi(\widehat{H})$ の元で取り替えて $g\in\mathrm{Norm}(\mathcal{T},\widehat{G})$ としてよい。$\alpha$ の定義から $\alpha_0\circ H_{\mathrm{ad}}$ は $\xi^{-1}\circ\mathrm{Ad}(g)\circ\xi\in\mathrm{Aut}(\widehat{H})$ の双対だから、

$$\alpha_0\circ\Omega(H,T_H)=[\xi_{T_H}^{-1}\circ\xi^{-1}\circ\mathrm{Ad}(g)\circ\xi\circ\xi_{T_H}\text{ の双対}]$$

である。さらに許容埋め込み $\eta_{B,B_H}:T_H\xrightarrow{\sim}_F T\subset G^*$ を取れば、$\xi_T\circ{\eta_{B,B_H}^*}^{-1}|_{\widehat{T}_H}=\xi\circ\xi_{T_H}|_{\widehat{T}_H}$ ゆえこれは

$$\eta_{B,B_H}\circ(\alpha_0)\circ\eta_{B,B_H}^{-1}=[\xi_T^{-1}\circ\mathrm{Ad}(g)\circ\xi_T\text{ の双対}]\circ\eta_{B,B_H}(\Omega(H,T_H))$$

を意味する。ところが右辺は $\Omega(G^*,T)$ に属し、しかも正則元 $\gamma_*:=\eta_{B,B_H}(\gamma_H)$ を動かさないのだから、結局 $\alpha_0|_{T_H}=\mathrm{id}_{T_H}$ がわかる。特に $\alpha_0$ は $(B_H,T_H)$ のルートデータに自明に作用するから内部自己同型であり、従って $\alpha$ も同様である: $\alpha\in H_{\mathrm{ad}}(\bar F)\cap\mathrm{Aut}_F(H)=H_{\mathrm{ad}}(F)$. □

この補題から (5.4) は

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{ell}}(f)=&\tau(G)\sum_{(H,{}^LH,s,\xi)\in\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)}\frac{1}{|\mathrm{Out}(H,s,\xi)|}\\&\sum_{\gamma_H^H\in\Gamma_G^{\mathrm{st}}(H(F))_{\mathrm{ell}}}\ \sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\in\psi^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})}\langle\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*),\kappa\rangle O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f)\\=&\sum_{(H,{}^LH,s,\xi)\in\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)}\iota(G,H)\tau(H)\\&\sum_{\gamma_H^H\in\Gamma_G^{\mathrm{st}}(H(F))_{\mathrm{ell}}}\ \sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\in\psi^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})}\langle\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*),\kappa\rangle O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f)\end{aligned}\tag{5.5}$$

となる。安定化はこの右辺の 2 行目を $H(\mathbb{A})$ 上の安定超函数で展開することで完成する。この最後のステップは次節で解説する軌道積分の移行によって保証される。

# 6　大域軌道積分の移行

## 6.1　局所内視論と軌道積分の移行

大域的な軌道積分の移行を論じる前にそれを与える局所理論を概観しておこう。

**局所内視データ**　標数 0 の局所体 $F$ 上の簡約群 $G$ の内視データは代数体上の場合 (5.1 節) と同様に定義される。ただし局所体上では (iv) の条件 (b) の 1 コサイクル $a$ は 1 コバウンダリとする。その他、内視データの同型や楕円性も大域的な場合と同様に定義する。

$F$ が代数体の場合に戻って、$G$ の内視データ $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ が与えられているとする。$F$ の各素点 $v$ で

(i) $H_v := H \otimes_F F_v$ (係数拡大)

(ii) 切断 $c : W_F \hookrightarrow \mathcal{H}$ と $W_{F_v} \to W_F$ を合成して得られる拡大

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \widehat{H} & \longrightarrow & \mathcal{H}_v & \longrightarrow & W_{F_v} & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \widehat{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & W_F & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

(iii) $s \in \widehat{G}$

(iv) 次の図式で定まる $\xi_v : \mathcal{H}_v \hookrightarrow {}^L G_v = \widehat{G} \rtimes W_{F_v}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_v & \xrightarrow{\xi_v} & {}^L G_v \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\xi} & {}^L G \end{array}$$

として、$G_v$ の内視データ $(H_v, \mathcal{H}_v, s, \xi_v)$ が得られる。大域的な場合と同様に

$$\mathit{\Gamma}^{\mathrm{st}}(G(F_v)) \xrightarrow{\psi} \mathit{\Gamma}^{\mathrm{st}}(G^*(F_v)) \xleftarrow{\mathcal{A}_{H_v/G_v^*}} \mathit{\Gamma}^{\mathrm{st}}_{G_v}(H(F_v))$$

が得られ、$\mathcal{A}_{H_v/G_v^*}(\gamma_{H_v}^{H_v}) = \psi(\gamma_v^{G_v})$ となるとき、$\gamma_{H_v} \in H(F_v)_{G_v\text{-reg}}$ は $\gamma_v \in G(F_v)_{\mathrm{reg}}$ の**像** *(image)* であるという。$\gamma_H \in H(F)_{G\text{-reg}}$ が $\gamma_{\mathbb{A}} = (\gamma_v)_v \in G(\mathbb{A})$ の**アデール像** *(adelic image)* とは、$F$ の全ての素点 $v$ で $\gamma_H$ が $\gamma_v$ の像であることとする。$(H, \mathcal{H}, s, \xi) = (G^*, {}^L G^*, 1, \mathrm{id}_{{}^L G})$ の場合にはこの定義は 4.1 節のものと一致している。

**移行因子**　$\gamma_H, \bar{\gamma}_H \in H(F_v)_{G\text{-reg}}$ がおのおの $\gamma_v, \bar{\gamma} \in G(F_v)_{\mathrm{reg}}$ の像であるとする。$T_H = H_{\gamma_H}$, $\bar{T}_H = H_{\bar{\gamma}_H}$ の許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim}_F T$, $\eta_{\bar{B},\bar{B}_H} : \bar{T}_H \xrightarrow{\sim}_F \bar{T}$ および、$T_H$, $\bar{T}_H$, $T$, $\bar{T}$ の $a$ データ、$\chi$ データと呼ばれる補助データを固定して、Langlands-Shelstad は 5 つの函数

$$\Delta_I(\gamma_H, \gamma_v), \quad \Delta_{II}(\gamma_H, \gamma_v), \quad \Delta_1(\gamma_H, \gamma_v; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}), \quad \Delta_2(\gamma_H, \gamma_v), \quad \Delta_{IV}(\gamma_H, \gamma_v)$$

を定義し、それらとあらかじめ固定した定数 $\Delta_v(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}) \in \mathbb{C}^\times$ を用いて**局所移行因子** *(local transfer factor)* を

$$\Delta_v(\gamma_H, \gamma_v) := \Delta_v(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})\Delta_v(\gamma_H, \gamma_v; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}),$$
$$\Delta_v(\gamma_H, \gamma_v; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}) := \frac{\Delta_I(\gamma_H, \gamma_v)\Delta_{II}(\gamma_H, \gamma_v)\Delta_2(\gamma_H, \gamma_v)\Delta_{IV}(\gamma_H, \gamma_v)}{\Delta_I(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})\Delta_{II}(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})\Delta_2(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})\Delta_{IV}(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})}\Delta_1(\gamma_H, \gamma_v; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})$$

と定めた [LS87]。$\gamma_v$ が $\gamma_H$ を像に持たないときには $\Delta_v(\gamma_H, \gamma_v) := 0$ と定めれば、$\Delta_v$ は定義可能な $\mathit{\Gamma}_G^{\mathrm{st}}(H(F_v)) \times \mathit{\Gamma}(G(F_v))$ 上の函数で [LS87, 補題 4.1.C]、定数倍を除いて $\eta_{B,B_H}$, $\eta_{\bar{B},\bar{B}_H}$, $a$ データや $\chi$ データ、さらに $G^*$, $H$ の $F$ 分裂という $\Delta_I, \ldots, \Delta_{IV}$ の定義に用いられた補助データの取り方によらない [LS87, 定理 3.7A]。さらに $G$ 自身が準分裂なときには函数 $\Delta_1(\gamma_H, \gamma_v)$ があって上の $\Delta_1$ は

$$\Delta_1(\gamma_H, \gamma_v; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}) = \frac{\Delta_1(\gamma_H, \gamma_v)}{\Delta_1(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})}$$

と分解する (6.2 節を参照)。特に

$$\Delta_v(\gamma_H, \gamma_v; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}) = \frac{\Delta_0(\gamma_H, \gamma_v)}{\Delta_0(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})}$$
$$\Delta_0(\gamma_H, \gamma_v) := \Delta_I(\gamma_H, \gamma_v)\Delta_{II}(\gamma_H, \gamma_v)\Delta_1(\gamma_H, \gamma_v)\Delta_2(\gamma_H, \gamma_v)\Delta_{IV}(\gamma_H, \gamma_v)$$

と書ける [LS87, (3.7)]。

**軌道積分の移行予想**　$G(F_v)$ の Hecke 環 $\mathcal{H}(G(F_v))$ を思い出す (3.2 節)。$f_v \in \mathcal{H}(G(F_v))$ と $f_v^H \in \mathcal{H}(H(F_v))$ の**軌道積分が合致する** *(have matching orbital integral)* とは

$$\sum_{\gamma_v^{G(F_v)} \in \mathit{\Gamma}(G(F_v))} \Delta_v(\gamma_H, \gamma_v) O_{\gamma_v}(f_v) = SO_{\gamma_H}(f_v^H) \tag{6.1}$$

が任意の $\gamma_H \in H(F_v)_{G\text{-reg}}$ に対して成り立つこととする。跡公式の安定化のためには次の二つの予想を仮定する必要がある。

**予想 6.1** (軌道積分の移行の存在)**.** 任意の $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v))$ に対して、それと軌道積分が合致する $f_v^H \in \mathcal{H}(H(F_v))$ がある。

**予想 6.2** (基本補題)**.** $G$, $H$ とも $F_v$ 上不分岐だとする。特に $G$ は $F_v$ 上準分裂ゆえ、上述の $\Delta_0(\gamma_H, \gamma_v)$ および、$G(F_v)$, $H(F_v)$ の超スペシャル極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}_v$, $\mathbf{K}_v^H$ がある。$G(F_v)$ の閉部分群 $K$ 上の不変測度を $\mathbf{K}_v \cap K$ の測度が 1 となるものとすれば、$\mathbf{K}_v$ の特性函数 $1_{\mathbf{K}_v}$ は $\mathcal{H}(G(F_v))$ 内の両側 $\mathbf{K}_v$ 不変な元たちのなす部分環 $\mathcal{H}_{\mathbf{K}_v}(G(F_v))$ の単位元である。$H(F_v)$ に対しても同様の記号を用いるとき、$1_{\mathbf{K}_v}$ と $1_{\mathbf{K}_v^H}$ の軌道積分は合致する。

**注意 6.3.** 予想 6.1 では非正則半単純元の周りでの (6.1) の両辺の挙動が一致することを示すことが問題である。従って軌道積分の特異挙動が記述されている $F_v$ がアルキメデス的

な場合 ([HC75, 定理 9.1]) などにはすでに予想は解決している [She82, §3]。実 Lie 群や有限体上の簡約群の経験から、不変超函数の特異挙動は Grothendieck-Springer 多様体への Galois 群の作用で統制されていると考えられる。従って、Galois 群の作用が単一の鏡映からなる実 Lie 群の場合に比べて $p$ 進体の場合ははるかに複雑であり、予想が直接的に解決されているのは $SL(2)$ [LL79], $SU(3)$ [Lan83b], [LS89], [Hal92] $GSp(2)$ [Hal89] の場合のみである。

しかし、Waldspurger により予想 6.2 の Lie 環に対する類似から予想 6.1 が従うことが示され [Wal91]、特に $H=G^*$ の場合や $G=SL(n)$ の場合には予想 6.1 が証明された。もちろん予想 6.2 も難しい問題だが、最近 B.C. Ngo と G. Laumon が Hitchin ファイブレーションを用いてユニタリ群の場合の予想の Lie 環での類似を解決した。彼らの議論により一般にも、困難な Springer ファイバへの Galois 作用の記述が回避できることが期待されている。(基本補題についても書き加えるべきか。)

## 6.2 移行因子の積公式

$(H, {}^LH, s, \xi)$ を $G$ の内視データとし、$\gamma_H, \bar\gamma_H \in H(F)_{G\text{-reg}}$ がおのおの $\gamma_{\mathbb{A}}, \bar\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})_{\mathrm{reg}}$ の像であるとする。$T_H = H_{\gamma_H}$, $\bar T_H = H_{\bar\gamma_H}$, $\eta_{B,B_H}: T_H \xrightarrow{\sim}_F T$, $\eta_{\bar B,\bar B_H}: \bar T_H \xrightarrow{\sim}_F \bar T$ を上の通りとし、$\gamma_* := \eta_{B,B_H}(\gamma_H) \in T(F)$, $\bar\gamma_* := \eta_{\bar B,\bar B_H}(\bar\gamma_H)$ とおく。[LS87] に倣って 4.3 節の $\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ を $\mathrm{inv}(\gamma_H, \gamma_{\mathbb{A}})$ と書こう。

局所移行因子の中の $\Delta_1$ の定義を思い出そう。仮定から

$$\mathrm{Ad}(g_v)\circ\psi(\gamma_v) = \gamma_*, \quad \mathrm{Ad}(\bar g_v)\circ\psi(\bar\gamma_v) = \bar\gamma_*$$

となる $g=(g_v)_v, \bar g = (\bar g_v) \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ がある。大域的な場合 (4.3 節) と同様、$T_{\mathrm{sc}}(\bar F_v)$ および $\bar T_{\mathrm{sc}}(\bar F_v)$ にそれぞれ値を持つ 1 コチェイン

$$v(\sigma) = g_v u(\sigma)\sigma(g_v)^{-1}, \quad \bar v(\sigma) = \bar g_v u(\sigma)\sigma(\bar g_v)^{-1}, \quad \sigma\in\Gamma_v$$

が定まり、それらのコバウンダリ $\partial v = \partial u = \partial\bar v$ は $Z_{G_{\mathrm{sc}}}(\bar F_v)$ に値を持つ。特に $\mathbb{T} = \mathbb{T}(T, \bar T) := T_{\mathrm{sc}} \times_{Z_{G_{\mathrm{sc}}}} \bar T_{\mathrm{sc}}$ として、$(v^{-1}, \bar v)$ は定義可能な $\mathbb{T}(\bar F_v)$ 値の 1 コサイクルになる。その $\mathrm{H}^1(F_v, \mathbb{T})$ でのクラスを

$$\mathrm{inv}\Big(\frac{\gamma_H, \gamma_v}{\bar\gamma_H, \bar\gamma_v}\Big)$$

と書く。他方で $\widehat G$ の単連結被覆を $(\widehat G)_{\mathrm{sc}}$ などと書けば $\widehat{\mathbb{T}} = (\widehat T)_{\mathrm{sc}} \times (\widehat{\bar T})_{\mathrm{sc}}/Z((\widehat G)_{\mathrm{sc}})$ であることが示せる。そこで $(\widehat G)_{\mathrm{sc}} \twoheadrightarrow \widehat G/Z(\widehat G)$ での $sZ(\widehat G)$ の勝手な逆像 $\widetilde s$ を止めて、5.2 節のように $\widetilde s_T := \xi_{T_{\mathrm{ad}}}^{-1}(\widetilde s) \in (\widehat T)_{\mathrm{sc}}$, $\widetilde s_{\bar T} := \xi_{\bar T_{\mathrm{ad}}}^{-1}(\widetilde s) \in (\widehat{\bar T})_{\mathrm{sc}}$ とおけば、

$$\mathbf{s}_{\mathbb{T}} := [(\widetilde s_T, \widetilde s_{\bar T}) \text{ の } \pi_0(\widehat{\mathbb{T}}^{\Gamma_v}) \text{ での像}]$$

は定義可能である。これらのもとで $\Delta_1$ 因子は

$$\Delta_1(\gamma_H, \gamma_v; \bar\gamma_H, \bar\gamma_v) := \Big\langle \mathbf{s}_{\mathbb{T}}, \mathrm{inv}\Big(\frac{\gamma_H, \gamma_v}{\bar\gamma_H, \bar\gamma_v}\Big)\Big\rangle$$

と定義されていた [LS87, (3.4)]。

特に $G_v = G_v^*$ の場合には、$v(\sigma) = g\sigma(g)^{-1}$ 自身が 1 コサイクルなのでその $\mathrm{H}^1(F_v, T_{\mathrm{sc}})$ でのクラスを $\mathrm{inv}(\gamma_H, \gamma_v)$ として、$\mathrm{inv}(\frac{\gamma_H,\gamma_v}{\bar\gamma_H,\bar\gamma_v})$ は

$$\mathrm{H}^1(F_v, T_{\mathrm{sc}}) \times \mathrm{H}^1(F_v, \bar T_{\mathrm{sc}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F_v, \mathbb{T})$$

による $(\mathrm{inv}(\gamma_H, \gamma_v)^{-1}, \mathrm{inv}(\bar\gamma_H, \bar\gamma_v))$ の像に他ならない。5.2 節で構成した $s_T := \xi_T^{-1}(s) \in \widehat{T}$ の $\pi_0(\widehat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma}) = \pi_0((\widehat{T}/Z(\widehat{G}))^{\Gamma})$ での像を $\mathbf{s}_{T_{\mathrm{sc}}}$ と書けば、Tate-中山双対性の函手性から

$$\Delta_1(\gamma_H, \gamma_v; \bar\gamma_H, \bar\gamma_v) = \frac{\Delta_1(\gamma_H, \gamma_v)}{\Delta_1(\bar\gamma_H, \bar\gamma_v)}, \quad \Delta_1(\gamma_H, \gamma_v) := \langle \mathbf{s}_{T_{\mathrm{sc}}}, \mathrm{inv}(\gamma_H, \gamma_v)\rangle^{-1} \tag{6.2}$$

である。

**補題 6.4.** ほとんど全ての有限素点で $\Delta_1(\gamma_H, \gamma_v; \bar\gamma_H, \bar\gamma_v) = 1$.

**証明**. $G_v$ は不分岐としてよいから、$\psi$ に $G(\bar F_v)$ 共役な $F_v$ 同型 $\psi_v : G_v \xrightarrow{\sim} G_v^*$ で $G(F_v)$ の超スペシャル極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}_v$ を $G^*(F_v)$ のそれに送るものがある。$\mathrm{inv}(\frac{\gamma_H,\gamma_v}{\bar\gamma_H,\bar\gamma_v})$ は $\mathrm{Ad}(g_v) \circ \psi$ によるが $\psi$ 自体にはよらないので、$\psi$ を $\psi_v$ で置き換えてよい。すなわち $\Delta_1$ は (6.2) で与えられるとしてよい。さらに $\gamma_*, \bar\gamma_* \in \mathbf{K}_{v,\mathrm{reg}}^*$, $\gamma_v, \bar\gamma_v \in \mathbf{K}_v$ としてよいので、命題 3.3 (正確には [Kot84a, (3.3.4)]) から $g_v, \bar g_v \in \mathbf{K}_{v,\mathrm{sc}}$ とできる。よって $\mathrm{inv}(\gamma_H, \gamma_v)$, $\mathrm{inv}(\bar\gamma_H, \bar\gamma_v)$ とも自明だから、$\Delta_1(\gamma_H, \gamma_v; \bar\gamma_H, \bar\gamma_v) = 1$ である。 □

さて、移行因子の積公式を得るため次の条件を要求する。

(i) $\bar\gamma_H$ は $\bar\gamma \in G(F)$ の像であるとする。

(ii) 局所移行因子の定義で用いた定数の族 $\{\Delta_v(\bar\gamma_H, \bar\gamma)\}_v$ を

  (a) 有限個を除く全ての $v$ で $\Delta_v(\bar\gamma_H, \bar\gamma) = 1$ かつ

  (b) $\prod_v \Delta_v(\bar\gamma_H, \bar\gamma) = 1$

  を満たすように選ぶ。

(iii) $T, \bar T, T_H, \bar T_H$ の $F$ 上のトーラスとしての $a$ データ、$\chi$ データを選び、それらから定まる $F_v$ 上の $a, \chi$ データを用いて局所移行因子の各因子を定義する。

**事実 6.5** ([LS87] 定理 6.4.A). 上の条件の下で次が成り立つ。
(a) ほとんど全ての素点 $v$ で $\Delta_v(\gamma_H, \gamma_v) = 1$.
(b) $\prod_v \Delta_I(\bar\gamma_H, \gamma_v) = \prod_v \Delta_{II}(\bar\gamma_H, \gamma_v) = \prod_v \Delta_2(\bar\gamma_H, \gamma_v) = \prod_v \Delta_{IV}(\bar\gamma_H, \gamma_v) = 1$. □

**系 6.6.** 上の条件の下で $\prod_v \Delta_v(\gamma_H, \gamma_v) = \langle \mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*), \kappa\rangle$. ただし $\kappa \in \mathfrak{K}(T/F)$ は 5.2 節の通り。

**証明**. 事実 6.5 から

$$\prod_v \Delta_v(\gamma_H,\gamma_v)=\prod_v \Delta_1(\gamma_H,\gamma_v;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}_v)=\Big\langle \mathbf{s}_{\mathbb{T}},\mathrm{inv}\Big(\frac{\gamma_H,\gamma_{\mathbb{A}}}{\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}}\Big)\Big\rangle$$

である。ここで $\mathrm{inv}(\frac{\gamma_H,\gamma_{\mathbb{A}}}{\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}})$ は合成 $\bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v,\mathbb{T})\to \mathrm{H}^1(F,\mathbb{T}(\bar{\mathbb{A}}))\to \mathrm{H}^1(F,\mathbb{T}(\bar{\mathbb{A}})/\mathbb{T}(\bar{F}))$ による $(\mathrm{inv}(\frac{\gamma_H,\gamma_v}{\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}}))_v$ の像を表し、右の等式は (1.8) から従う。一方、定義から明らかに $(\mathrm{inv}(\gamma_H,\gamma_{\mathbb{A}})^{-1},\mathrm{inv}(\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}))$ の

$$\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\mathrm{sc}}(\bar{F}))\times \mathrm{H}^1(F,\bar{T}_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/\bar{T}_{\mathrm{sc}}(\bar{F}))\longrightarrow \mathrm{H}^1(F,\mathbb{T}(\bar{\mathbb{A}})/\mathbb{T}(\bar{F}))$$

による像は $\mathrm{inv}(\frac{\gamma_H,\gamma_{\mathbb{A}}}{\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}})$ であるから、

$$\Big\langle \mathbf{s}_{\mathbb{T}},\mathrm{inv}\Big(\frac{\gamma_H,\gamma_{\mathbb{A}}}{\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}}\Big)\Big\rangle=\frac{\langle \mathbf{s}_{\bar{T}_{\mathrm{sc}}},\mathrm{inv}(\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})\rangle}{\langle \mathbf{s}_{T_{\mathrm{sc}}},\mathrm{inv}(\gamma_H,\gamma_{\mathbb{A}})\rangle}$$

を得る。補題 4.7 と 5.2 節の $\kappa$ の定義から、この右辺は $\langle\kappa,\mathrm{inv}(\gamma_H,\gamma_{\mathbb{A}})\rangle^{-1}=\langle\kappa,\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)\rangle$ に等しい。 □

## 6.3 安定化の完成

$f=\bigotimes_v f_v\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$, $(f_v\in\mathcal{H}(G(F_v)))$ に対して、系 6.6 から (5.5) の右辺の 2 行目の内側の和は

$$\sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\in\mathcal{A}_{G/H}(\gamma_H)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})}\langle\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*),\kappa\rangle O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f)=\sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\in\mathcal{A}_{G/H}(\gamma_H)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})}\prod_v \Delta_v(\gamma_H,\gamma_v)O_{\gamma_v}(f)$$
$$=\prod_v\sum_{\gamma_v^{G(F_v)}\in\mathcal{A}_{H/G}(\gamma_H^{H_v})}\Delta_v(\gamma_H,\gamma_v)O_{\gamma_v}(f)$$

と書ける。ここで、ほとんど全ての $v$ では $\gamma_*\in\mathbf{K}_{v,\mathrm{reg}}^*$ で $f_v=1_{\mathbf{K}_v}$ だから、事実 3.3 により右辺の和はただ一つの項のみからなる。特に両辺の和は実際には有限和であることに注意する。さて、予想 6.1、6.2 を仮定すれば、$f^H=\bigotimes_v f_v^H\in\mathcal{H}(H(\mathbb{A}))$ で

$$\sum_{\gamma_v^{G(F_v)}\in\mathcal{A}_{H/G}(\gamma_H^{H_v})}\Delta_v(\gamma_H,\gamma_v)O_{\gamma_v}(f)=SO_{\gamma_H}(f_v^H) \tag{6.3}$$

となるものが存在する。これを上の式に代入して結局次が得られた。

**定理 6.7** (楕円正則項の安定化). $G$ とその任意の楕円的内視データに対して予想 6.1、6.2 が成り立つとする。このとき、$f=\bigotimes_v f_v\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対して

$$T_{\mathrm{ell}}(f)=\sum_{(H,{}^LH,s,\xi)\in\mathcal{E}_{\mathrm{ell}}(G)}\iota(G,H)\tau(H)\sum_{\gamma_H^H\in\Gamma_G^{\mathrm{st}}(H(F))_{\mathrm{ell}}}SO_{\gamma_H}(f^H)$$

が成り立つ。ここで $f^H=\bigotimes_v f_v^H\in\mathcal{H}(H(\mathbb{A}))$ は (6.3) を満たすものである。

# 参考文献


[Art01] James Arthur. A stable trace formula II. Global descent. *Invent. Math.*, Vol. 143, pp. 157–220, 2001.

[Art02] James Arthur. A stable trace formula. I. General expansions. *Jour. Inst. Math. Jussieu*, Vol. 1, No. 2, pp. 175–277, 2002.

[Art03] James Arthur. A stable trace formula III. Proof of the main theorems. *Ann. of Math.*, Vol. 158, pp. 769–873, 2003.

[BHC62] A. Borel and Harish-Chandra. Arithmetic subgroups of algebraic groups. *Ann. of Math.*, Vol. 75, pp. 485–535, 1962.

[CF86] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors. *Algebraic number theory*, London, 1986. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Reprint of the 1967 original.

[Che89] V. I. Chernousov. The Hasse principle for groups of type $E_8$. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 306, No. 5, pp. 1059–1063, 1989.

[Hal89] T. Hales. Shalika germs on $GSp(4)$. *Astérisque*, No. 171-172, pp. 195–256, 1989. Orbites unipotentes et représentations, II.

[Hal92] T. Hales. Orbital integrals on $U(3)$. In *The zeta functions of Picard modular surfaces*, pp. 303–333. CRM, Montreal, Quebec, 1992.

[HC75] Harish-Chandra. Harmonic analysis on real reductive groups I. The theory of the constant term. *J. Funct. Anal.*, Vol. 19, No. 2, pp. 104–204, 1975.

[Kaz86] David Kazhdan. Cuspidal geometry on $p$-adic groups. *J. Analyse Math.*, Vol. 47, pp. 1–36, 1986.

[Kne65a] M. Kneser. Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über $\mathfrak{p}$-adischen Körpern. I. *Math. Zeit*, Vol. 88, pp. 40–47, 1965.

[Kne65b] M. Kneser. Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über $\mathfrak{p}$-adischen Körpern. II. *Math. Zeit*, Vol. 89, pp. 250–272, 1965.

[Kne66] Martin Kneser. Hasse principle for $H^1$ of simply connected groups. In *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Vol. 9 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pp. 159–163. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.

[Kot82] Robert E. Kottwitz. Rational conjugacy classes in reductive groups. *Duke Math. J.*, Vol. 49, No. 4, pp. 785–806, 1982.

[Kot84a] Robert E. Kottwitz. Shimura varieties and twisted orbital integrals. *Math. Ann.*, Vol. 269, pp. 287–300, 1984.

[Kot84b] Robert E. Kottwitz. Stable trace formula: cuspidal tempered terms. *Duke Math. J.*, Vol. 51, No. 3, pp. 611–650, 1984.

[Kot86] Robert E. Kottwitz. Stable trace formula: elliptic singular terms. *Math. Ann.*, Vol. 275, No. 3, pp. 365–399, 1986.

[Kot88] Robert E. Kottwitz. Tamagawa numbers. *Ann. of Math.*, Vol. 127, pp. 629–646, 1988.

[KS99] Robert E. Kottwitz and Diana Shelstad. Foundations of twisted endoscopy. *Astérisque*, No. 255, pp. vi+190, 1999.

[Lab84] J.-P. Labesse. Cohomologie, $l$-groupe et fonctorialité. *Composit. Math.*, Vol. 55, pp. 163–184, 1984.

[Lai80] K. F. Lai. Tamagawa number of reductive algebraic groups. *Composit. Math.*, Vol. 41, No. 2, pp. 153–188, 1980.

[Lan66] R. P. Langlands. The volume of the fundamental domain for some arithmetical subgroups of Chevalley groups. In *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Vol. 9 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pp. 143–148. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.

[Lan79] R. P. Langlands. Stable conjugacy: definitions and lemmas. *Canad. J. Math.*, Vol. 31, pp. 700–725, 1979.

[Lan83a] R. P. Langlands. *Les débuts d'une formule des traces stable*. Université de Paris VII U.E.R. de Mathématiques, Paris, 1983.

[Lan83b] R. P. Langlands. Orbital integrals on forms of $SL(3)$. *Amer. J. Math.*, Vol. 105, pp. 465–506, 1983.

[LL79] J.-P. Labesse and R. P. Langlands. $L$-indistinguishability for $SL(2)$. *Canad. J. Math.*, Vol. 31, No. 4, pp. 726–785, 1979.

[LS87] R. P. Langlands and D. Shelstad. On the definition of transfer factors. *Math. Ann.*, Vol. 278, No. 1-4, pp. 219–271, 1987.

[LS89] R. P. Langlands and D. Shelstad. Orbital integrals on forms of $SL(3)$, ii. *Can. J. Math.*, Vol. 41, pp. 480–509, 1989.

[Ser79] Jean-Pierre Serre. *Local fields*, Vol. 67 of *GTM*. Springer Verlag, New York, 1979. Translation of "Corps Locaux" by M.J. Greenberg.

[She82] D. Shelstad. $l$-indistinguishability for real groups. *Math. Ann.*, Vol. 259, pp. 385–430, 1982.

[Spr79] T.A. Springer. Reductive groups. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, pp. 3–27. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Tat79] J. Tate. Number theoretic background. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pp. 3–26. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Tit79] J. Tits. Reductive groups over local fields. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, pp. 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Wal91] Jean-Loup Waldspurger. Le lemme fondamental implique le transfert. *Comp. Math.*, Vol. 3, No. 3, pp. 219–307, 1991.

[今野] 今野拓也. 1 時間半の講義 10 回で学ぶ「体と Galois 理論」. 2003 年度九州大学理学部数学科での代数学 C (3 年後期) の講義ノート (演習問題を含む).

[小野 63] 小野孝. 玉河数について. 雑誌「数学」, Vol. 15, pp. 8–17, 1963.

# 索引