志村多様体の HASSE-WEIL L-関数

今野拓也

Contents

1. 序

志村多様体の Hasse-Weil ζ-関数の研究は、Eichler が合同関係式を用いて

> 志村曲線 $O(2)\mathbb{R}^\times\backslash GL(2,\mathbb{R})/\Gamma_0(N)$ の $\mathbb{Q}$ 上のモデルの (partial) Hasse-Weil ζ-関数が Hecke の保型 L-関数の積と関係すること、

を証明したことに始まったと思われる。その後この合同関係式を使う方向の研究が志村、久賀、伊原らの先生方によって進められた ([Shim]、[Ih] など)。しかし合同関係式だけでは十分な情報が得られないことから (実際には他の理由もあるが)、これらの結果はいずれも $\mathbb{Q}$-ランク 1 の群に付随する志村多様体に限られている。

Langlands は [L1] 及び [L2] で、例として総実体 F 上の quaternion division algebra に付随する志村多様体を扱って、高次の群に付随する志村多様体の Hasse-Weil ζ-関数を記述するプログラムを示した。その概要は次の通りである。

(1) まず Lefschetz の跡公式から、志村多様体 S の Hasse-Weil ζ-関数の good prime p での局所因子の log は S の $\mathbb{F}_{p^n}$ 上の点の数 $|S(\mathbb{F}_{p^n})|$ を使って

$$\log Z_p(s,S)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|S(\mathbb{F}_{p^n})|}{np^{ns}}$$

と書ける。

(2) 次に点の数 $|S(\mathbb{F}_{p^n})|$ を $G(\mathbb{A}_f^p)\times G(L_j)$ 上の適切な test 関数 $F^{(m)}$ の軌道積分の和の形に書く。ここで L_j は $\mathbb{Q}_p$ の j-次不分岐拡大。

(3) この軌道積分の和を $G(\mathbb{A})$ 上の test 関数の軌道積分の和の形に書く。

(4) これを Selberg の跡公式に代入し、$\log Z_p(s,S)$ を automorphic L-関数の局所因子の log の有限和で書く。

勿論この概要はあまりに乱暴で (misleading で) あるが、この時点で数十秒で理解できる情報量としては妥当であろう。この Langlands の結果については Langlands 自身の論文 [L3] や Casselman のよい survey [Cas] などがあるので、興味のある方はそれらを参照して頂きたい。

Langlands のプログラムは高次の群の志村多様体の Hasse-Weil ζ-関数を記述する可能性を初めて示唆した点で重要だが、それを実践するには数々の難問をクリアせねばならない。まず (1) で Lefschetz の跡公式と書いたが、対応する群が anisotropic でないときには志村多様体は complete ではない。従って志村多様体のよいコンパクト化を作り、それに Lefschetz 跡公式を使うことになる。このコンパクト化の構成については Chai-Faltings ([Ch-Fa]) や藤原氏によって満足な結果が得られている。つぎに (2) については Kottwitz が境界を除く内点の数については解決している ([Ko1])。しかし今述べたように実際にはコンパクト化で付加された境界上の点の数も数えねばならず、それは対応する群が $\mathbb{Q}$-ランク 1 の時 (従って境界の次元が 0 の時) を除いて未解決である。さらにそうして得られた点の数の記述を Arthur-Selberg の跡公式に代入するには、跡公式と点の数の記述の両方を stabilize するという作業が必要である。Stabilization に必要な endoscopy の様々な問題はランク 1 の群を除いてほとんどの場合未解決である。このように数論幾何的にも調和解析的にもまだまだ未解決の問題が多いため、上記のプログラムが完全に実施されているのは (1) 総実代数体上の $SL(2)$ の場合、(2) $\mathbb{Q}$ 上の虚二次体に対応するユニタリ群 $U(2,1)$ の場合、のみである。

さて上で様々な困難があると書いたが、なんといっても最大の難関は保型表現の空間の「既約表現への分解」をすることであろう。これが完遂されているのが $GL(n)$ 以外では $SL(2)$ と $U(2,1)$ であり、まさに Langlands のプログラムが実行されている場合に一致する。それ以外の場合の既約分解については J. Arthur による (naive ではあるが) 秀逸な予想がある。しかしこれも D. Vogan のような表現論の超エキスパートか、保型表現の具体例にかなり精通した人を除いてフィーリングがつかみづらい。これらの理由からこの原稿では (タイトルには反するが) 少し別の問題を扱う。

それは保型関数に Galois 表現を対応させる問題である。これなら最初から特別な保型表現を取っておくわけだから、全ての保型関数を分類する必要はない。しかもそれ以外の Langlands のプログラムのたいていの要素を使うので、それらを理解することもできる。特に最新の結果を紹介しよう、ということで今回は [Lau] の紹介をすることにした。そこで扱われているのは Siegel 3-fold であり、志村多様体の中では志村曲線や Hilbert-Brumenthal 曲面に次いで基本的なものである。しかも Hales らの研究により stabilization に必要な事実がかなり完全な形で証明されている場合であり、従ってそこに現れる endoscopy の問題も理解できるだろう。

それ以外にも Laumon の、保型表現や Arthur-Selberg の跡公式の複雑な部分を巧みに切り落とし、わずかな調和解析や数論的幾何の結果から最大限の帰結を引き出すテクニッ

クも見事である。また専門家の方々には、Arthur-Selberg の跡公式の "pure part" には斉藤-黒川表現のような異常な cuspidal 表現が現れないこと（cf. 6.2 Remark. 6.3）に注意されたい。いずれにせよ軽い読み物として楽しんでもらえれば幸いである。

それでは最後にいくつか記号を準備する。一般に群 G とその元 γ (部分群 H resp.) に対して、γ (H resp.) の G での中心化群を $Z_G(\gamma)$ ($Z_G(H)$ resp.)、正規化群を $Norm_G(\gamma)$ ($Norm_G(H)$ resp.) と書く。$Z_G(\gamma)$ の単位元の連結成分を G_γ と書く。Int$G$ で G の内部自己同型の群を表す。また可換有限群 Z に対してその Pontrjagin dual を Z^D と書く。位相群 G に対してその連結成分のなす群を $\pi_0(G)$ で表す。線形代数群 G に対し、その指標群を $X^*(G) := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m)$、一変数部分群の群を $X_*(G) := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, G)$ と書く。

2. 準備

2.1. **次数 2 の Siegel modular 多様体.**

2.1.1. *$GSp(2)$.* 交代形式付きの $\mathbb{Z}$-加群 $(V, \langle\, ,\, \rangle_V)$ を

$$V := \mathbb{Z}^{\oplus 4}, \qquad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V := \mathbf{x} J_2 {}^t\mathbf{y}, \quad J_2 := \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

と定める。$G = GSp(2)_\mathbb{Z}$ は $(V, \langle\, ,\, \rangle_V)$ の similitudes たちの定める $\mathbb{Z}$ 上の群スキームとする。すなわち、勝手な環 R に対して G の R-valued points のなす群 $G(R)$ は

$$G(R) = \{ g \in GL(4, R) \,|\, g J_2 {}^t g = c(g) J_2, \text{ for some } c(g) \in R^\times \}$$

で与えられる。ただし $R^\times$ は R の単数群を表す。また上の群スキームの射 $c : G \to \mathbb{G}_m$ を *similitude norm* という。($\mathbb{G}_m$ はその R-valued points が $R^\times$ で与えられる $\mathbb{Z}$ 上の群スキームである。)

つぎに有理数体 $\mathbb{Q}$ のアデール環を $\mathbb{A}$ と書き、これを無限成分 $\mathbb{A}_\infty \simeq \mathbb{R}$ と有限成分 $\mathbb{A}_f$ の直和に分けておく。$N \in \mathbb{Z}$ に対して $G(\mathbb{A}_f)$ の N 段の主合同部分群 K_N を

$$K_N := \mathrm{Ker}\big[G(\widehat{\mathbb{Z}}) \twoheadrightarrow G(\widehat{\mathbb{Z}}/N\widehat{\mathbb{Z}}) \big] \subset G(\mathbb{A}_f)$$

と定義する。ここで $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{A}_f$ である。

2.1.2. *Siegel modular* 多様体. $\mathbb{S} := \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_m$ とおく。つまり任意の $\mathbb{R}$-代数 A に対して A-valued points の群 $\mathbb{S}(A)$ は $(A \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C})^\times$ で与えられる。$\mathbb{R}$-群多様体の準同型 $h_0 : \mathbb{S} \to G_\mathbb{R}$ を

$$h_0 : \mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times \ni x + \sqrt{-1} y \longrightarrow \begin{pmatrix} x & & & y \\ & x & y & \\ & -y & x & \\ -y & & & x \end{pmatrix} \in G(\mathbb{R})$$

から定まるものとする。これは [De2] の条件 (2.1.1.1)–(2.1.1.3) を満たす。特に h_0 の $G(\mathbb{R})$-共役類を X_∞ と書けば

$$X_\infty := \mathrm{Ad}(\mathrm{G}(\mathbb{R}))(h_0) \simeq G(\mathbb{R})/K_\infty, \quad (K_\infty := \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})}(h_0) = Z_G(\mathbb{R}) U(2))$$

は Hermitian type の対称空間になる。このとき N 段の Siegel modular 多様体 S_{K_N} の $\mathbb{C}$-valued points は

$$S_{K_N}(\mathbb{C})^{an} = G(\mathbb{Q}) \backslash X_\infty \times G(\mathbb{A}_f)/K_N \tag{2.1}$$

で与えられる。(正確には Baily-Borel の結果により、$\mathbb{C}$ 上の quasi-projective 多様体 S_{K_N} であってその $\mathbb{C}$-points の underlying analytic space が上の商空間に同型なものがある。) 以下では S_{K_N} が smooth になるように $N \geq 3$ と仮定する。

2.1.3. *Canonical model.* S_{K_N} には 2 次元の主偏極アーベル多様体のモジュライ空間としての、$\mathbb{Q}$ 上の代数多様体の構造が入る。すなわち次が言える。

k を N が可逆になっている体とし、次の moduli problem を考える。すなわち k 上の locally noetherian スキーム S に対し、3 つ組 (A, λ, φ):

(1) $A \to S$ は 2 次元の projective アーベルスキーム。k の標数と互いに素な isogeny 類で考える。
(2) $\lambda : A \to \widehat{A}$ (主偏極) は k の標数と互いに素な isogeny であって、各 geometric point s で主偏極になっているもの。(例えば $S = \mathrm{Spec}R$ なら、R の各素イデアル $\mathfrak{p}$ での局所化 $R_{(\mathfrak{p})}$ から代数閉体 κ への環準同型 $s : R_{(\mathfrak{p})} \to \kappa$ に対して、λ から「係数拡大」で得られる isogeny $\lambda \otimes_s \kappa : A \otimes_s \kappa \to \widehat{A} \otimes_s \kappa$ (通常は $\lambda_s : A_s \to \widehat{A}_s$ と書かれる) が主偏極になっている。) ここで $\widehat{A}$ は A のデュアルアーベルスキームである。
(3) (N 段構造) S の各連結成分の geometric point s を 1 つずつ固定する。φ は、$\pi_1(S, s)$-equivariant な同型 $\varphi_s : H^1(A_s, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の族であって λ_s から定まる交代形式
$$\langle\, ,\, \rangle_\lambda : H^1(A_s, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \times H^1(A_s, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}(1)$$
を、ある $\pi_1(S, s)$-equivariant な同型 $c_\varphi : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}(1)$ に対して、$c_\varphi \circ \langle\, ,\, \rangle_V$ に写すもの。

の k の標数と互いに素な isogeny 類を対応させる共変関手を考える。

事実 2.1 ([M] Chapt. 7)**.** この共変関手は k 上の *smooth* なスキーム $Sh_{K_N}(G, X_\infty)$ で表現可能。

補題 2.2. $Sh_{K_N}(G, X_\infty)$ の定義で k を $\mathbb{Q}$ としたものは *2.1.2* の *2.1* の *canonical model (*[De1] *Définition 3.13.)* を与える。

2.2. ℓ-進コホモロジー.

2.2.1. コンパクト台付き ℓ-進コホモロジー. N を割らない素数 ℓ を固定する。志村多様体 $Sh_{K_N}(G, X_\infty)$ 上には定数層 $\mathbb{Q}_\ell$ を乗せ、これを係数とするコンパクト台を持つ ℓ-進コホモロジー群を考える。

まず $Sh_{K_N}(G, X_\infty)$ の $\mathbb{Q}$ 上のよいコンパクト化 $\overline{Sh_{K_N}(G, X_\infty)}$ を 1 つ取る。つまり proper smooth な $\mathbb{Q}$ 上のスキーム $\overline{Sh_{K_N}(G, X_\infty)}$ への $Sh_{K_N}(G, X_\infty)$ からの open immersion $j : Sh_{K_N}(G, X_\infty) \hookrightarrow \overline{Sh_{K_N}(G, X_\infty)}$ であって、$\overline{Sh_{K_N}(G, X_\infty)} - j(Sh_{K_N}(G, X_\infty))$ が正規交叉因子になっているものを取る。上述の定数層 $\mathbb{Q}_\ell$ を $j(Sh_{K_N}(G, X_\infty))$ の外では 0 として $\overline{Sh_{K_N}(G, X_\infty)}$ に延ばしたものを $j_!\mathbb{Q}_\ell$ と書く。このとき $Sh_{K_N}(G, X_\infty)$ のコンパクト台を持つコホモロジー群は
$$H^i_c(Sh_{K_N}(G, X_\infty) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell) := H^i(Sh_{K_N}(G, X_\infty) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, j_!\mathbb{Q}_\ell)$$
で定義される。これは $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の作用付きの有限次元 $\mathbb{Q}_\ell$-ベクトル空間である。

2.2.2. *Hecke* 作用素. $G(\mathbb{A}_f)$ 上の smooth (locally constant) で台がコンパクトな $\mathbb{Q}$ に値を持つ関数たちのなす $\mathbb{Q}$-代数(積は convolution で定義する。)を $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f)//K_N)_{\mathbb{Q}}$ と書く ($\mathbb{Q}$-valued の Hecke 環)。

$g \in G(\mathbb{A}_f)$ に対し $K_N^g := K_N \cap gK_Ng^{-1}$ とおく。$K_N^g \subset K_N$、$g^{-1}K_N^g g \subset K_N$ がいずれも指数有限の部分群であることからエタールな射

$$Sh_{g^{-1}K_N^g g}(G, X_\infty) \xrightarrow{a} Sh_{K_N}(G, X_\infty), \quad Sh_{K_N^g}(G, X_\infty) \xrightarrow{b_2} Sh_{K_N}(G, X_\infty)$$

が得られる。canonical model の定義から g に対して定まる射

$$Sh_{K_N^g}(G, X_\infty) \xrightarrow{g} Sh_{g^{-1}K_N^g g}(G, X_\infty)$$

と a の合成を b_1 と書く。これにより Hecke 対応

$$Sh_{K_N}(G, X_\infty) \xleftarrow{b_1} Sh_{K_N^g}(G, X_\infty) \xrightarrow{b_2} Sh_{K_N}(G, X_\infty)$$

が得られる。さらに $Sh_{K_N}(G, X_\infty)$ 上の定数層 $\mathbb{Q}_\ell$ の $Sh_{K_N^g}(G, X_\infty)$ への逆像たち $b_1^*\mathbb{Q}_\ell$ 及び $b_2^*\mathbb{Q}_\ell$ はいずれも $Sh_{K_N^g}(G, X_\infty)$ 上の定数層 $\mathbb{Q}_\ell$ に標準同型なので、Hecke 対応 g はこの層上にものびる。さらに $H_c^i(Sh_{K_N} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の定義の j は $G(\mathbb{A}_f)$-equivariant に取れるので、両側剰余類 K_NgK_N の $H_c^i(Sh_{K_N}(G, X_\infty) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用が定まる。これを K_NgK_N の特性関数 ($\in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f)//K_N)_{\mathbb{Q}}$) の作用と見る。$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f)//K_N)_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$-ベクトル空間としてこの形の特性関数で生成されるので、$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f)//K_N)_{\mathbb{Q}}$ の $H_c^i(Sh_{K_N}(G, X_\infty) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用が定まる。

3. Lefschetz side — Deligne 予想

2 から $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f)//K_N)_{\mathbb{Q}}$ の作用付き $\mathbb{Q}_\ell$-ベクトル空間 $H_c^i(Sh_{K_N}(G, X_\infty) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が得られた。これの形式的な交代和 (virtual module という)

$$W_\ell := \sum_{i=0}^{6} (-1)^i H_c^i(Sh_{K_N}(G, X_\infty) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

が我々の考察の対象である。

3.1. **Cohomological properness.** ℓ と異なり N を割らない素数 p を固定し、$\mathbb{A}_f^p := \{(x_v)_v \in \mathbb{A}_f \mid x_p = 0\}$ と書く。$K_p = G(\mathbb{Z}_p)$, $K^p := K_N \cap G(\mathbb{A}_f^p)$ とすれば $K_N = K_pK^p$ となることに注意する。これから $Sh_{K_N}(G, X_\infty)$ の定義 (2.1.3) で「k の標数と互いに素な isogeny」を「prime-to-p isogeny」、k を $\mathbb{Z}_{(p)}$ で取り替え、(3) の N 段構造の定義を ($\widehat{\mathbb{Z}}^p := \widehat{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{A}_f^p$ と書く)

> $(3)^p$ S の各連結成分の geometric point s を1つずつ固定する。φ は $\pi_1(S, s)$-equivariant な同型 $\varphi_s : H^1(A_s, \widehat{\mathbb{Z}}^p/N\widehat{\mathbb{Z}}^p) \xrightarrow{\sim} V \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}^p/N\widehat{\mathbb{Z}}^p$ の族であって λ_s から定まる交代形式
>
> $$\langle\,,\,\rangle_\lambda : H^1(A_s, \widehat{\mathbb{Z}}^p/N\widehat{\mathbb{Z}}^p) \times H^1(A_s, \widehat{\mathbb{Z}}^p/N\widehat{\mathbb{Z}}^p) \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}^p/N\widehat{\mathbb{Z}}^p(1)$$
>
> を、ある $\pi_1(S, s)$-equivariant な同型 $c_\varphi : \widehat{\mathbb{Z}}^p/N\widehat{\mathbb{Z}}^p \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{Z}}^p/N\widehat{\mathbb{Z}}^p(1)$ に対して、$c_\varphi\langle\,,\,\rangle_V$ に写すもの。

とすることで $Sh_{K_N}(G, X_\infty)$ の $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の smooth quasi-projective なモデル $\mathcal{S}_{K_N^p}$ が得られる。

事実 3.1 ([Ch-Fa] Chapt. IV Theorem 6.7)**.** $\mathcal{S}_{K_N^p}$ *の proper smooth な代数的連接層への open immersion* $j : \mathcal{S}_{K_N^p} \hookrightarrow \overline{\mathcal{S}}_{K_N^p}$ *であって、*$D := \overline{\mathcal{S}}_{K_N^p} - j(\mathcal{S}_{K_N^p})$ *が正規交叉因子になっているものがある。*

さて $\mathcal{S}_{K_N^p}$ 上の定数層 $\mathbb{Q}_l$ が D に沿って tamely ramified であることに注意して [Ill] 1.3.3. を適用すれば、$(j, \mathbb{Q}_\ell/\mathcal{S}_{K_N^p})$ が *cohomologically proper* であることがわかる。つまり $Rj_!\mathbb{Q}_\ell$ の構成が quasi-finite な射の射影極限と可換になっている。従って

$$\left[H_c^i(Sh_{K_N}(G, X_\infty) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H_c^i(\mathcal{S}_{K_N^p} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, \mathbb{Q}_\ell)\right] \simeq H_c^i(\mathcal{S}_{K_N^p} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_\ell)$$

であり、$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ のこのコホモロジー群への作用は不分岐である。

すなわち射影 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ の核は自明に作用している。そこでこの射影によって $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ の生成元 $x \mapsto x^p$ に落ちる $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の元 Fr_p を 1 つ固定し、その逆元を Φ_p と書く。前者を p での Frobenius 元、後者を幾何的 Frobenius 元と呼ぶ。この幾何的 Frobenius の作用だけで $H_c^i(Sh_{K_N}(G, X_\infty) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-加群としての構造が決まるのである。以上から $f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p)//K_N^p)_{\mathbb{Q}}$ に対して

$$\mathrm{tr}(\Phi_p^j \times f^p \mathrm{Ch}_{K_p}|W_\ell) = \mathrm{tr}(\Phi_p^j \times f^p \mathrm{Ch}_{K_p}|R\Gamma_c(\mathcal{S}_{K_N^p} \otimes \overline{\mathbb{F}_p}, \mathbb{Q}_\ell)) \tag{3.1}$$

を計算すればよい。ここで Ch_{K_p} は K_p の特性関数である。

3.2. **固定点.**

3.1 を Lefschetz の跡公式 (あるいは固定点定理) を使って計算したい。まず対応 $\Phi_p^j \times f^p \mathrm{Ch}_{K_p}$ の固定点とは何だろうか。簡単のために f^p を $K_N^p g K_N^p$ $(g \in G(\mathbb{A}_f^p))$ の特性関数としてみる。$gK_N^p g^{-1} \cap K_N^p$ を $(K_N^p)^g$ と書く。

$$\mathcal{S}_{g^{-1}(K_N^p)^g g} \xrightarrow{a} \mathcal{S}_{K_N^p}, \quad \mathcal{S}_{(K_N^p)^g} \xrightarrow{b_2} \mathcal{S}_{K_N^p}$$

を 2.2.2 のものと類似のエタールな射とし

$$\mathcal{S}_{(K_N^p)^g} \xrightarrow{\Phi_p^j \times g} \mathcal{S}_{g^{-1}(K_N^p)^g g}$$

と a の合成を b_1 と書く。これにより我々の対応

$$\mathcal{S}_{K_N^p} \xleftarrow{b_1} \mathcal{S}_{(K_N^p)^g} \xrightarrow{b_2} \mathcal{S}_{K_N^p}, \quad \text{あるいは} \quad b : \mathcal{S}_{(K_N^p)^g} \xrightarrow{b_1 \times b_2} \mathcal{S}_{K_N^p} \times \mathcal{S}_{K_N^p} \tag{3.2}$$

が得られた。

集合 X からそれ自身への写像 $X \xrightarrow{a} X$ は代数的対応の特別な場合

$$X \xleftarrow{a} X \xrightarrow{\mathrm{id}} X, \quad \text{あるいは} \quad b : X \xrightarrow{a \times \mathrm{id}} X \times X$$

と思える。その固定点は定義から $\mathrm{Im} b \cap \Delta \subset X \times X$ である（ただし Δ は $X \times X$ の対角部分集合)。これの類似として 3.2 の固定点を

$$\mathrm{Fix}(\Phi_p^j \times g) := \mathrm{Im} b \underset{\mathcal{S}_{K_N^p} \times \mathcal{S}_{K_N^p}}{\times} \Delta$$

と定義する。ここでも Δ は $\mathcal{S}_{K_N^p} \times \mathcal{S}_{K_N^p}$ の対角部分スキームである。固定**点**とは言うものの $\mathrm{Fix}(\Phi_p^j \times g)$ は 0 次元とは限らない。しかし次が言える。

事実 3.2 ([Zi] Lemma.2.3.)**.** *j を十分大きく取って $p^j > [K_N^p : (K_N^p)^g]$ となるようにすれば $\mathrm{Fix}(\Phi_p^j \times g)$ は 0 次元。*

3.3. **Deligne's conjecture.** 我々の多様体は complete ではないので通常の Lefschetz の跡公式は使えない。反例として $\mathbb{C}$ 上の非 complete 多様体 $\mathbb{A}^1$ (1 次元 affine 空間) 上の自己同型 $\alpha : x \to x+1$ を考えてみよう。$\mathbb{A}^1$ の上に定数層 $\mathbb{Q}_\ell$ を乗せ、$j : \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ (1 次元射影空間への埋め込み) とする。$\mathbb{P}^1 - j(\mathbb{A}^1) = \{\infty\}$ と書けば、完全系列

$$0 \to j_!(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{A}^1) \to \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{P}^1 \to \mathbb{Q}_\ell/\{\infty\} \to 0$$

から得られる長完全列

$$\cdots \to H^i_c(\mathbb{A}^1, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i(\{\infty\}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{i+1}_c(\mathbb{A}^1, \mathbb{Q}_\ell) \to \cdots$$

と

$$H^i(\mathbb{P}^1, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H^i(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}_\ell & \text{if } i = 0, 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

から $H^2_c(\mathbb{A}^1, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathbb{Q}_\ell$、$H^i_c(\mathbb{A}^1, \mathbb{Q}_\ell) = 0,\ (i \neq 2)$ がわかる。このとき通常の Lefschetz の跡公式は

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{tr}(\alpha | H^i_c(\mathbb{A}^1, \mathbb{Q}_\ell)) = |Fix(\alpha)|$$

で与えられる。しかし実際には α は $\mathbb{A}^1$ に固定点を持たないので右辺は 0 であるにも関わらず、上の考察から左辺は 1 であり、Lefschetz 跡公式は成り立たない。

このように非 complete 多様体に対しては Lefschetz 跡公式は正しくないが、我々の目的には次の少し弱い定理があれば十分である。これは Deligne によって予想され、標数 0 の時には Pink ([Pi]) と Shpiz によって独立に証明され、正標数の時には藤原一宏氏によって最近証明された。

定理 3.3 (Deligne's conjecture). *3.2* により、$f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}^p_f)//K^p_N)_\mathbb{Q}$ に対して $j(f^p) \in \mathbb{N}$ があって、$j > j(f^p)$ ならば $\Phi^j_p \times f^p$ の固定点は孤立した有限個の点になっている。その個数を $N(j, f^p)$ と書く。このとき

$$\mathrm{tr}(\Phi^j_p \times f^p \mathrm{Ch}_{K_p} | R\Gamma_c(\mathcal{S}_{K^p_N} \otimes \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_\ell)) = N(j, f^p), \quad \textit{for } j >> j(f^p) \tag{3.3}$$

が成り立つ。

4. Arthur-Selberg side 1.—Geometric side

4.1. **Kottwitz の結果の復習.** Kottwitz の結果 ([Ko1]) は $N(j, f^p)$ を調和解析 (局所コンパクト群 $G(\mathbb{A})$ の表現論) の言葉で記述するものである。この非常に重要な話題は藤原氏の原稿にゆずるとして、ここでは非常にラフな復習をするにとどめる。

$\mathcal{S}_{K^p_N}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ の元は 3 つ組 (A, λ, ϕ) で与えられていた。$(A, \lambda, \phi) \in \mathrm{Fix}(\Phi^j_p \times f^p)$ に対し次のようなデータを構成する。

(1) 交代形式付き $\mathbb{A}^p_f$-ベクトル空間の同型

$$\Psi^p : (H_1(A, \mathbb{A}^p_f), \langle\ ,\ \rangle_\lambda) \xrightarrow{\sim} (V \otimes \mathbb{A}^p_f, \langle\ ,\ \rangle_V)$$

を 1 つ取る。$\Phi^j_p \in \mathrm{Aut}(H_1(A, \mathbb{A}^p_f), \langle\ ,\ \rangle_\lambda)$ のこの同型による像を $\gamma \in G(\mathbb{A}^p_f)$ と書く。γ の $G(\mathbb{A}^p_f)$-共役類は同型 Ψ^p の取り方によらない。

(2) $\overline{\mathbb{F}}_p$ のヴィット環を $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$、その商体を L、そして Fr_p から誘導される L の自己同型を σ と書く。$L_j := L^{\sigma^j}$ は $\mathbb{Q}_p$ の j-次の不分岐拡大である。

$$H := [H^1_{cris}(A \otimes \overline{\mathbb{F}}_p / W(\overline{\mathbb{F}}_p))^* \otimes L]^{\sigma^j}$$

には (構成は少し技巧的だが) やはり λ から定まる交代形式がある。そこで交代形式付き L_j-ベクトル空間の同型

$$\Psi_p : H \xrightarrow{\sim} V \otimes L_j$$

をとり、この同型による $\Phi_p^j \in GL_\sigma(H)$ の像を $\delta\sigma$ $(\delta \in G(L_j))$ とする。ただし L_j 上のベクトル空間 E の (加法群としての) 自己同型 ϕ が σ-linear とは

$$\phi(\alpha v) = \sigma(\alpha)\phi(v), \quad (\alpha \in L_j, v \in E)$$

が成り立つことを言い、GL_σ は σ-linear な自己同型の群を表す。また $x, y \in G(L_j)$ が σ-共役とは、$g \in G(L_j)$ があって $y = g^{-1}x\sigma(g)$ が成り立つことを言う。δ の σ-共役類は Ψ_p の取り方によらない。

(3) $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q})$ を
 (a) γ_0 の similitude norm は p^j。
 (b) γ_0 の特性多項式は $\Phi_p^j \in GL(H_1(A, \mathbb{Q}))$ のそれに等しい。
 を満たすものとする。これの $G(\overline{\mathbb{Q}})$-共役類は一意に決まる。

こうして (A, λ, ϕ) に対して $(\gamma_0, \gamma, \delta)$ が得られた。

さらにいくつか記号を用意する。γ_0 の連結中心化群 G_{γ_0} を I_0 と書く。主偏極付きアーベル多様体 (A, λ) の自己同型群 I は I_0 の inner form になっている。また $\mathbb{Q}$ 上の代数群 H に対し

$$\ker^1(\mathbb{Q}, H) := \mathrm{Ker}\left(H^1(\mathbb{Q}, H) \to \bigoplus_v H^1(\mathbb{Q}_v, H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_v)\right)$$

と書く。2.1.2 の h_0 を $\mathbb{C}$ に係数拡大したもの

$$h_{0,\mathbb{C}} : \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \ni (z, w) \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z+w & & & (w-z)\sqrt{-1} \\ & z+w & (w-z)\sqrt{-1} & \\ & (z-w)\sqrt{-1} & z+w & \\ (z-w)\sqrt{-1} & & & z+w \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}}$$

の第１成分への制限

$$\mu_{h_0} : \mathbb{C}^\times \ni z \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z+1 & & & (1-z)\sqrt{-1} \\ & z+1 & (1-z)\sqrt{-1} & \\ & (z-1)\sqrt{-1} & z+1 & \\ (z-1)\sqrt{-1} & & & z+1 \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}}$$

は $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の代数群の射 $\mu_{h_0} : \mathbb{G}_m \to G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ を与える。L_j の整数環を $\mathcal{O}_j$ として $K_{L_j} := G(\mathcal{O}_j)$ とおく。ϕ_j で $K_{L_j}\mu_{h_0}(\varpi_{L_j})K_{L_j}$ の特性関数 $(\in \mathcal{H}(G(L_j)//K_{L_j})_{\mathbb{Q}})$ を表す。ここに ϖ_{L_j} は L_j の勝手な uniformizer である。

定理 4.1 ([Ko1] §19). 以上の記号を使って $N(j, f^p)$ は次のようにかける。

$$N(j, f^p) = \sum_{\substack{\gamma_0 \\ \alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)=1}} \sum_{(\gamma,\delta)} c(\gamma_0; \gamma, \delta) O_\gamma(f^p) TO_\delta(\phi_j) \tag{4.1}$$

ただし、

(1) *Kottwitz* の不変量 $\alpha(\gamma_0; \gamma, \delta)$ については *4.2.1* で復習する。
(2) γ_0 は $G(\mathbb{Q})$ 内の *semisimple* な $G(\overline{Q})$-共役類の代表で $G(\mathbb{R})$ で *elliptic (*つまり $G(\mathbb{R})$ の *modulo* $Z_G(\mathbb{R})$ で *compact* な *Cartan* 部分群に含まれる*)* なものを走る。
(3) γ は γ_0 の $G(\overline{\mathbb{A}_f^p})$-共役類の中の $G(\mathbb{A}_f^p)$-共役類の代表を走る。

(4) δ は $G(L_j)$ の σ-共役類の代表であってその *norm*

$$N\delta := \delta \cdot \sigma(\delta) \cdot \sigma^2(\delta) \cdots \sigma^{j-1}(\delta) \in G(L_j)$$

が γ_0 の $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$-共役類に含まれるものを走る。

(5)

$$\begin{aligned}
c(\gamma_0;\gamma,\delta) &:= \mathrm{vol}(I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_f))|\ker^1(\mathbb{Q},I_0)| \\
O_\gamma(f^p) &:= \int_{G(\mathbb{A}_f^p)_\gamma\backslash G(\mathbb{A}_f^p)} f^p(g^{-1}\gamma g)\,\frac{dg^p}{di^p} \quad \textit{(}\text{軌道積分}\textit{)} \\
TO_\delta(\phi_j) &:= \int_{I(p)(\mathbb{Q}_p)\backslash G(L_j)} \phi_j(g^{-1}\delta\sigma(g))\,\frac{dg_p}{di_p} \quad \textit{(twisted }\text{軌道積分}\textit{)}
\end{aligned}$$

ここで $G(\mathbb{A}_f^p)_\gamma = \prod_{v\neq\infty,\neq p} G_{\gamma_v}(\mathbb{Q}_v)$ *(*G_{γ_v} は $G\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_v$ での γ_v の連結中心化群*)*、また $\mathbb{Q}_p$-代数 R に対して $G_{\delta,\sigma}(R) := \{g \in G(R\otimes_{\mathbb{Q}_p} L_j) \mid g^{-1}\delta\tilde{\sigma}(g) = \delta\} \subset \mathrm{Res}_{L_j/\mathbb{Q}_p} G(R)$ である。ただし、$\tilde{\sigma}$ は $G(L_j)$ への σ の作用から定まる $\mathrm{Res}_{L_j/\mathbb{Q}_p} G$ 上の $\mathbb{Q}_p$-自己同型。

(6) *(*測度について。*)* まず dg^p *(*dg_p *resp.)* は $G(\mathbb{A}_f^p)$ *(*$G(L_j)$ *resp.)* 上の測度であって K^p *(*K_{L_j} *resp.)* の測度が 1 になるようなものに取る。条件 $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta) = 1$ から、$I_0 = G_{\gamma_0}$ の $\mathbb{Q}$ 上の *inner form* であって、各素点 v での係数拡大 $I\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_v$ が $I(v)$ に同型なものがある。ここで $I(v)$ は *4.2.1* の通りとする。di^p *(*di_p *resp.)* は $I(\mathbb{A}_f^p)$ *(*$I(\mathbb{Q}_p)$ *resp.)* 上の測度であって *compact* な開部分群たちの測度が $\mathbb{Q}$ に入るようなもの *(*あるいはそれを同型によって $G(\mathbb{A}_f^p)_\gamma$ *(*$G_{\delta,\sigma}(\mathbb{Q}_p)$ *resp.)* に移したもの*)*。

4.2. **The stabilization 1.**

4.2.1. *Kottwitz* 不変量 $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$. まず κ-group $\mathfrak{K}(I_0/F)$ の復習から。Dual 群、L-群の定義その他については池田氏の記事を参照してほしい。$F=\mathbb{Q}$ あるいは $\mathbb{Q}_v$ とし $\Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ と書く。短完全列

$$0 \longrightarrow Z(\widehat{G}) \longrightarrow Z(\widehat{I}_0) \longrightarrow Z(\widehat{I}_0)/Z(\widehat{G}) \longrightarrow 0$$

から長完全列

$$\begin{aligned}
1 &\longrightarrow X_*(Z(\widehat{G}))^\Gamma \longrightarrow X_*(Z(\widehat{I}_0))^\Gamma \longrightarrow X_*(Z(\widehat{I}_0)/Z(\widehat{G}))^\Gamma \\
&\longrightarrow \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma) \longrightarrow \pi_0(Z(\widehat{I}_0)^\Gamma) \longrightarrow \pi_0((Z(\widehat{I}_0)/Z(\widehat{G}))^\Gamma) \\
&\longrightarrow H^1(F,Z(\widehat{G})) \longrightarrow H^1(F,Z(\widehat{I}_0)) \longrightarrow H^1(F,(Z(\widehat{I}_0)/Z(\widehat{G}))) \\
&\longrightarrow H^2(F,Z(\widehat{G})) \longrightarrow H^2(F,Z(\widehat{I}_0)) \longrightarrow \dots
\end{aligned}$$

が得られる。このとき $\mathfrak{K}(I_0/F) \subset \pi_0((Z(\widehat{I}_0)/Z(\widehat{G}))^\Gamma)$ を $F=\mathbb{Q}_v$ なら

$$\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q}_v) := \mathrm{Ker}[\pi_0((Z(\widehat{I}_0)/Z(\widehat{G}))^\Gamma) \to H^1(\mathbb{Q}_v,Z(\widehat{G}))]$$

$F=\mathbb{Q}$ なら

$$\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q}) := \pi_0((Z(\widehat{I}_0)/Z(\widehat{G}))^\Gamma) \text{ での } \ker^1(\mathbb{Q},Z(\widehat{G})) \text{ の逆像}$$

と定義する。ここで $\ker^1(\mathbb{Q},Z(\widehat{G})) := \mathrm{Ker}\left(H^1(\mathbb{Q},Z(\widehat{G})) \to \bigoplus_v H^1(\mathbb{Q}_v,Z(\widehat{G})\right)$ である。我々の場合には $\widehat{G} = GSp(2,\mathbb{C})$ であり $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ はこれに自明に作用するので、

$\ker^1(\mathbb{Q}, Z(\widehat{G})) = \{1\}$ であるから、

$$\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q}) = \pi_0((Z(\widehat{I}_0)/Z(\widehat{G}))^\Gamma) = \Big(\bigcap_v Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_v} Z(\widehat{G})\Big)/Z(\widehat{G}) \tag{4.2}$$

である。$\Gamma_v := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_v/\mathbb{Q}_v)$。

つぎに $(\gamma_0, \gamma, \delta)$ を 4.1 の通りとして、これに対し各素点での局所不変量 $\alpha_v(\gamma_0; \gamma, \delta) \in X^*(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_v})$ を定義する。

(i) $v \neq p, \infty$. 仮定から $g \in G(\overline{Q}_v)$ があって $\gamma_v = g\gamma_0 g^{-1}$ である。そこで

$$\alpha_v(\gamma_0; \gamma_v, \delta) := \mathrm{inv}(\gamma_0, \gamma_v)$$

つまり 1-コサイクル $\Gamma_v \ni \sigma \to g^{-1}\sigma(g) \in I_0(\overline{\mathbb{Q}}_v)$ の $H^1(\mathbb{Q}_v, I_0)$ での像、と定義する。Tate-中山の双対性の functorial な拡張 (cf. [Ko4])

$$\alpha_{I_0} : H^1(\mathbb{Q}_v, I_0) \longrightarrow \pi_0(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_v})^D$$

によりこれは $Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_v}$ の指標と思える。またこれは g の取り方によらない。また $I(v) := G_{\gamma_v} \subset G$ とする。

(ii) $v = p$. $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大を $\mathbb{Q}_p^{un}$ と書く。仮定から $c \in G(\mathbb{Q}_p^{un})$ があって $N\delta = c\gamma_0 c^{-1}$ となる。$b := c^{-1}\delta\sigma(c)$ の σ-共役類は c の取り方によらない。さて [Ko2] Lemma 6.1 から写像

$$\{I_0(\mathbb{Q}_p^{un}) \text{ 内の } \sigma\text{-共役類}\} \longrightarrow X^*(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_p})$$

がある。そこでこれによる b の σ-共役類の像を $\alpha_p(\gamma_0; \gamma, \delta)$ と定義する。また $I(p) := G_{\delta,\sigma} \subset \mathrm{Res}_{L_j/\mathbb{Q}_p} G$ とする。

(iii) $v = \infty$. 仮定から γ_0 を含む $I_{0,\mathbb{R}}$ の modulo $Z_G(\mathbb{R})$ で compact (elliptic) な Cartan 部分群 T が取れる。$h : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}} \in X_\infty$ であって T を経由するものを１つ固定する。4.1 と同様に h の係数拡大 $h_{\mathbb{C}} : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \otimes \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to T_{\mathbb{C}}$ の第１成分への制限は $\mu_h \in X_*(T) = X^*(\widehat{T})$ を与える。そこで

$$\alpha_\infty(\gamma_0; \gamma, \delta) := \mu_h|_{Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_\infty}} \in X^*(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_\infty})$$

と定義する。これは T 及び h の取り方によらない。また $\mathrm{Ad}(h(\sqrt{-1}))$ は I_0 の Cartan 対合を与えるが、それについての I_0 の real form を $I(\infty)$ と定義する。

さてやっと Kottwitz 不変量が定義できる。各 $\alpha_v(\gamma_0; \gamma, \delta)$ を $Z(\widehat{G})$ 上で

$$\alpha(\gamma_0; \gamma, \delta)\Big|_{Z(\widehat{G})} := \begin{cases} \mu_h & \text{at } v = \infty \\ -\mu_h & \text{at } v = p \\ 1 & \text{at other } v \end{cases}$$

とすることで $Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_v} Z(\widehat{G})$ に延ばしておく。Kottwitz の不変量を

$$\alpha(\gamma_0; \gamma, \delta) := \prod_v \alpha_v(\gamma_0; \gamma, \delta)\Big|_{\left(\bigcap_v Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_v} Z(\widehat{G})\right)\big/ Z(\widehat{G})} \in \mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})^D$$

と定義する。

4.2.2. 玉河数. ここでは代数群の玉河数についての Kottwitz の結果を復習する。このサブセクションでは G は $\mathbb{Q}$ 上の簡約代数群を表す。

各素点 v で $\mathbb{Q}_v$ 上の測度 dx_v を

$$dx_v := \begin{cases} \mathbb{Z}_v \text{ の測度が } 1 \text{ になるもの} & \text{at } v \neq \infty \\ \text{Haar 測度} & \text{at } v = \infty \end{cases}$$

と取っておく。G 上の最大次数の微分形式 ω を１つ固定し、それから係数拡大で得られる $G_v := G \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_v$ 上の微分形式を ω_v と書く。Hilbert の 90 番定理から (ω_v は $\mathbb{Q}_v$ 上定義されていないにも関わらず) "ω_v と dx_v の合成" (ω の密度と呼ばれる) により $G(\mathbb{Q}_v)$ 上の測度 $|\omega_v|$ が得られる。しかし単純にこの測度の積を取って得られる $G(\mathbb{A})$ 上の測度 $\prod_v |\omega_v|$ は Radon 測度ではない。そこで Γ の $X^*(G) \otimes \mathbb{C}$ 上の表現を r_G と書いて $L(s, r_G) = \prod_v L_v(s, r_G)$ をその Artin L-関数とする。$G(\mathbb{A})$ 上の測度

$$dg := \lim_{s \to 1} (s-1)^{rk_{\mathbb{Q}} Z(G)} L(s, r_G) |\omega_\infty| \prod_{v \neq \infty} \frac{|\omega_v|}{L_v(1, r_G)}$$

を玉河測度と呼ぶ。これは Radon 測度であり、idele norm の積公式から ω の取り方によらず定まる。なお $rk_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$-split ランクを表す。

G の $\mathbb{Q}$ 上有理的な指標の群を $X^*(G)_{\mathbb{Q}}$ と書く。$G(\mathbb{A})^1 := \bigcap_{\chi \in X^*(G)_{\mathbb{Q}}} \mathrm{Ker}|\chi|_{\mathbb{A}}$ とおき、G の玉河数 $\tau(G)$ を

$$\tau(G) := \int_{G(\mathbb{A})^1} dg$$

と定義する。

命題 4.2 ([Ko5] Theorem). $\mathbb{Q}$ 上の簡約代数群 G について

$$\tau(G) = \frac{|\mathfrak{K}(G/\mathbb{Q})|}{|\ker^1(\mathbb{Q}, G)|} \tag{4.3}$$

が成り立つ。

4.2.3. *Sign changes.* 最後の準備は符号 $e(G)$。局所体 F 上の簡約代数群 G に対し、その quasi-split inner twist $\psi : G \to G^*$ を１つ固定し

$$e(G) := \begin{cases} (-1)^{rk_F G_{der} - rk_F G^*_{der}} & F \text{ が non-archimedean の時} \\ (-1)^{q(G_{der}) - q(G^*_{der})} & F \text{ が } \mathbb{R} \text{ の時} \\ 1 & F \text{ が } \mathbb{C} \text{ の時} \end{cases}$$

と定義する。ここで $q(G)$ は簡約実 Lie 群 $G(\mathbb{R})$ の対称空間の次元の 1/2 である。次に G を $\mathbb{Q}$ 上の簡約代数群とする。各素点 v で local な符号 $e(G_v)$ が定義されているが、これについて積公式

$$\prod_v e(G_v) = 1 \tag{4.4}$$

が成立する。

4.2.4. *Stabilization– 第１段階.* まず Theorem 4.1 (6) の測度の取り方から

$$\mathrm{vol}(I(\mathbb{Q}) \backslash I(\mathbb{A}_f)) = \frac{\mathrm{vol}(I(\mathbb{Q}) Z_G(\mathbb{R})_+ \backslash I(\mathbb{A}))}{\mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+ \backslash I(\mathbb{R}))} = \frac{\tau(I)}{\mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+ \backslash I(\mathbb{R}))}.$$

一方 I と I_0 は互いの inner form なので $\tau(I) = \tau(I_0)$ であり、従って 4.3 を使って

$$c(\gamma_0; \gamma, \delta) = \frac{|\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})|}{\mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+ \backslash I(\mathbb{R}))}.$$

これと有限群の指標の直交関係;

$$\frac{1}{|\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})|} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})} \langle \alpha(\gamma_0; \gamma, \delta), \kappa \rangle = \begin{cases} 1 & \alpha(\gamma_0; \gamma, \delta) \text{ が自明の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

から

$$
\begin{aligned}
N(j, f^p) &= \sum_{\gamma_0} \sum_{\gamma,\delta} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})} \frac{\langle \alpha(\gamma_0; \gamma, \delta), \kappa \rangle}{\mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+ \backslash I(\mathbb{R}))} O_\gamma(f^p) TO_\delta(\phi_j) \\
&= \sum_{\gamma_0} \sum_{\gamma,\delta} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})} \frac{\langle \alpha(\gamma_0; \gamma, \delta), \kappa \rangle}{\mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+ \backslash I(\mathbb{R}))} e(\gamma, \delta) O_\gamma(f^p) TO_\delta(\phi_j)
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

を得る。ここで $e(\gamma, \delta) := \prod_v e(I(v))$ とした。ここでは全ての素点で $I(v) \simeq I \otimes \mathbb{Q}_v$ であったから $e(\gamma, \delta) = 1$ である。

4.3. **Endoscopy からの準備.**

4.3.1. *G の L-群.* $G = GSp(2)$ の Borel pair $(\mathbf{B}, \mathbf{T})$ を

$$
\mathbf{B} := \{\text{ 上三角行列} \in G\}, \quad \mathbf{T} := \{\mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3, t_4) \,|\, t_1 t_4 = t_2 t_3\}
$$

と固定し、$\mathbf{T}$ の指標群 $X^*(\mathbf{T})$ の基底を

$$
e_i : \mathbf{T} \ni \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3, t_4) \longrightarrow t_i \in \mathbb{G}_m, \quad (i = 1, 2, 3)
$$

と取る。$\mathbf{T}$ の $\mathbf{B}$ での simple roots の集合は $\Delta = \{\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = e_2 - e_3\}$ であり、positive roots の集合 R^+ は Δ に $\alpha_1 + \alpha_2 = e_1 - e_3,\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 2e_1 - e_2 - e_3$ が加わる。$\mathbf{T}$ の G での Weyl 群を Ω と書く。これは α_i に対する simple reflection ω_i たちで生成され、それらの間の基本関係式は

$$
\omega_1 \omega_2 \omega_1 \omega_2 = \omega_2 \omega_1 \omega_2 \omega_1
$$

である。上の Borel pair に α_i $(i = 1,\, 2)$ の root vector

$$
X_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}
$$

をつけ加えた3つ組 $(\mathbf{B}, \mathbf{T}, \{X_{\alpha_i}\}_{i=1,2})$ は G の $\mathbb{Q}$-splitting を与える。また $\mathbf{T}$ の１変数部分群の群 $X_*(\mathbf{T})$ の $\{e_i\}$ に対する双対基底 $\{e_i^\vee\}$ は

$$
\begin{aligned}
e_1^\vee &: \mathbb{G}_m \ni t \longrightarrow \mathrm{diag}(t, 1, 1, t^{-1}) \in \mathbf{T} \\
e_2^\vee &: \mathbb{G}_m \ni t \longrightarrow \mathrm{diag}(1, t, 1, t) \in \mathbf{T} \\
e_3^\vee &: \mathbb{G}_m \ni t \longrightarrow \mathrm{diag}(1, 1, t, t) \in \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

となり、上の各 root に対する coroots は $\alpha_1^\vee = e_1^\vee - e_2^\vee + e_3^\vee$, $\alpha_2^\vee = e_2^\vee - e_3^\vee$, $(\alpha_1 + \alpha_2)^\vee = e_1^\vee + e_2^\vee - e_3^\vee$, $(2\alpha_1 + \alpha_2)^\vee = e_1^\vee$ で与えられる。一般に代数群 H の based root datum (池田氏の記事を参照) を $\Psi(H)$ と書くことにする。

G の L-群を記述するには完全系列

$$
0 \longrightarrow \mathbb{Z}e_1^\vee \oplus \mathbb{Z}(e_2^\vee - e_3^\vee) \longrightarrow X_*(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{Z}\varepsilon^\vee \longrightarrow 0
$$

($\varepsilon^\vee$ は $e_3^\vee$ の像) が based root datum の完全系列

$$
0 \longrightarrow \Psi(Sp(2)) \longrightarrow \Psi(G) \longrightarrow \Psi(\mathbb{G}_m) \longrightarrow 0
$$

を与えることに注意する。これの双対完全系列

$$
0 \longrightarrow \Psi(\mathbb{G}_m(\mathbb{C})) \longrightarrow \Psi(\widehat{G}) \longrightarrow \Psi(PSp(2, \mathbb{C})) \longrightarrow 0 \tag{4.6}
$$

から $\widehat{G}=GSp(2,\mathbb{C})$ を得る。$\widehat{G}$ の splitting $(\mathcal{B},\mathcal{T},\{\mathcal{X}_{\alpha_i^\vee}\}_{i=1,2})$ は G の $\mathbb{Q}$-splitting と同様のものを取る。$X^*(\mathcal{T})$ ($X_*(\mathcal{T})$ resp.) の基底 $\{\epsilon_i^\vee\}$ ($\{\epsilon_i\}$ resp.) を $\{e_i\}$ ($\{e_i^\vee\}$ resp.) と同様のものに取ると、通常の同一視 $X^*(\mathcal{T})=X_*(\mathbf{T})$, $X_*(\mathcal{T})=x^*(\mathbf{T})$ は同型

$$X^*(\mathcal{T})\ni \begin{matrix}\epsilon_1^\vee & \to & e_1^\vee+e_2^\vee\\ \epsilon_2^\vee & \to & e_1^\vee+e_3^\vee\\ \epsilon_3^\vee & \to & e_2^\vee\end{matrix} \in X_*(\mathbf{T}),\quad X_*(\mathcal{T})\ni \begin{matrix}\epsilon_1 & \to & e_1-e_3\\ \epsilon_2 & \to & e_3\\ \epsilon_3 & \to & -e_1+e_2+e_3\end{matrix} \in X^*(\mathbf{T})$$

で与えられる。G は split しているのでその L-群 ${}^LG$ は直積 $\widehat{G}\times\Gamma$ である。

4.3.2. G の *Elliptic endoscopic data.* G の endoscopic 群とは、大雑把に言えば G の保型関数の記述に寄与してくる群のことである。endoscopic 群は endoscopic data と呼ばれる４つ組 $(H,\mathcal{H},s,\xi)$ の一部であるが、我々の場合には $\mathcal{H}={}^LH$ となるので３つ組 (H,s,ξ) を考察する。

３つ組 (H,s,ξ) が G の *endoscopic data* であるとは (cf. [L-S] (1.2))、

(1) H は $\mathbb{Q}$ 上の quasi-split な代数群。その L-群を ${}^LH=\widehat{H}\rtimes\Gamma$ と書く。

(2) $s\in\widehat{G}$ は半単純元。

(3) $\xi:{}^LH\to{}^LG$ は L-準同型で、同型 $\xi|_{\widehat{H}}:\widehat{H}\xrightarrow{\sim}\widehat{G}_s$ に制限されるもの。

であって、ある $\ker^1(\mathbb{Q},Z(\widehat{G}))$ に属する１コサイクル $\{a(\sigma)\}_{\sigma\in\Gamma}$ があって

$$s\xi(h)s^{-1}=a(w(h))\xi(h),\quad \text{for any } h\in{}^LH \tag{4.7}$$

が成り立つもののことを言う。ここで $w(h)$ は h の射影 ${}^LH\twoheadrightarrow\Gamma$ による像を表す。endoscopic data の同値類とは H の同型類と (s,ξ) の $\widehat{G}$-共役類の組を言う。最後に endoscopic data (H,s,ξ) が *elliptic* とは $\xi({}^LH)$ が ${}^LG$ の真放物型部分群に含まれていないことを言う。

G の elliptic endoscopic data の同値類を分類するには $s\in\widehat{G}$ から出発するとよい。$s\in\mathcal{T}$ としてよく、我々の場合 $\ker^1(\mathbb{Q},Z(\widehat{G}))$ は自明なので s としては $\pi_0([\mathcal{T}/Z(\widehat{G})]^\Gamma)$ の $\mathcal{T}$ での代表元たち

$$s_0=\mathrm{diag}(1,-1,-1,1),\quad s_1=\mathrm{diag}(1,1,-1,-1),\quad s_2=1$$

を取れば十分である。これから $\widehat{H}$ は定まる。すなわち $\widehat{H}_i:=\widehat{G}_{s_i}$ $(i=1,2)$ と書くことにすれば

$$\widehat{H}_0=\left\{\begin{pmatrix}a_1&&&b_1\\&a_2&b_2&\\&c_2&d_2&\\c_1&&&d_1\end{pmatrix}\in\widehat{G}\right\},\quad \widehat{H}_1=\left\{\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{matrix}&0\\\hline 0&\begin{matrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{matrix}\end{array}\right)\in\widehat{G}\right\}$$

である。これからまず s_1 に対応する endoscopic data は elliptic ではない。そこで s_0 に対応する endoscopic data を全て決定する。${}^LH$ を決めればそれを L-群に持つ quasi-split な群 H は (同型を除いて) １つに決まるので、あとは $\widehat{H}$ への Γ の作用を決めればよい。それには $\mathcal{T}$ を G の Cartan 部分群 T の dual 群と見てそれへの Γ の作用を $\widehat{H}$ に延ばせばよい。$\widehat{H}_0\simeq\widehat{H}:=\{(g_1,g_2)\in GL(2,\mathbb{C})\times GL(2,\mathbb{C})\mid\det(g_1)=\det(g_2)\}$ に注意しておく。

s_0 は G の任意の Cartan 部分群 T について $[\widehat{T}/Z(\widehat{G})]^\Gamma$ に入っている。しかし T が modulo $Z(G)$ で anisotropic でないときには s_i $(i=1,2)$ のどれかと同じ $\pi_0([\mathcal{T}/Z(\widehat{G})]^\Gamma)$ の元に落ちるので、T が anisotropic の時のみ考えればよい。従って２次拡大 $k/\mathbb{Q}$ に関する１次の unitary 群を $U(1)_{k/\mathbb{Q}}$ と書けば、$T/Z(G)$ は $U(1)_{k_1/\mathbb{Q}}\times U(1)_{k_2/\mathbb{Q}}$ に同型で $\mathrm{Gal}(k_i/\mathbb{Q})$ の生成元 σ_i の $\widehat{T}$ への作用には

(1) $\sigma_1=\omega_2,\ \sigma_2=\omega_1\omega_2\omega_1$
(2) $\sigma_1=\omega_1,\ \sigma_2=\omega_1\omega_2\omega_1\omega_2$
の２つの可能性がある。しかし (2) は 4.7 を満たさないので除かれる。(1) のときには σ_1、σ_2 とも $\widehat{H}_0$ の内部自己同型なのでそれらで Γ の作用をひねって自明な作用としてよい。よって完全系列

$$(4.8)\quad 1\longrightarrow\widehat{H}\longrightarrow GL(2,\mathbb{C})\times GL(2,\mathbb{C})\ni(g_1,g_2)\longrightarrow\det(g_1)\det(g_2)^{-1}\in\mathbb{G}_m(\mathbb{C})\longrightarrow 1$$

の双対を取って、対応する endoscopic 群は

$$H:=GL(2)\times GL(2)/\{(a\mathbf{1}_2,a^{-1}\mathbf{1}_2)\,|\,a\in\mathbb{G}_m\}$$

であり、その L-群は

$${}^LH=\widehat{H}\times\Gamma$$

となる。さらに L-埋め込み ξ は

$$(4.9)\qquad \xi:{}^LH\ni\left(\left(\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\right),\sigma\right)\longrightarrow\left(\begin{pmatrix}a_1&&&b_1\\&a_2&b_2&\\&c_2&d_2&\\c_1&&&d_1\end{pmatrix},\sigma\right)\in{}^LG$$

で与えられる。これが G の (G 自身以外の) 唯一の elliptic endoscopic datum である。G の時と同様に H 及び $\widehat{H}$ の splitting $(\mathbf{B}_H,\mathbf{T}_H,\{Y_{\beta_i}\}_{i=1,2})$, $(\mathcal{B}_H,\mathcal{T}_H,\{\mathcal{Y}_{\beta_i^\vee}\}_{i=1,2})$ を

$$\mathbf{B}_H:=\{(g_1,g_2)\in GL(2)\times GL(2)\,|\,g_i\text{ は上三角 }\}\text{ の }H\text{ での像},$$
$$\mathbf{T}_H:=\left\{\left(\begin{pmatrix}t_1&\\&t_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t_3&\\&t_4\end{pmatrix}\right)\in GL(2)\times GL(2)\right\}\text{ の }H\text{ での像},$$
$$Y_{\beta_1}=\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\mathbf{0}_2\right)\text{ の }H\text{ での像},\quad Y_{\beta_2}=\left(\mathbf{0}_2,\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\text{ の }H\text{ での像},$$
$$\mathcal{B}_H:=\{(g_1,g_2)\in GL(2,\mathbb{C})\times GL(2,\mathbb{C})\in\widehat{H}\,|\,g_i\text{は上三角 }\},$$
$$\mathcal{T}_H:=\left\{\left(\begin{pmatrix}t_1&\\&t_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t_2&\\&t_3\end{pmatrix}\right)\in\widehat{H}\,|\,t_1t_4=t_2t_3\right\},$$
$$\mathcal{Y}_{\beta_1^\vee}=\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\mathbf{0}_2\right),\quad\mathcal{Y}_{\beta_2^\vee}=\left(\mathbf{0}_2,\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$$

と固定しておく。ただし β_i は $\mathbf{T}_H$ の $\mathbf{B}_H$ に関する simple roots であり、$\beta_i^\vee$ はその coroot である。また H の Weyl 群を Ω_H と書く。

4.3.3. *Norm map* と軌道積分の *transfer.* F を $\mathbb{Q}$ または $\mathbb{Q}_v$ とする。$H(\overline{F})$ の半単純元 γ_H に対してそれを含む Cartan 部分群 T_H、さらに T_H を含む Borel 部分群 B_H を勝手に取る。同様に G の Cartan 部分群とそれを含む Borel 部分群の組 (T_G,B_G) を取っておく。$(\widehat{B}_H,\widehat{T}_H)$ ($(\widehat{B}_G,\widehat{T}_G)$ resp.) を $(\mathcal{B}_H,\mathcal{T}_H)$ ($(\mathcal{B},\mathcal{T})$ resp.) と同一視すれば、同型の合成 $\widehat{T}_H\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}_H\overset{\xi}{\xrightarrow{\sim}}\mathcal{T}\xrightarrow{\sim}\widehat{T}_G$ の双対を取ることで同型 $T_H\xrightarrow{\sim}T_G$ が得られる。またこの同一視により、Ω_H は Ω の部分群と思え、T_H の H での root system は T_G の G でのそれの subsystem とみなせる。この同型から定まる $T_H/\Omega_H\to T_G/\Omega$ は $\widehat{B}_H$ と $\widehat{B}_G$ の取り方によらない。従って $H(\overline{F})$ の半単純共役類から $G(\overline{F})$ のそれへの標準的な写像

$$\mathcal{A}_{H/G}:Cl_{ss}(H(\overline{F}))\longrightarrow Cl_{ss}(G(\overline{F}))$$

が得られた。

補題 4.3 ([L-S] Lemma 1.3.A.). $\mathcal{A}_{H/G}$ は $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の作用と可換。

補題 4.4 (Steinberg の定理). G をその導来群 G_{der} が単連結な F 上の簡約代数群とするとき、G 内の $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-不変な半単純共役類は F-有理点を持つ。

これから $\mathcal{A}_{H/G}$ は $H(F)$ 内の半単純な $H(\overline{F})$-共役類から $G(F)$ 内の $G(\overline{F})$-共役類への標準的な写像を与える。$\gamma_H \in H(F)$ が *G-regular* とは $\mathcal{A}_{H/G}(\{\gamma_H\})$ が $G(F)$ の regular 半単純共役類であることを言う。半単純な $\gamma_H \in H(F)$ が *(G,H)-regular* とは、γ_H を含む H の F-Cartan 部分群 T_H と前述の同型 $j : T_H \xrightarrow{\sim} T_G$ を固定したとき、H から来ていない T_G の G での root α に対して $\alpha(j(\gamma_H)) \neq 1$ が成り立つことを言う。この定義は T_H, T_G etc. の取り方によらない。もちろん G-regular なら (G,H)-regular だが、逆は正しくない。

さて $F = \mathbb{Q}_v$ とし、$\gamma_H \in H(F)$ を (G,H)-regular とする。γ_H の $H(\overline{F})$-共役類は F 上定義された G の閉部分多様体。この上の最大次数の微分形式を 1 つ取り、4.2.2 の時と同様にして $H(F)$ 内の $H(\overline{F})$-共役類 $\mathcal{O}_{st}(\gamma_H)$ の上の測度が定まる。$H(\overline{F})$-共役類は有限個の $H(F)$-共役類 $\mathcal{O}(\gamma')$ たちの合併になっている。そこで各 $\mathcal{O}(\gamma')$ 上の上述の測度に関する軌道積分を

$$O_{\gamma'}(f^H) := \int_{G_{\gamma'}(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma' g)\,\frac{dg}{di}, \quad (f^H \in C_c^\infty(H(F)))$$

と書くことにして、$\mathcal{O}_{st}(\gamma_H)$ での *stable* 軌道積分を

$$SO_{\gamma_H}(f^H) := \sum_{\mathcal{O}(\gamma')\in\mathcal{O}_{st}(\gamma_H)} e(G_{\gamma'})O_{\gamma'}(f^H)$$

と定義する。さらに γ_H が G-regular なとき $G(F)$ の regular で半単純な γ で $\mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))$ に入っているものに対し、*transfer factor* と呼ばれる関数 $\Delta(\gamma_H,\gamma)$ が定数倍を除いて一意に定義されている ([L-S] §§2–4)。このとき次の予想は (我々の群 $GSp(2)$ に限り) T. Hales によって証明されている ([H1])。

定理 4.5 (Transfer の存在). *Transfer factor* $\Delta(\gamma_H,\gamma)$ *は* (G,H)*-regular な* γ_H *とその像* $\mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))$ *に入っている* γ *に連続的に延びて、*$f \in C_c^\infty(G(F))$ *に対して* $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ *があって*

$$SO_{\gamma_H}(f^H) = \sum_{\mathcal{O}(\gamma)\in\mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))} \Delta(\gamma_H,\gamma)e(G_\gamma)O_\gamma(f) \tag{4.10}$$

が成り立つ。

4.3.4. *Fundamental lemma と global hypothesis.* まず $\mathbb{Q}$ の素点 $v \neq \infty, p$ を 1 つ取る。$G(\mathbb{Q}_v)$ ($H(\mathbb{Q}_v)$ resp.) 上の測度 dg (dh resp.) を $K_v = G(\mathbb{Z}_v)$ ($K_v^H = H(\mathbb{Z}_v)$ resp.) の測度が 1 になるものに取る。(G,H)-regular な $\gamma_H \in H(\mathbb{Q}_v)$ を取れば、γ_H に $H(\overline{\mathbb{Q}}_v)$-共役な γ'_H や $\gamma \in \mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))$ に対して、その連結中心化群 $H_{\gamma'_H}$ や G_γ たちは H_{γ_H} の L-群と同型な L-群を持つ。つまり H_{γ_H} の inner forms になっている。従って $H_{\gamma_H}(\mathbb{Q}_v)$ 上の不変測度 di を 1 つ固定すれば、それを inner twistings で移すことで $H_{\gamma_H}(\mathbb{Q}_v)$ や $G_\gamma(\mathbb{Q}_v)$ の上に共通の測度が決まる。これらを使って $\mathcal{O}(\gamma)$ や $\mathcal{O}(\gamma'_H)$ の上の測度 dg/di や dh/di が得られる。

定理 4.6 (Hecke 環の単位元に対する Fundamental lemma). $f_v^0 \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_v))$ *(*$f_v^{H,0} \in C_c^\infty(H(\mathbb{Q}_v))$ *resp.) を* K_v *(*K_v^H *resp.) の特性関数とするとき、適当な* $\Delta(\gamma_H,\gamma)$ *の normalization の下で*

$$SO_{\gamma_H}(f_v^{H,0}) = \sum_{\mathcal{O}(\gamma)\in\mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))} \Delta(\gamma_H,\gamma)e(G_\gamma)O_\gamma(f_v^0) \tag{4.11}$$

が成り立つ。ここで軌道積分たちは上述の商測度 dg/di *(dh/di resp.)* について取るものとする。

これは、J-L. Waldspurger による spherical な軌道積分の singular value の記述を使って、T. Hales によって証明された。証明自体はまだ publish されていないが、そのアイディアは [H2] に見ることができる。

次は global hypothesis である。$\gamma_H \in H(\mathbb{A}_f^p)$ とするとき、各素点 $v \neq p, \infty$ で 4.10 や 4.11 の右辺は複数の元の和になっているから、それらの無限積で書かれる $SO_{\gamma_H}(f^H)$ が意味を持つことは自明ではない。これを保証するのが次の global hyothesis である。

定理 4.7 (Global hypothesis)**.** 各 v での *local transfer factor* $\Delta_v(\gamma_{H,v}, \gamma_v)$ の定数倍を適切に取ることにより次が成り立つ。
(a) 任意の (G,H)*-regular* な $\gamma_H \in H(\mathbb{Q})$ 及び各 v で $\gamma_v \in \mathcal{A}_{H_v/G_v}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))$ である $\gamma \in G(\mathbb{A})$ に対し、$\prod_v \Delta_v(\gamma_H, \gamma_v)$ は実際は有限積。この積を $\Delta(\gamma_H, \gamma)$ と書く。
(b) $\gamma_0 \in G(\mathbb{Q}) \cap \mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))$ を一つ固定してその連結中心化群を I_0 と書く。このとき $\gamma = (\gamma_v)_v \in G(\mathbb{A}) \cap \prod_v \mathcal{A}_{H_v/G_v}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))$ に対して、

$$\Delta(\gamma_H, \gamma) = \langle \mathrm{obs}(\gamma), \kappa_H \rangle$$

が成り立つ。ここで $\mathrm{obs}(\gamma) \in \mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})^D$ *(cf. 4.2.1)* は [Ko4] *6.5.* の *obstruction* である。これは γ_0 に $G(\overline{\mathbb{A}})$-共役な $\gamma \in G(\mathbb{A})$ に対して定義され、γ が γ_0 に $G(\overline{\mathbb{Q}})$-共役な時、またそのときに限り 1 になる。また $\kappa_H \in \mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})$ は $s \in Z(\widehat{H})$ の $\pi_0((Z(\widehat{I_0})/Z(\widehat{G}))^\Gamma)$ での像である。

これは γ_H が G-regular な時には [L-S] Theorem 6.3.A, Corollary 6.4.B で証明されている。(G,H)-regular だけの時には [H3] に証明されているかも知れないが、まだチェックしていない。

4.3.5. *Twisted case の fundamental lemma.* $v = p$ で考える。$\widetilde{G}_j := \mathrm{Res}_{L_j/\mathbb{Q}_p} G$ と書くことにし、$G(L_j)$ への Frobenius 元 $\sigma = \mathrm{Fr_p}$ の作用から定まる $\widetilde{G}_j$ の $\mathbb{Q}_p$ 上の自己同型を $\tilde{\sigma}$ と書く。$\widetilde{G}_j$ の L-群は

$${}^L(\widetilde{G}_j) = \underbrace{\widehat{G} \times \cdots \times \widehat{G}}_{j\text{-tuple}} \rtimes \Gamma_p$$

で与えられる。ただし Γ_p は不分岐な商群 $\mathrm{Gal}(L_j/\mathbb{Q}_p)$ を経由して作用し、特に Frobenius 元 $\sigma = \mathrm{Fr_p}$ は巡回置換 $(g_1, g_2, \ldots, g_j) \xrightarrow{\sigma} (g_2, \ldots, g_j, g_1)$ で作用する。

対角埋め込み

$$\widehat{G} \ni g \overset{\iota}{\hookrightarrow} (g, g, \ldots, g) \in \underbrace{\widehat{G} \times \cdots \times \widehat{G}}_{j\text{-tuple}}$$

は L-embedding $\iota : {}^LG \hookrightarrow {}^L(\widetilde{G}_j)$ を与える。これと $\xi : {}^LH \hookrightarrow {}^LG$ の合成を $\tilde{\xi}_j^0$ と書く。$s = \mathrm{diag}(1,-1,-1,1)$ ($\widehat{H}$ の元としては $(\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_2)$) であったが、$\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_j) \in \widehat{G} \times \cdots \times \widehat{G}$ をその norm $t_1 t_2 \cdots t_j$ が s^{-1} に等しいものとする。これから $\mathrm{Gal}(L_j/\mathbb{Q}_p)$-1-コサイクル

$$\mathrm{Gal}(L_j/\mathbb{Q}_p) \ni \sigma^k \to \boldsymbol{t}_{\sigma^k} := \boldsymbol{t}\sigma(\boldsymbol{t}) \cdots \sigma^{k-1}(\boldsymbol{t}) \in \mathrm{Int}(\widehat{H} \times \cdots \times \widehat{H})$$

が得られる。($\boldsymbol{t}_{\sigma^j} = (s^{-1}, \ldots, s^{-1}) \in Z(\widehat{H} \times \cdots \times \widehat{H})$ からこれは well-defined。) これで $\tilde{\xi}_j^0$ をひねったものを

$$\tilde{\xi}_j : {}^LH \ni (h, \sigma^k) \hookrightarrow \boldsymbol{t}_{\sigma^k} \tilde{\xi}_j^0(h, \sigma^k) \in {}^L(\widetilde{G}_j)$$

と定義する。

$\tilde{\xi}_j$ から Hecke 環の準同型を作るには佐武同型を使う。$\widetilde{G}_j(\mathbb{Q}_p) = G(L_j)$ ($H(\mathbb{Q}_p)$ resp.) の K_{L_j} (K_p^H resp.) に関する $\mathbb{C}$ に値を取る Hecke 環を $\mathcal{H}(G(L_j)//K_{L_j})$ ($\mathcal{H}(H(\mathbb{Q}_p)//K_p^H)$ resp.) と書く。すなわち、$\mathcal{H}(G(L_j)//K_{L_j}) := \mathcal{H}(G(L_j)//K_{L_j})_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ である。他の群についても同様。

$$\mathcal{H}(G(L_j)//K_{L_j}) \ni f \overset{\sim}{\longrightarrow} f^{(\mathbf{B})} \in [\mathcal{H}(\mathbf{T}(L_j)//\mathbf{T}(\mathcal{O}_j))]^{\Omega}$$
$$f^{(\mathbf{B})}(t) := \delta_{\mathbf{B}}(t)^{1/2} \int_{\mathbf{N}(L_j)} f(tn)\, dn, \quad (t \in \mathbf{T}(L_j))$$

と標準同型

$$[\mathcal{H}(\mathbf{T}(L_j)//\mathbf{T}(\mathcal{O}_j))]^{\Omega} \ni f^{(\mathbf{B})} \overset{\sim}{\longrightarrow} f^{\vee} := \sum_{i=1,2} f^{(\mathbf{B})}(e_i^{\vee}(\varpi_{L_j}))e_i^{\vee} \in \mathbb{C}[\mathcal{T}]^{\Omega}$$

の合成が佐武同型である。H の佐武同型も同様に $\mathcal{H}(H(\mathbb{Q}_p)//K_p^H) \ni f^H \overset{\sim}{\to} (f^H)^{\vee} \in \mathbb{C}[\mathcal{T}_H]^{\Omega_H}$ と書く。この佐武同型を使って $\tilde{\xi}_j$ に対して、Hecke 環の準同型

$$\tilde{\xi}_j : \mathcal{H}(G(L_j)//K_{L_j}) \to \mathcal{H}(H(\mathbb{Q}_p)//K_p^H)$$

を $(\tilde{\xi}_j f)^{\vee} = f^{\vee} \circ \tilde{\xi}_j$ と定める。

$x, y \in \widetilde{G}_j$ が σ-共役であるとは、$g \in \widetilde{G}_j$ があって $y = g^{-1}x\tilde{\sigma}(g)$ が成り立つことであった。$\delta \in \widetilde{G}_j(\mathbb{Q}_p)$ の $\widetilde{G}_j(\mathbb{Q}_p)$-$\sigma$-共役類を $\mathcal{O}_{\sigma}(\delta)$ と書き、δ の $\widetilde{G}_j(\overline{\mathbb{Q}}_p)$-$\sigma$-共役類を $\mathcal{O}_{st,\sigma}(\delta)$ と書く。"Concrete norm map" $N : \widetilde{G}_j \ni g \to g\tilde{\sigma}(g)\cdots\tilde{\sigma}^j(g) \in \widetilde{G}_j$ は norm map

$$\mathcal{N} : \{\widetilde{G}_j(\mathbb{Q}_p) \text{ 内の } \widetilde{G}_j(\overline{\mathbb{Q}}_p)\text{-}\sigma\text{-共役類}\} \to \{G(\mathbb{Q}_p) \text{ 内の } G(\overline{\mathbb{Q}}_p)\text{-共役類}\}$$

を与える。半単純元 $G(L_j) \in \delta$ と $\gamma \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_{st,\sigma}(\delta))$ に対し、δ の σ-中心化群 $G_{\delta,\sigma} := \{g \in \widetilde{G}_j \mid g^{-1}\delta\tilde{\sigma}(g) = \delta\}$ は G_{γ} の inner form になっている。従って 4.3.4 と同様に $G_{\delta,\sigma}(\mathbb{Q}_p)$ や $G_{\gamma}(\mathbb{Q}_p)$ の上に共通の測度 di が取れる。さらに γ が (G,H)-regular な $\gamma_H \in H(\mathbb{Q}_p)$ から来ていれば (つまり $\gamma \in \mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))$ であれば) 、$H_{\gamma_H}(\mathbb{Q}_p)$ 上にも di を持っていける。

さいごに $\delta \in \widetilde{G}_j(\mathbb{Q}_p)$ と $\gamma_0 \in \mathcal{N}(\mathcal{O}_{st,\sigma}(\delta))$ に対し、$\alpha(\gamma_0;\delta) \in X^*(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_p})$ を 4.2.1 の $\alpha_p(\gamma_0;\gamma,\delta)$ と同様に定義する。

仮定 4.8 (Twisted case の fundamental lemma)**.** *(G,H)-regular な $\gamma_H \in H(\mathbb{Q}_p)$ と $f \in \mathcal{H}(G(L_j)//K_{L_j})$ に対して次が成り立つと仮定する。*

(4.12)
$$SO_{\gamma_H}(\tilde{\xi}_j f) = \begin{cases} \sum_{\substack{\mathcal{O}_{\sigma}(\delta) \\ \mathcal{N}(\mathcal{O}_{st,\sigma}(\delta)) = \mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))}} \langle \alpha(\gamma_0;\delta), s\rangle \Delta_p(\gamma_H,\gamma_0) e(G_{\gamma_0}) TO_{\delta}(f) & \mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H)) \in \mathrm{Im}(\mathcal{N}) \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

4.3.6. *Endoscopy for real groups.* 実 Lie 群上の緩増加超関数の endoscopic lift は Harish-Chandra の離散系列表現の理論、Knapp-Zuckerman の intertwining operator の理論、それに京都大学の平井先生の patching condition を組み合わせて証明されている ([Sh])。ここでは次の 4.4 の h_{∞} の構成に必要な部分を復習する。

$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ の生成元を σ と書き、4.2.1 の (iii) の記号を思い出す。$G_{\mathbb{R}}$ の elliptic Cartan 部分群 T を

$$T(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 & 0 & 0 & r\sin\theta_1 \\ 0 & r\cos\theta_2 & r\sin\theta_2 & 0 \\ 0 & -r\sin\theta_2 & r\cos\theta_2 & 0 \\ -r\sin\theta_1 & 0 & 0 & r\cos\theta_1 \end{pmatrix} \in G(\mathbb{R}) \right\}$$

と取ることにする。これの pseudo-diagonalization を Lie 環で

$$\eta_T : \mathfrak{t} \ni \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \theta_1 \\ 0 & a & \theta_2 & 0 \\ 0 & -\theta_2 & a & 0 \\ -\theta_1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \overset{\mathrm{Int}(I_G)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a+\theta_1\sqrt{-1} & & & \text{\Large 0} \\ & a+\theta_2\sqrt{-1} & & \\ & & a-\theta_2\sqrt{-1} & \\ \text{\Large 0} & & & a-\theta_1\sqrt{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}\mathbf{T}$$

となるものとする。ただし $\mathfrak{t} := \mathrm{Lie}T$ であり、

$$I_G := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & 1 & \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} & 1 & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これにより $X^*(T)$, $X_*(T)$, roots, coroots, Weyl 群などを $X^*(\mathbf{T})$, $X_*(\mathbf{T})$, $\mathbf{T}$ の roots, $\mathbf{T}$ の coroots, Ω などと同一視する。また $\mathbb{R}$ の Weil 群 $W_{\mathbb{R}}$ は集合としては $\mathbb{C}^\times \times \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ であり、その乗法は $(z_1,\tau_1)(z_2,\tau_2) = (z_1z_2, c(\tau_1,\tau_2)\tau_1\tau_2)$ ($c(\tau_1,\tau_2)$ は $c(\sigma,\sigma) = -1$、その他の時 $c(\tau_1,\tau_2) = 1$ で定義される $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$-2-コサイクル) で与えられる。

定数層 $\mathbb{Q}_\ell$ は $G(\mathbb{C})$ の単位表現に対応している。単位表現 $\mathbf{1}_{G(\mathbb{R})}$ の無限小指標 (織田先生の記事を参照) は Harish-Chandra 同型で positive roots の和の半分 $\rho_{\mathbf{B}} = (4e_1 - e_2 - 3e_3)/2 = (3\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3)/2 \in (\mathrm{Lie}\mathbf{T})^*$ に行く。これを η_T と合成して $T(\mathbb{R})$ の既約表現の無限小指標と思うと、torus に対する Langlands correspondence を使って、その既約表現に対応する Langlands' parameter

$$\varphi_T : W_{\mathbb{R}} \ni \begin{matrix} (z,1) & \longrightarrow & \left(\mathrm{diag}\left(\left(\frac{z}{\bar z}\right)^{3/2}, \left(\frac{z}{\bar z}\right)^{1/2}, \left(\frac{z}{\bar z}\right)^{-1/2}, \left(\frac{z}{\bar z}\right)^{-3/2}\right), z\right) \\ (1,\sigma) & \longrightarrow & (J_2,\sigma) \end{matrix} \in {}^L T$$

が得られる。ここで ${}^LT$ は η_T によって $T \rtimes W_{\mathbb{R}}$ (ただし $W_{\mathbb{R}}$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ を経由して $\sigma = \mathrm{Int}(J_2)$ で作用) とみなされている。これと ${}^LT \hookrightarrow {}^LG$ の合成を $\varphi : W_{\mathbb{R}} \to {}^LG$ と書く。

さて Lnaglands parameter φ に対応する L-packet Π_φ は上の $\rho_{\mathbf{B}}$ を無限小指標に持ち中心指標が自明な discrete series 表現たちからなっている。それらは $|\Omega/\Omega(G(\mathbb{R}), T(\mathbb{R}))| = 2$ 個の元からなり、その各々は

(1) $D_{hol} = \pi(\varphi, 1)$ は extremal weight が $\pm(3e_1 + 3e_2)$ の正則離散系列表現で $Sp(2,\mathbb{R})$ の正則離散系列表現 D^+_{hol} と反正則離散系列表現 D^-_{hol} の直和。
(2) $D_{nh} = \pi(\varphi, w_2)$ は extremal weight が $\pm(3e_1 - e_2)$ の非正則離散系列表現でやはり $Sp(2,\mathbb{R})$ の 2 つの非正則離散系列表現 $D^\pm_{nh}$ の直和。

これらの表現の指標を各々Θ_{hol}、Θ_{nh} と書き、stable character $S\Theta_\varphi$ を

$$S\Theta_\varphi := \Theta_{hol} + \Theta_{nh}$$

と定義する。

K_∞-finite な $f \in C_c^\infty(Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{R}))$ が $G(\mathbb{R})$ の離散系列表現 π の pseudo-coefficients であるとは

(1) $\mathrm{tr}\pi(f) := \mathrm{tr}\int_{Z_G(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R})} f(g)\pi(g)\,dg = 1$、
(2) π と同値でない任意の standard module τ に対して $\mathrm{tr}\tau(f) = 0$。

が成り立つことを言う。[Cl-De] Corollary to Proposition 4 から $G(\mathbb{R})$ の離散系列表現は pseudo-coefficient を持つ。D_{hol}、D_{nh} の pseudo-coefficient を各々f_{hol}、f_{nh} と書くことにする。

次に上の φ に lift する endoscopic 群 H の Langlands parameter は

$$\varphi_H : W_{\mathbb{R}} \ni \begin{array}{ccc} (z,1) & \to & \left(\left(\mathrm{diag}\left(\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{3/2}, \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{-3/2}\right), \mathrm{diag}\left(\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{1/2}, \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{-1/2}\right)\right), z\right) \\ (1,\sigma) & \to & \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right), \sigma\right) \end{array} \in {}^L H$$

$$\widetilde{\varphi}_H : W_{\mathbb{R}} \ni \begin{array}{ccc} (z,1) & \to & \left(\left(\mathrm{diag}\left(\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{1/2}, \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{-1/2}\right), \mathrm{diag}\left(\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{3/2}, \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{-3/2}\right)\right), z\right) \\ (1,\sigma) & \to & \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right), \sigma\right) \end{array} \in {}^L H$$

の 2 つである。一方で

$$\varphi^{(n)}_{GL(2,\mathbb{R})} : W_{\mathbb{R}} \ni \begin{array}{ccc} (z,1) & \longrightarrow & \left(\mathrm{diag}\left(\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{n/2}, \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{-n/2}\right), z\right) \\ (1,\sigma) & \longrightarrow & \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma\right) \end{array} \in {}^L(GL(2)_{\mathbb{R}}), \quad (n \in \mathbb{N})$$

は lowest $SO(2)$-weight が n で中心指標が自明な離散系列表現 D_n に対応しているので、上の φ_H 及び $\widetilde{\varphi}_H$ に対応する $H(\mathbb{R})$ の既約表現は

$$\pi(\varphi_H) = D_3 \otimes D_1, \quad \pi(\widetilde{\varphi}_H) = D_1 \otimes D_3$$

となる。今度の場合、stable character $S\Theta_{\varphi_H}$、$S\Theta_{\widetilde{\varphi}_H}$ は指標 $\Theta_{\pi(\varphi_H)}$、$\Theta_{\pi(\widetilde{\varphi}_H)}$ そのものになる。再び [Cl-De] の結果から D_n には pseudo-coefficient f_{D_n} が存在するが、これらを使って

$$\begin{aligned} h_{\varphi_H} &:= f_{D_3} \otimes f_{D_1} : H(\mathbb{R}) \ni (h_1, h_2) \longmapsto f_{D_3}(h_1) f_{D_1}(h_2) \in \mathbb{C} \\ h_{\widetilde{\varphi}_H} &:= f_{D_1} \otimes f_{D_3} : H(\mathbb{R}) \ni (h_1, h_2) \longmapsto f_{D_1}(h_1) f_{D_3}(h_2) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

と定義する。

4.4. **Test 関数** $h = h^p h_p h_\infty$ **の構成.**

4.4.1. h^p. まず $\gamma_H \in H(\mathbb{A}_f^p)$ が (G,H)-regular とは、各 $\gamma_{H,v}$ が (G,H)-regular であり、さらにほとんど全ての v で $\gamma_{H,v}$ の $G(\mathbb{F}_v)$ での像が $(G_{\mathbb{F}_v}, H_{\mathbb{F}_v})$-regular であることとする。定理 4.5, 4.6, 4.7 から、$f^p \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_f^p))$ に対して、$h^p \in C_c^\infty(H(\mathbb{A}_f^p))$ があって (G,H)-regular な $\gamma_H \in H(\mathbb{A}_f^p)$ に対して

$$SO_{\gamma_H}(h^p) = \sum_{\mathcal{O}(\gamma) \in \mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))(\mathbb{A}_f^p)} \Delta^p(\gamma_H, \gamma) e^p(\gamma) O_\gamma(f^p) \tag{4.13}$$

が成り立つ。ここで右辺の和は実際には有限和であり ([Ko4] Proposition 7.1)、$\Delta^p(\gamma_H, \gamma) := \prod_v \Delta_v(\gamma_{H,v}, \gamma_v)$、$e^p(\gamma) := \prod_{v \neq p, \infty} e(G_{\gamma_v})$ である。

4.4.2. h_p. Assumption 4.8 から、$h_p := \tilde{\xi}_j \phi_j$ とおけば

$$SO_{\gamma_H}(h_p) = \sum_{\substack{\mathcal{O}_\sigma(\delta) \\ \mathcal{N}(\mathcal{O}_{st,\sigma}(\delta)) = \mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))}} \langle \alpha(\gamma_0; \delta), s \rangle \Delta_p(\gamma_H, \gamma_0) e(G_{\gamma_0}) TO_\delta(\phi_j) \tag{4.14}$$

が成り立つ。

4.4.3. h_∞. まず $G(\mathbb{R})$ 上の関数 f_∞ を $f_\infty := (-1)^{q(G)}(f_{hol}+f_{nh})/2$ と定義する。定義から明らかに半単純な γ に対して

$$SO_\gamma(f_\infty) = e(G_\gamma)\mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+\backslash I(\mathbb{R}))^{-1}$$

である (下の Lemma の証明を参照) 。

4.3.6 の記号を使って h_∞ を

$$h_\infty := \langle \mu_h, s\rangle(-1)^{q(G)}[h_{\varphi_H} - h_{\widetilde{\varphi}_H}] = (-1)^3[h_{\varphi_H} - h_{\widetilde{\varphi}_H}] \tag{4.15}$$

と定義する。このとき、

補題 4.9. 上のように $h_\infty \in C_c^\infty(G(\mathbb{R}))$ を取るとき

(4.16)

$$SO_{\gamma_H}(h_\infty) = \begin{cases} \langle \beta(\gamma_0), s\rangle \Delta_\infty(\gamma_H, \gamma_0)e(I)\mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+\backslash I(\mathbb{R}))^{-1} & \textit{if } \gamma_0 \in \mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H)) \textit{ is elliptic} \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

証明の前に $\beta(\gamma_0) := \alpha_\infty(\gamma_0;\gamma,\delta) \in X^*(Z(\widehat{I}_0)^{\Gamma_\infty})$ である (後者の定義は γ_0 と μ_h だけによっていた) 。

証明まず Weyl の積分公式を使って、勝手な既約表現 π とその指標 Θ_π に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\pi(f) &= \int_{Z_G(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R})} f(g)\Theta_\pi(g)\,dg \\ &= \sum_{T_G} \frac{1}{|\Omega(G(\mathbb{R}), T_G(\mathbb{R}))|} \int_{T_G(\mathbb{R})} \Delta_G^2(t) O_t(f)\Theta_\pi(t)\,dt \end{aligned} \tag{4.17}$$

が成り立つ。これと pseudo-coefficient の定義の 2 つめの条件から h_∞ の軌道積分は non-elliptic な元の上で消えていなくてはならない。

次に γ_0 が elliptic であるとする。Coherent continuation の議論から γ_H が regular な時に証明すれば十分 (これから $I_0 := G_{\gamma_0}$ は elliptic Cartan 部分群) 。そこで $T_H := H_{\gamma_H}$ (elliptic Cartan 部分群になる) の admissible embedding $\eta_{T_H}: T_H \hookrightarrow G$ を 1 つ固定し、その像を T、それによる γ_H の像を γ と書く。$h_\gamma : \mathbb{S} \to G \in X_\infty$ を T を経由するように取り、それから 4.2.1 の時と同じように $\mu_\gamma \in X^*(\widehat{T})$ を作る。同様に γ_0 に対して作ったものが $\mu_{\gamma_0} = \mu_h \in X^*(\widehat{I}_0)$ であった。再び 4.17 を使って、

$$\begin{aligned} SO_{\gamma_H}(h_\infty) &= \langle \mu_h, s\rangle \mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+\backslash I(\mathbb{R}))^{-1}(-1)^3[SO_{\gamma_H}(h_{\varphi_H}) - SO_{\gamma_H}(h_{\widetilde{\varphi}_H})] \\ &= \langle \mu_h, s\rangle \mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+\backslash I(\mathbb{R}))^{-1}(-1)^3[O_{\gamma_H}(h_{\varphi_H}) - O_{\gamma_H}(h_{\widetilde{\varphi}_H})] \\ &= \langle \mu_h, s\rangle \mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+\backslash I(\mathbb{R}))^{-1}(-1)^3[S\Theta_{\varphi_H}(\gamma_H^{-1}) - S\Theta_{\widetilde{\varphi}_H}(\gamma_H^{-1})] \end{aligned}$$

であり、また discrete series の指標公式 ([Kn]) から、$\gamma_H^{-1} = (re^{\sqrt{-1}\theta_1}, re^{\sqrt{-1}\theta_2})$ として

$$\begin{aligned} S\Theta_{\varphi_H}(\gamma_H^{-1}) =& \frac{e^{3\sqrt{-1}\theta_1} - e^{3\sqrt{-1}\theta_1}}{e^{\sqrt{-1}\theta_1} - e^{\sqrt{-1}\theta_1}} \\ =& \frac{e^{2\sqrt{-1}\theta_1}}{(1-e^{-2\sqrt{-1}\theta_1})(1-e^{-2\sqrt{-1}\theta_2})} + \frac{e^{-2\sqrt{-1}\theta_1}}{(1-e^{2\sqrt{-1}\theta_1})(1-e^{-2\sqrt{-1}\theta_2})} \\ &+ \frac{e^{2\sqrt{-1}\theta_1}}{(1-e^{-2\sqrt{-1}\theta_1})(1-e^{2\sqrt{-1}\theta_2})} + \frac{e^{-2\sqrt{-1}\theta_1}}{(1-e^{2\sqrt{-1}\theta_1})(1-e^{2\sqrt{-1}\theta_2})} \\ =& \sum_{w\in\Omega(H(\mathbb{R}), T_H(\mathbb{R}))} \chi(w(\varphi_H|^L T_H))(\gamma_H^{-1}) / \prod_{\beta>0}(1-\beta(\gamma_H^{-1})^{-1}) \end{aligned}$$

である。ここで $\chi(w(\varphi_H|^LT_H))$ は φ_H を T_H の Langlands parameter と思ってそれに w を共役で作用させたものに、torus の Langlands 対応で対応する $T_H(\mathbb{R})$ の指標である。$S\Theta_{\widetilde{\varphi}_H}(\gamma_H^{-1})$ の式は θ_1 と θ_2 を入れ替えたものになる。ところが我々の transfer factor は

$$\Delta_\infty(\gamma_H,\gamma_0)=(-1)^{q(G)+q(H)}\,\mathrm{inv}(\gamma_0,\gamma)\frac{\chi(\varphi|^LT)(\gamma)}{\chi(\varphi_H|^LT_H)(\gamma_H)}\frac{\prod_{\alpha>0}(1-\alpha(\gamma^{-1})^{-1})}{\prod_{\beta>0}(1-\beta(\gamma_H^{-1})^{-1})}$$

であったから、

$$S\Theta_{\varphi_H}(\gamma_H^{-1})=(-1)^3\mathrm{inv}(\gamma_0,\gamma)\Delta_\infty(\gamma_H,\gamma_0)\sum_{w\in\Omega(H(\mathbb{R}),T_H(\mathbb{R}))}\chi(w(\varphi|^LT))(\gamma)\Big/\prod_{\alpha>0}(1-\alpha(\gamma^{-1})^{-1})$$

となり、従って

$$\begin{aligned}
&SO_{\gamma_H}(h_\infty)\\
&=\mathrm{inv}(\gamma_0,\gamma)\Delta_\infty(\gamma_H,\gamma_0)\langle\mu_h,s\rangle\mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+\backslash I(\mathbb{R}))^{-1}(-1)^3\Big/\prod_{\alpha>0}(1-\alpha(\gamma^{-1})^{-1})\\
&\quad\Big[\sum_{w\in\Omega(H(\mathbb{R}),T_H(\mathbb{R}))}\chi(w(\varphi|^LT))(\gamma)+\sum_{w\in\Omega(H(\mathbb{R}),T_H(\mathbb{R}))}\chi(w_1w(\varphi|^LT))(\gamma)\Big]\\
&=\langle\mu_h,s\rangle\,\mathrm{inv}(\gamma_0,\gamma)\Delta_\infty(\gamma_H,\gamma_0)\mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+\backslash I(\mathbb{R}))^{-1}(-1)^3\frac{\sum_{w\in\Omega(G(\mathbb{R}),T(\mathbb{R}))}\chi(w(\varphi|^LT))(\gamma)}{\prod_{\alpha>0}(1-\alpha(\gamma^{-1})^{-1})}\\
&=\langle\beta(\gamma_0),s\rangle\Delta_\infty(\gamma_H,\gamma_0)e(I)\mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+\backslash I(\mathbb{R}))^{-1}(-1)^3S\Theta_\varphi(\gamma^{-1}).
\end{aligned}$$

最後に再び discrete series の指標公式から $(-1)^3S\Theta_\varphi(\gamma^{-1})=1$ に注意して証明が完結する。
□

4.5. **The stabilization 2.** 4.3.2 で見たように G の elliptic endoscopic data の同値類は $(G,1,\mathrm{id})$ と (H,s,ξ) の 2 つだけである。$G(\mathbb{A})$ 上 ($H(\mathbb{A})$ resp.) の test 関数 f (h resp.) を $f(g):=f^p(g^p)f_p(g_p)f_\infty(g_\infty)$ ($h(g):=h^p(g^p)h_p(g_p)h_\infty(g_\infty)$ resp.) と取る。ただし h^p、h_p、h_∞ 及び f_∞ は 4.4 の通りであり、$f_p:=\widetilde{id}_j\phi_j$ (4.3.5 の記号で) と定義する。これらに対して stable な Arthur-Selberg 跡公式の elliptic な term は

$$ST_e^*(f):=\sum_{\mathcal{O}_{st}(\gamma)\subset G(\mathbb{Q})}\tau(G)SO_\gamma(f),$$

$$ST_e^*(h):=\sum_{\mathcal{O}_{st}(\gamma_H)\subset H(\mathbb{Q})}\frac{\tau(H)}{|(Z_H(\gamma_H)/H_{\gamma_H})(\mathbb{Q})|}SO_{\gamma_H}(h)$$

で与えられる。最後に正の有理数 $\iota(G,H)$ を

$$\iota(G,H):=\frac{\tau(G)}{\tau(H)}|\mathrm{Aut}(H,s,\xi)/H_{ad}(\mathbb{Q})|^{-1}$$

と定義する。

定理 4.10.

$$N(j,f^p)=ST_e^*(f)+\iota(G,H)ST_e^*(h)\tag{4.18}$$

証明 4.5 の右辺が 4.18 に等しいことを示す。Theorem4.1 の条件を満たす γ_0 を 1 つ取る。4.5 の γ_0 に属する term は

$$\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})}\sum_{\gamma,\delta}\frac{\langle\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta),\kappa\rangle}{\mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+\backslash I(\mathbb{R}))}e(\gamma,\delta)O_\gamma(f^p)TO_\delta(\phi_j).$$

各 $\kappa \in \mathfrak{K}(I_0/\mathbb{Q})$ に対してその $Z(\widehat{I_0})$ での半単純な代表元 s_κ を 1 つ取る。必要なら $\mathrm{Int}\widehat{G}$ で動かして $s_\kappa \in \mathcal{T}$ としてよい。但し Γ の $\widehat{G}$ への作用もその内部自己同型でひねられる。$\widehat{H}_\kappa := \widehat{G}_{s_\kappa}$ とし、その splitting $(\widehat{B}_\kappa, \widehat{T}_\kappa, \{\mathcal{X}_\alpha\}_\alpha)$ を、

$$\widehat{B}_\kappa := \mathcal{B} \cap \widehat{H}_\kappa, \quad \widehat{T}_\kappa := \mathcal{T},$$
$$\{\mathcal{X}_\alpha\}_\alpha := \{\mathcal{X}_\alpha \,|\, \mathcal{X}_\alpha \in \mathrm{Lie}\widehat{H}_\kappa\}$$

と固定する。上述の内部自己同型でひねられた Γ の作用は、$sZ(\widehat{G}) \in (Z(\widehat{I_0})/Z(\widehat{G}))^\Gamma$ から、$\widehat{H}_\kappa$ を保つ。この作用を適当に $\mathrm{Int}\widehat{H}_\kappa$ でひねって上の splitting を保つようにしたものを使って、半直積 ${}^LH_\kappa := \widehat{H}_\kappa \rtimes \Gamma$ を構成する。これを L-群に持つ quasi-split な $\mathbb{Q}$ 上の簡約群を H_κ とすれば、G の endoscopic datum $(H_\kappa, s_\kappa, \xi_\kappa)$ ができる。(Endoscopic datum の定義の条件 4.7 は s_κ が $\bigcap_v Z(\widehat{I_0})^{\Gamma_v}$ 内に取れることから従う。)

次にこの endoscopic datum は elliptic である。実際 γ_0 は $G(\mathbb{R})$ で elliptic としたので $\widehat{I_0}$ の中に $\mathbb{R}$ 上 elliptic な Cartan 部分群 T_G が取れる。したがって $[Z(\widehat{H}_\kappa)^\Gamma]^0 \subset (\widehat{T}_G^\Gamma)^0 = Z(\widehat{G})$ だが、これはすなわち上の endoscopic datum が elliptic ということである。そこで以下では $(H_\kappa, s_\kappa, \xi_\kappa) = (H, s, \xi)$ の時を考える。勿論 $(G, 1, \mathrm{id})$ の時も同様にできる。

Theorem4.1 の条件を満たす $(\gamma_0, \gamma, \delta)$ に対して、

(1) $e(\gamma, \delta) = e^p(\gamma)e(G_{\delta,\sigma})e(I_\infty), \quad \langle \alpha_v(\gamma_0; \gamma, \delta), \kappa\rangle = \langle \alpha_v(\gamma_0; \gamma, \delta), s\rangle.$
(2) $\alpha(\gamma_0, \delta)$、$\beta(\gamma_0)$ の定義は $\alpha_p(\gamma_0; \gamma, \delta)$、$\alpha_\infty(\gamma_0; \gamma, \delta)$ のそれと同じである。
(3) (Global hypothesis)

$$\Delta^p(\gamma_H, \gamma)\Delta_p(\gamma_H, \gamma_0)\Delta_\infty(\gamma_H, \gamma_0) = \Delta^p(\gamma_H, \gamma_0)\Delta_p(\gamma_H, \gamma_0)\Delta_\infty(\gamma_H, \gamma_0) \prod_{v \neq p,\infty} \mathrm{inv}(\gamma_0, \gamma_v)$$
$$= \prod_{v \neq p,\infty} \mathrm{inv}(\gamma_0, \gamma_v)$$

(4) $\alpha_v(\gamma_0; \gamma_v, \delta) = \mathrm{inv}(\gamma_0, \gamma_v)$.

から $\gamma_0 \in \mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))$ として

$$SO_{\gamma_H}(h) = \sum_{\gamma,\delta} \frac{\langle \alpha(\gamma_0; \gamma, \delta), \kappa\rangle}{\mathrm{vol}(Z_G(\mathbb{R})_+ \backslash I(\mathbb{R}))} e(\gamma, \delta) O_\gamma(f^p) TO_\delta(\phi_j). \tag{4.19}$$

あとは $\gamma_0 \in \mathcal{A}_{H/G}(\mathcal{O}_{st}(\gamma_H))$ となる (G, H)-regular な γ_H が存在することを示せばよいが、これは H の Cartan 部分群 T_H とその admissible embedding $\eta_{T_H} : T_H \hookrightarrow G$ で $\eta_{T_H}(T_H(\mathbb{Q})) \ni \gamma_0$ となるものを取り、それによる γ_0 の逆像を γ_H とするのである。 □

5. Arthur-Selberg side 2.—Arthur-Selberg 跡公式

5.1. Arthur の non-invariant 跡公式の復習. まずは Arthur の跡公式の極めて簡潔な復習から始める。とはいえ Arthur-Selberg の跡公式は $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ に現れる全ての保型表現の trace を記述するもので大変に複雑な形をしており、その中に現れる全ての term の定義を復習するだけで数十ページにはなるだろう。しかし一方で Arthur 自身も指摘するように、数論的な応用に対しては跡公式の全体を見る必要は必ずしもなく、むしろいかに簡略化して応用するかがポイントになる。従って以下では必要な記号を準備する程度の復習にとどめるし、またそれで十分であろう。以下では $G = GSp(2)$ について解説するが、$H = GL(2) \times GL(2)/\mathbb{G}_m$ についても同様である。

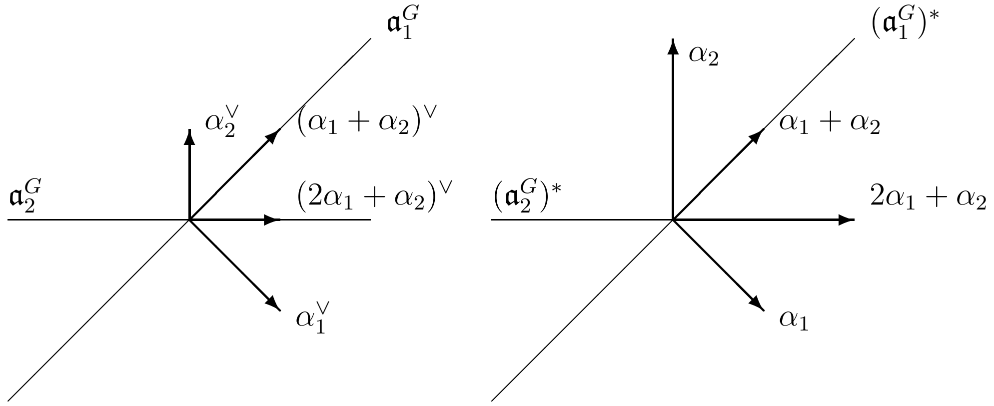

Figure 1. $\mathfrak{a}_i^G$ と $(\mathfrak{a}_i^G)^*$

5.1.1. *Notations and conventions.* まず $G(\mathbb{A})^1 := \bigcap_{\chi\in X^*(G)_\mathbb{Q}} \mathrm{Ker}\chi$ と定義すれば $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})_1 \times Z_G(\mathbb{R})_+$ であることに注意する。但し $X^*(G)_\mathbb{Q}$ は G の $\mathbb{Q}$-rational な指標の群である。以下では $L^2(G(\mathbb{Q})Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A}))$ の跡公式を考えるので、しばしば $G(\mathbb{A})$ の代わりに $G(\mathbb{A})^1$ を考える。また $|\ |_\mathbb{A}$ で $\mathbb{A}$ の idele norm を表す。

G の minimal parabolic subgroup とその Levi factor を $\mathbf{B}$ と $\mathbf{T}$ と固定し、$\mathbf{B}$ を含む G の $\mathbb{Q}$ 上の放物型部分群を *standard parabolic subgroup* と呼ぶ。Standard parabolic subgroup P に対して、$\mathbf{T}$ を含む Levi factor を M_P と書きその uipotent radical を N_P と書く。我々の場合、$P = M_P N_P$ は G 自身か $P_i = M_i N_i$（$i = 0, 1, 2$）のどれかである。但し、

$$M_0 := \mathbf{T}, \quad N_0 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & * \\ \text{\huge 0} & & & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}$$

$$M_1 := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0}_2 \\ \hline \mathbf{0}_2 & \lambda A^* \end{array} \right) \middle| \ A \in GL(2),\ \lambda \in \mathbb{G}_m \right\}, \quad N_1 := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_2 & B \\ \hline \mathbf{0}_2 & \mathbf{1}_2 \end{array} \right) \middle| \ B \in \mathbb{M}_n,\ {}^tB = B \right\}$$

$$M_2 := \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} \mu & 0 & 0 \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{\det A}{\mu} \end{array} \right) \middle| \ \mu \in \mathbb{G}_m,\ A \in GL(2) \right\}, \quad N_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & * \\ \text{\huge 0} & & & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}$$

である。各 M_i（$i = 0, 1, 2$）に対して互いに dual な $\mathbb{R}$-ベクトル空間を $\mathfrak{a}_{M_i} = \mathfrak{a}_i := \mathrm{Hom}(X^*(M_i)_\mathbb{Q}, \mathbb{R})$、$\mathfrak{a}_{M_i}^* = \mathfrak{a}_i^* := X^*(M_P)_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ と定義する。また G に対して $\mathfrak{a}_G$、$\mathfrak{a}_G^*$ を同様に定義する。M_i の中心内の極大 $\mathbb{Q}$-split torus を A_{M_i} と書けば $\mathfrak{a}_i$ は A_{M_i} の $\mathbb{R}$-Lie 環である。$\mathfrak{a}_i$ と $\mathfrak{a}_i^*$ の間の自然な内積を $\langle , \rangle$ と書く。

$X^*(G)_\mathbb{Q} \ni \chi \hookrightarrow \chi|_{M_i} \in X^*(M_i)_\mathbb{Q}$ から $\mathfrak{a}_G^*$ は自然に $\mathfrak{a}_i^*$ の部分空間と思える。これの $\mathfrak{a}_i$ での直交補空間を $\mathfrak{a}_i^G$ と書く。一方 $\mathfrak{a}_i^*$ の部分空間 $(\mathfrak{a}_i^G)^*$ を $\{\chi \in X^*(M_i)_\mathbb{Q}\,;\, \chi|_{Z_G} = \mathbf{1}\}$ で張られるものと定める。これの $\mathfrak{a}_i$ での直交補空間は $\mathfrak{a}_G$ と同一視される。つまり

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i^G \oplus \mathfrak{a}_G, \quad \mathfrak{a}_i^* = (\mathfrak{a}_i^G)^* \oplus \mathfrak{a}_G^*.$$

$\mathfrak{a}_i^G$、$(\mathfrak{a}_i^G)^*$ は上の Figure. 1 のように $\mathfrak{a}_0^G$ の部分空間と同一視される。

我々の場合 $\mathfrak{a}_0^G$（$(\mathfrak{a}_0^G)^*$ resp.）の Ω-不変な内積は $\{e_1, e_2\}$（$\{e_1^\vee, e_2^\vee\}$ resp.）の $\mathfrak{a}_0^G$-成分（$(\mathfrak{a}_0^G)^*$-成分 resp.）が正規直交基底になるものである。

Simple な coroots の集合 $\Delta^\vee = \{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee\}$ は $\mathfrak{a}_0^G$ の基底をなすが、$(\mathfrak{a}_0^G)^*$ のそれに対する双対基底を $\widehat{\Delta} := \{\varpi_{\alpha_1}, \varpi_{\alpha_2}\}$ と書く。

各有限素点 v に対して $K_v := G(\mathbb{Z}_v)$ とし、$G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群 K を $K := K_\infty^{der} \prod_{v\neq\infty} K_v$ と取る。但し K_∞^{der} は K_∞ の導来群である。このとき岩澤分解 $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})K$ が standard 放物型部分群 P に対し成り立つ。Map $H_M : M(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_M$ を、任意の $\chi \in X^*(M)_\mathbb{Q}$ に対して

$$\exp(\langle \chi, H_M(m)\rangle) = |\chi(m)|_\mathbb{A}, \quad (m \in M(\mathbb{A}))$$

となるものと定める。これの核を $M(\mathbb{A})^1$ と書けば、$M(\mathbb{A}) = M(\mathbb{A})^1 \times A_M(\mathbb{R})_+$（直積）となる。$H_M$ は上の岩澤分解を使って $G(\mathbb{A})$ に

$$H_P : G(\mathbb{A}) \ni g = nmk \to H_M(m) \in \mathfrak{a}_M, \quad (n \in N(\mathbb{A}), m \in M(\mathbb{A}), k \in K)$$

と延ばせる。

$G(\mathbb{A})$ 上の測度については次の通りとする。$G(\mathbb{A})$ 上には玉河測度 dg を取る。$N_i(\mathbb{A})$ 上の測度 dn 及び K 上の測度 dk をそれぞれ $N_i(\mathbb{Q})\backslash N_i(\mathbb{A})$ と K の測度が 1 になるものに取る。$\mathfrak{a}_i^G$（$(\mathfrak{a}_i^G)^*$ resp.）の測度 $d\lambda^\vee$（$d\lambda$ resp.）は上で固定した $\mathfrak{a}_0^G$（$(\mathfrak{a}_0^G)^*$ resp.）上の Ω-不変な内積（ノルム）に関する Lebesgue 測度とする。これを同型 $H_{M_i} : A_{M_i}(\mathbb{R})_+/Z_G(\mathbb{R})_+ \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_i^G$ を使って $A_{M_i}(\mathbb{R})_+/Z_G(\mathbb{R})_+$ に持って行ったものを da とする。最後に $Z_G(\mathbb{R})_+\backslash M_i(\mathbb{A})$ 及び $Z_G(\mathbb{R})_+\backslash M_i(\mathbb{A})^1$ 上の測度 dm 及び dm_1 を $f \in C_c(Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A}))$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A})} f(g)\,dg &= \int_{N_i(\mathbb{A})}\int_{Z_G(\mathbb{R})_+\backslash M_i(\mathbb{A})}\int_K f(nmk)e^{\langle -2\rho_{P_i}, H_{M_i}(m)\rangle}\,dk\,dm\,dn \\ &= \int_{N_i(\mathbb{A})}\int_{M_i(\mathbb{A})^1}\int_{Z_G(\mathbb{R})_+\backslash A_{M_i}(\mathbb{R})_+}\int_K f(nm_1ak)e^{\langle -2\rho_{P_i}, H_{M_i}(a)\rangle}\,dk\,da\,dm_1\,dn\end{aligned}$$

が成り立つものに取る。

5.1.2. *Arthur-Selberg trace formula.* $L^2(G(k)Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A}))$ 上の $G(\mathbb{A})$ の右正則表現 R;

$$R(g) : L^2(G(k)Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A})) \ni \phi(x) \to R(g)\phi(x) := \phi(xg) \in L^2(G(k)Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A}))$$

を考える。[Mü] あるいは [L4] により、$f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ に対して作用素

$$\begin{aligned}&R(f) : L^2(G(k)Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A})) \ni \phi(x) \to \\ &\qquad R(f)\phi(x) := \int_{Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A})} f(g)\phi(xg)\,dg \in L^2(G(k)Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A}))\end{aligned}$$

は trace class である。この $R(f)$ の trace を記述するのが Arthur-Selberg 跡公式である。

しかし R のスペクトル分解（既約表現への分解）には Eisenstein 級数たちも寄与するため、各 standard parabolic subgroup についても同様の考察が必要になる。すなわち、standard parabolic subgroups $P = MN$ に対して $L^2(N(\mathbb{A})M(\mathbb{Q})Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A}))$ 上の $G(\mathbb{A})$ の右正則表現を R_P と書き、作用素 $R_P(f)$ を考える。

(1) The geometric side.

$$K_P^f(x,y) := \sum_{\gamma \in M(\mathbb{Q})} \int_{N(\mathbb{A})} f(x^{-1}\gamma n y)\,dn$$

と定義すれば

$$\begin{aligned} R_P(f)\phi(x) &= \int_{Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A})} f(x^{-1}y)\phi(y)\,dg \\ &= \int_{N(\mathbb{A})M(\mathbb{Q})Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\gamma\in M(\mathbb{Q})} \int_{N(\mathbb{A})} f(x^{-1}\gamma ny)\phi(\gamma ny)\,dn\,dy \\ &= \int_{N(\mathbb{A})M(\mathbb{Q})Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A})} K_P^f(x,y)\phi(y)\,dy \end{aligned}$$

である。つまり $K_P^f(x,y)$ は作用素 $R_P(f)$ の核関数である。特に $K_G^f(x,y) := \sum_{\gamma\in G(\mathbb{Q})} f(x^{-1}\gamma y)$ となることに注意せよ。

$\gamma_i \in G(\mathbb{Q})$（$i=1,2$）を $\gamma_i = \gamma_{i,s}\gamma_{i,u}$ と Jordan 分解する（$\gamma_{i,s}$ が半単純成分、$\gamma_{i,u}$ が unipotent 成分である）。γ_1 と γ_2 が半単純的共役とは $\gamma_{1,s}$ と $\gamma_{2,s}$ が $G(\mathbb{Q})$-共役であることをいう。$G(\mathbb{Q})$ 内の半単純的共役類の集合を $\mathfrak{O}$ と書く。$\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}$ に対して

$$K_{P,\mathfrak{o}}(x,y) = \sum_{\gamma\in M(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}} \int_{N(\mathbb{A})} f(x^{-1}\gamma ny)\,dn$$

と定義すれば、

$$K_P(x,y) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}} K_{P,\mathfrak{o}}(x,y)$$

である。これの対角部分集合 $\{(x,x)\,|\,x\in N(\mathbb{A})M(\mathbb{Q})Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A})\}$ 上での積分が収束すれば、それは $\mathrm{tr}R_P(f)$ にひとしいはずである。しかし実際にはこの積分は収束せず、もう少し慎重な議論が必要になる。

$\mathfrak{a}_0^G$ の開部分集合

$$\mathfrak{a}_0^{G+}(P,\widehat{\Delta}) := \{\lambda^\vee\in\mathfrak{a}_0^G \,|\, \langle\lambda^\vee,\varpi_\alpha\rangle > 0,\ \alpha\in\Delta-\Delta^M\}$$

の特性関数を $\widehat{\tau}_P$ と書く。ここで Δ^M は Δ の元で M の root になっているものの集合である。これを使って $T\in\mathfrak{a}_0$ として上の核関数を

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}} K_{P,\mathfrak{o}}(x,x)\widehat{\tau}_P(H_M(x)-T)$$

と truncate し、

$$k_{\mathfrak{o}}^T(x,f) = \sum_{\mathbf{B}\subset P\subset G} (-1)^{\dim(A_M/Z_G)} \sum_{\delta\in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} K_{P,\mathfrak{o}}(\delta x,\delta x)\widehat{\tau}_P(H_M(\delta x)-T)$$

と定義する。これの積分

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f) := \int_{G(\mathbb{Q})Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A})} k_{\mathfrak{o}}^T(x,f)\,dx$$

は T が十分 regular なら収束する。最後に

$$J_{geom}(f) := \sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{O}} J_{\mathfrak{o}}^T(f)$$

と定義する。

(2) The spectral side. Standard parabolic subgroup の Levi factor M とその cuspidal な既約保型表現 ρ で $A_M(\mathbb{R})_+$ 上自明なものの組 (M,ρ) の $G(\mathbb{Q})$-共役類を cuspidal datum という。G の cuspidal data の集合を $\mathfrak{X}$ と書く。$\chi\in\mathfrak{X}$ の代表元 (M,ρ) を 1 つ取り、$\psi: N(\mathbb{A})M(\mathbb{Q})Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ であって

(1) 任意の $g \in G(\mathbb{A})$ に対し $M(\mathbb{A})^1 \ni m \to \psi(mg) \in \mathbb{C}$ は $L^2_0(M(k)\backslash M(\mathbb{A})^1)$ の ρ-isotypic subspace に入る。
(2) 任意の $g \in G(\mathbb{A})$ に対して $Z_G(\mathbb{R})_+\backslash A_M(\mathbb{R})_+ \ni a \to \psi(ag) \in \mathbb{C}$ はコンパクト台を持つ。

なるものたちのなす空間を $\mathcal{F}(PW_{(M,\rho)})$ と書く。$\psi \in \mathcal{F}(PW_{(M,\rho)})$ に対して pseudo-Eisenstein series（あるいは Poincaré series とも）$\theta_\psi \in L^2(G(\mathbb{Q})Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A}))$ を

$$\theta_\psi(g) := \sum_{\gamma \in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} \psi(\gamma g)$$

と定義し、

$$L^2(G)_\chi := \mathrm{Span}\{\theta_\psi \,|\, \psi \in \mathcal{F}(PW_{(M,\rho)}),\ (M,\rho) \in \chi\}$$

とおく。このとき Langlands の spectral theory of Eisenstein series により

$$L^2(G(\mathbb{Q})Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A})) = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}} L^2(G)_\chi \tag{5.1}$$

である。

さて $P = MN$ に対しても同様に $L^2(M)_\chi$（$\chi \in \mathfrak{X}_M$）を考える。$L^2(M)_\chi$ に離散的に現れる既約表現 σ の $L^2(M)_\chi$ での isotypic subspace を $L^2(M)_{\chi,\sigma}$ と書こう。$L^2(M)_{\chi,\sigma}$ 上の $M(\mathbb{A})$ の右正則表現からの「誘導表現」の空間 I^P_σ を

$$I^P_\sigma := \left\{ \phi : N(\mathbb{A})M(\mathbb{Q})Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(i) 任意の } g \in G(\mathbb{A}) \text{ に対して関数} \\ \qquad M(\mathbb{A}) \ni m \to \phi(mg) \in \mathbb{C} \\ \quad \text{は } L^2(M)_{\chi,\sigma} \text{ に属する。} \\ \text{(ii) } \int_{M(\mathbb{Q})A_M(\mathbb{R})_+\backslash M(\mathbb{A})} \int_K |\phi(mk)|^2 \, dk \, dm < \infty \end{array} \right\}$$

と定義する。$\lambda \in (\mathfrak{a}^G_M)^*_\mathbb{C} = (\mathfrak{a}^G_M)^* \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ を取り、I^P_σ を λ に対応する principal quasi-character でひねった表現を

$$[I^P_{\sigma,\lambda}(g)\phi](x) := \exp(\langle \lambda, H_P(xg)\rangle - \langle \lambda, H_P(x)\rangle)\phi(xg)$$

と書く。

次は intertwining operator である。$P = MN,\ P' = M'N'$ を 2 つの異なる standard parabolic 部分群とするとき、$\Omega(M,M')$ で Ω の元を制限して得られる同型 $\mathfrak{a}_M \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{M'}$ の集合を表す。$s \in \Omega(M,M')$ に対して intertwining operator $M_{P'|P}(s,\lambda) : I^P_{\sigma,\lambda} \longrightarrow I^{P'}_{s(\sigma),s(\lambda)}$;

$$\begin{aligned} &M_{P'|P}(s,\lambda)\phi(g) \\ &:= \int_{(N'(\mathbb{A})\cap wN(\mathbb{A})w^{-1})\backslash N'(\mathbb{A})} \phi(w^{-1}ng)\exp(\langle \lambda + \rho_P, H_P(w^{-1}ng)\rangle - \langle s(\lambda) + \rho_{P'}, H_{P'}(g)\rangle)\, dn \end{aligned}$$

は s の Ω での代表元 w 及びそれの $Norm_{G(\mathbb{Q})}(\mathbf{T}(\mathbb{Q}))$ での代表元の取り方によらず決まる。これは $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle >> 0$（$\forall \alpha \in \Delta - \Delta^M$）で絶対収束し、全 $(\mathfrak{a}^G_M)^*_\mathbb{C}$ 上に有理型に延びる。また $\mathrm{Re}\lambda = 0$ の上では unitary になっている。

さて spectral side を記述しよう。5.1 から想像できると思うが、spectral side への各 parabolic 部分群 P からの寄与は、P の parabolic 部分群上の cusp form の空間の trace たちの寄与として書かれる。それはなかなか複雑なもので、例えば $P = MN$ からの寄与は

$$J^T_{P,\chi}(f) = \sum_{L<M} \sum_{s \in \Omega^M(L,L)_{reg}} \frac{|\Omega^M|}{|\Omega|} \frac{1}{|\det(s-1)|_{\mathfrak{a}^G_M}|} \sum_{\sigma \subset L^2(L)_\chi} \int_{\sqrt{-1}(\mathfrak{a}^M_L)^*} \mathrm{tr}[\mathcal{M}_M(P,\lambda) M_{P|P}(s,\lambda) I^P_{\sigma,\lambda}(f)]\, d\lambda$$

となる（cf. [Ar3] Theorem 8.2)。但し $Q = LU$ とした。これから

(5.2)

$$J_{spec}(f) = \sum_{M>L>\mathbf{T}} \sum_{s\in\Omega^M(L,L)_{reg}} \frac{|\Omega^L|}{|\Omega|} \frac{1}{|\det(s-1)|_{\mathfrak{a}_L^M}|} \int_{\sqrt{-1}(\mathfrak{a}_M^G)^*} \mathrm{tr}\mathcal{M}_M(Q,\lambda) M_{Q|Q}(s,\lambda) I^Q_{\sigma,\lambda}(f)\, d\lambda$$

である。

5.2. **Simplification of the trace formula.** 5.1 で予告したとおり、特殊な test 関数を取ることにより跡公式を単純化する。まずは geometric side から。

5.2.1. *Geometric side* について．ここでは２つポイントがある。１つ目は

補題 5.1. *4.4* で取った f_∞ は *stable* であり、H の κ*-group* は *trivial* である。従って特に $G(\mathbb{Q})$（$H(\mathbb{Q})$ *resp.*）内の *elliptic* 共役類の集合を $\mathfrak{E}$（$\mathfrak{E}_H$ *resp.*）と書き、

(5.3)
$$\begin{aligned} T_e(f) &:= \sum_{\gamma\in\mathfrak{E}} \frac{1}{|G_\gamma(\mathbb{Q})\backslash Z_{G(\mathbb{Q})}(\gamma)|} \tau(G_\gamma) O_\gamma(f) \\ T_e^H(h) &:= \sum_{\gamma_H\in\mathfrak{E}_H} \frac{1}{|H_{\gamma_H}(\mathbb{Q})\backslash Z_{H(\mathbb{Q})}(\gamma_H)|} \tau(H_{\gamma_H}) O_{\gamma_H}(h) \end{aligned}$$

とおけば、$ST_e^*(f) = T_e(f)$（$ST_e^*(h) = T_e^H(h)$ *resp.*）である。

証明 f_∞ が stable とは、任意の regular semisimple な $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ に対して $O_{\gamma'}(f_\infty)$ が $\gamma' \in \mathcal{O}_{st}(\gamma)$ の取り方によらず一定であることをいう。我々の f_∞ の取り方から stable であることは明らかである。

次に regular semisimple な $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ を１つ取り、その連結中心化群（Cartan 部分群になる）を T と書く。すぐわかるように写像

$$\{\mathcal{O}_{st}(\gamma) \text{ 内の } G(\mathbb{Q})\text{-共役類}\} \ni \mathcal{O}(g\gamma g^{-1}) \longrightarrow \{g^{-1}\sigma(g)\}_\sigma \in \mathrm{Ker}[H^1(\mathbb{R},T) \mapsto H^1(\mathbb{R},G)]$$

は全単射。一方 Kottwitz による Tate-中山双対性（cf. [Ko3] §3）から $\mathrm{Ker}[H^1(\mathbb{R},T) \mapsto H^1(\mathbb{R},G)] = \mathfrak{K}(T/\mathbb{R})^D$ である。$\mathcal{O}(g\gamma g^{-1})$ を 1-コサイクル $\{g^{-1}\sigma(g)\}_\sigma$ の $H^1(\mathbb{R},T)$ での class δ を使って $\mathcal{O}(\gamma^\delta)$ と書くことにする。$\kappa \in \mathfrak{K}(T/\mathbb{R})$ に対して

$$O_\gamma^{(T,\kappa)}(f) := \sum_{\delta\in\mathfrak{K}(T/\mathbb{R})^D} \langle\kappa,\delta\rangle O_{\gamma^\delta}(f)$$

と定義する。$\kappa = \mathbf{1}$ の時 $O^{(T,\mathbf{1})} = SO_\gamma$ であることに注意する。

さて 4.2.4 と同様に有限群の duality から

$$O_{\gamma^\delta}(f_\infty) = \frac{1}{|\mathfrak{K}(T/\mathbb{R})|} \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}(T/\mathbb{R})} \langle\kappa,\delta\rangle O_\gamma^{(T,\kappa)}(f_\infty).$$

ところが f_∞ は stable だったから

$$O_\gamma^{(T,\kappa)}(f_\infty) = O_{\gamma^\delta}(f_\infty) \sum_{\delta\in\mathfrak{K}(T/\mathbb{R})^D} \langle\kappa,\delta\rangle = 0.$$

G についての結論はこれから従う。H については省略する。 □

２つ目のポイントは少々技術的である。まず $f_\mathbb{R} \in C_c^\infty(Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{R}))$ が *very cuspidal* とは、

(1) $f_\mathbb{R}$ は K_∞-共役で不変。
(2) 任意の放物型真部分群 $P = MN$ に対して $f_\mathbb{R}^{(P)}(m) := \int_{N(\mathbb{R})} f_\mathbb{R}(nm)\, dn = 0$ が成り立つ。

なることとする。我々の f_∞ 及び h_∞ は very cuspidal である。

補題 5.2. p と異なる素数 q を1つ固定する。$f^p = f^{p,q} \otimes f_q$ をそれの佐武同型による像 $f_q^\vee$ が、ある正実数 D に対して

$$j \log p > D + |\alpha(\mu)| \log q, \quad \forall \alpha \in R^+ \coprod -R^+, \ \forall \mu \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee) \tag{5.4}$$

$$|\beta(\mu)| \log q > D, \quad \forall \beta \in R^{H,+} \coprod -R^{H,+}, \ \forall \mu \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee) \tag{5.5}$$

を満たすようなものに取る。このとき

$$J_{geom}(f) = T_e(f), \qquad J_{geom}(h) = T_e^H(h)$$

が成り立つ。

これの証明はやらないが意味を説明する。まず条件はいずれも $f_q^\vee$ が μ が十分 regular（wall から遠い）ところ以外で0になることを言っている。従ってそれを local な成分に持つ f の weighted 軌道積分の項（昔の言葉で言えば hyperbolic terms のようなもの）は全て消え、elliptic な項 $T_e(f)$ だけが残るわけである。

5.2.2. *Spectral side.* Spectral side 5.2 は G 自身を含む全ての Levi 部分群 M の保型表現の trace の寄与からなっていたが、そのうち *discrete part* と呼ばれる G 自身の寄与は

$$J_{disc}(f) = \sum_{G > L > \mathbf{T}} \frac{|\Omega^L|}{|\Omega|} \sum_{s \in \Omega(L,L)_{reg}} \frac{1}{|\det(s-1)|_{\mathfrak{a}_L^G}|} \mathrm{tr} M_{Q|Q}(s,0) I_\sigma^Q(f)$$

である。$\Pi_{unit}(G)$ で $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現でその中心指標の $Z_G(\mathbb{R})_+$ への制限が自明なものの同値類の集合を表す。$C_c^\infty(Z_G(\mathbb{R})_+ \backslash G(\mathbb{A})) \ni f \mapsto \mathrm{tr} M_{Q|Q}(s,0) I_\sigma^Q(f)$ は invariant distribution であるので $\mathrm{tr}\pi(f)$ たちの線形結合で書ける。すなわち関数 $a_{disc}^G : \Pi_{unit}(G(\mathbb{A})) \to \mathbb{C}$ があって $J_{G,\pi}^G(f) := \mathrm{tr}\pi(f)$ と書くとき

$$J_{disc}(f) = \sum_{\pi \in \Pi_{unit}(G(\mathbb{A}))} a_{disc}^G(\pi) J_{G,\pi}^G(f). \tag{5.6}$$

さらに $\Pi_{disc}(G)$ で $L^2(G(k)Z_G(\mathbb{R})_+ \backslash G(\mathbb{A}))$ に（離散的に）直和因子として現れる $G(\mathbb{A})$ の既約保型表現の同値類の集合を表す。f_∞ が very cuspidal なら 5.6 で $\pi \in \Pi_{unit}(G(\mathbb{A}))$ についての和は $\pi \in \Pi_{disc}(G)$ についての和としてよい。

Discrete でない項についても f が very cuspidal という仮定の下で

$$J_M(f) = \frac{|\Omega^M|}{|\Omega|} \sum_{\pi \in \Pi_{disc}(M)} a_{disc}^M(\pi) J_{M,\pi}^G(f)$$

が成り立つ。ここで $f = f_\infty \otimes f_f$ として

$$J_{M,\pi}^G(f) = \sum_{X \in \mathfrak{a}_{M,f}^G} J_M^G(\pi_\infty, f_\infty, s(X)) f_{M,f}(\pi_f, X)$$

$$\mathfrak{a}_{M,f}^G := \bigoplus_{v \neq \infty} \mathfrak{a}_{M,v}^G, \quad \mathfrak{a}_{M,v}^G = H_M(M(\mathbb{Q}_v)) \subset \mathfrak{a}_M^G$$

$$J_M^G(\pi_\infty, f_\infty, X) := \int_{\sqrt{-1}(\mathfrak{a}_M^G)^*} J_M^G(e^\lambda \otimes \pi_\infty, f_\infty) e^{-\langle \lambda, X \rangle} \, d\lambda, \quad s(X) := \sum_{v \neq \infty} X_v \in \mathfrak{a}_M^G$$

$$f_{M,f}(\pi_f, X) := \int_{\sqrt{-1}(a_{M,f}^G)^*} \mathrm{tr} I_{\pi,\lambda}^P(f_f) e^{\langle \lambda, X \rangle} \, d\lambda$$

であり、$J_M^G(\pi_\infty, f_\infty)$ は weighted character と呼ばれる distribution である。さて spectral side でのポイントは次である。

定理 5.3. p と異なる素数 q を１つ固定する。$f^p = f^{p,q} \otimes f_q$ をそれの佐武同型による像 $f_q^\vee$ が、ある正実数 D に対して

5.4 $$j \log p > D + |\alpha(\mu)| \log q, \quad \forall \alpha \in R^+ \coprod -R^+, \ \forall \mu \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee)$$

5.5 $$|\beta(\mu)| \log q > D, \quad \forall \beta \in R^{H,+} \coprod -R^{H,+}, \ \forall \mu \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee)$$

を満たすようなものに取る。このとき

$$J_{spec}(f) = J_G^G(f) + \frac{1}{2} J_{M_1}^G(f) + \frac{1}{2} J_{M_2}^G(f) + \frac{1}{8} J_{\mathbf{T}}^G(f),$$
$$J_M^G(f) = \sum_{\pi \in \Pi_{disc}(M)} a_{disc}^M(\pi) J_{M,\pi}^G(f),$$
$$J_{M,\pi}^G(f) = \sum_{X \in \mathfrak{a}_{M,f}^G} {}^c D_M^G(\pi_\infty, s(X), f_\infty) f_{M,f}(\pi_f, X)$$

および

$$J_{spec}(h) = J_H^H(h) + \frac{1}{2} J_{L_1}^H(h) + \frac{1}{2} J_{L_2}^H(h) + \frac{1}{4} J_{\mathbf{T}_H}^H(h),$$
$$J_L^H(h) = \sum_{\rho \in \Pi_{disc}(L)} a_{disc}^H(\rho) J_{L,\rho}^H(h)$$
$$J_{L,\rho}^H(h) = \sum_{Y \in \mathfrak{a}_{L,f}^H} {}^c D_L^H(\rho_\infty, s(Y), h_\infty) h_{L,f}(\rho_f, Y)$$

が成り立つ。ここで ${}^c D_M^G(\pi_\infty, s(X), f_\infty)$ は

$$\int_{\sqrt{-1}(\mathfrak{a}_M^G)^*} \mathrm{tr} \mathcal{M}_M(Q, \lambda) M_{Q|Q}(s, \lambda) I_{\sigma,\lambda}^Q(f) \, d\lambda$$

の *residue* のようなものである。H に関する記号については G での対応物から推測してほしい。

5.3. **Explicit formulae.** [Lau] では Theorem 5.3 の各項を、$a_M^{disc}(\pi)$ を除いて、具体的に計算している。その内容は

(1) ${}^c D_M^G(\pi_\infty, s(X), f_\infty)$ の π_∞ は単位表現と同じ無限小指標を持つ $G(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現を走る。Langlands 分類により、π_∞ の指標 Θ_{π_∞} は単位表現と同じ無限小指標を持つ standard 表現 ρ の指標 Θ_ρ の整数係数の１次結合で書ける。

$$\Theta_{\pi_\infty} = \sum_\rho \Delta(\pi_\infty, \rho) \Theta_\rho$$

この際の係数 $\Delta(\pi_\infty, \rho)$ は Kazhdan-Lustzig algorithm を使って D. A. Vogan が計算している（[Vo]）。これを使って ${}^c D_M^G(\pi_\infty, s(X), f_\infty)$ を

$${}^c D_M^G(\pi_\infty, s(X), f_\infty) = \sum_\rho {}^c D_M^G(\rho, s(X), f_\infty)$$

により計算している。

(2) 各 Levi 部分群の保型表現については次のように書く。$M_1 \simeq GL(2) \times \mathbb{G}_m$ の cuspidal 保型表現 π は $GL(2)$ の cuspidal 保型表現 σ と $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times$ の指標 χ を使って

$$\pi = \sigma \otimes \chi : \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0}_2 \\ \hline \mathbf{0}_2 & \lambda {}^t A^{-1} \end{array}\right) \longrightarrow \chi(\lambda) \otimes \sigma(A)$$

と書く。次に $M_2 \simeq GL(2) \times \mathbb{G}_m$ の cuspidal 保型表現 π をやはり $GL(2)$ の cuspidal 保型表現 σ と $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times$ の指標 χ を使って

$$\pi = \chi \otimes \sigma : \left(\begin{array}{c|c|c} \mu & & \\ \hline & A & \\ \hline & & \frac{\det A}{\mu} \end{array}\right) \longrightarrow \chi(\mu) \otimes \sigma(A)$$

と書く。最後に $\mathbf{T} \simeq \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ の保型指標 π を

$$\pi = \chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi : \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3, t_4) \to \chi_1(t_1)\chi_2(t_2)\chi(t_3)$$

と書く。簡単のために $i_M(\pi) := \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}[\pi \otimes \mathbf{1}_{N(\mathbb{A})}]$ と書く。

(3) 最後に Hecke 行列については次のようにする。まず $G(\mathbb{A})$ の保型表現 π（$H(\mathbb{A})$ の保型表現 ρ resp.）の p-成分 π_p（$\rho_p = \rho_{1,p} \otimes \rho_{2,p}$ resp.）の Hecke 行列を

$$\mathrm{diag}(z_1(\pi_p), z_2(\pi_p), z_3(\pi_p), z_4(\pi_p)) \quad (\mathrm{diag}(z'(\rho_{1,p}), z''(\rho_{1,p})), \mathrm{diag}(z'(\rho_{2,p}), z''(\rho_{2,p})))\ \mathrm{resp.}$$

と書く。$GL(2, \mathbb{A})$ の保型表現 σ の p-成分 σ_p の Hecke 行列を

$$\mathrm{diag}(z_1(\sigma_p), z_2(\sigma_p))$$

と書く。

以上の下で計算結果は次の通り。

定理 5.4. *$\mathcal{A}_{cusp}(\mathbb{R}_+^\times \backslash GL(2, \mathbb{A}))$ で $GL(2, \mathbb{A})$ の既約 cuspidal 保型表現でその中心指標が $\mathbb{R}_+^\times$ 上自明なものの集合を、$\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^\times \backslash \mathbb{A}^\times)$ で $\mathbb{Q}^\times \mathbb{R}_+^\times \backslash \mathbb{A}^\times$ の指標の集合を表す。$f = f_\infty f_p f_q f^{p,q}$ を f_p 及び f_∞ は 4.5 の通りとし $f_q f^{p,q} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p)//K_f^p)$ を 定理 5.3 の条件 5.4, 5.5 を満たすものに取るとき*

$$J_G^G(f) = \sum_{\pi \in \Pi_{disc}(G)} m(\pi)\varepsilon(\pi_\infty)p^{3j/2}(z_1(\pi_p)^j + z_2(\pi_p)^j + z_3(\pi_p)^j + z_4(\pi_p)^j)\mathrm{tr}\pi_f^p(f^p) \tag{5.7}$$

(5.8)

$$
\begin{aligned}
J^G_{M_1}(f) = & \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{A}_{cusp}(\mathbb{R}^\times_+\backslash GL(2,\mathbb{A}))\\ \sigma_\infty\simeq D_1}} \sum_{\chi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^\times_+\backslash\mathbb{A}^\times)} \Big[z_1(\sigma_p)^j z_2(\sigma_p)^j \chi(p)^j \mathrm{tr}(i_{M_1}\left(\sigma^p_f|\det|^{\frac{3}{2}}_{\mathbb{A}^p_f}\otimes\chi^p_f|\,|^{-\frac{3}{2}}_{\mathbb{A}^p_f}\right), f^p) \\
& + \frac{1}{2}p^{\frac{3}{2}j}(z_1(\sigma_p)^j + z_2(\sigma_p)^j)\chi(p)^j \sum_{\substack{(x,x)=s(X^p)\\ X^p\in(\mathfrak{a}^G_{M_1})^p_f}} f^p_{M_1}(\sigma^p_f\otimes\chi^p_f, X^p)e^{-3|x|}\Big] \\
- & \sum_{\xi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^\times_+\backslash\mathbb{A}^\times)} \sum_{\chi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^\times_+\backslash\mathbb{A}^\times)} \Big[\xi(p)^{2j}\chi(p)^j\mathrm{tr}(i_{M_1}\left(\xi^p_f\circ\det|\det|^{\frac{3}{2}}_{\mathbb{A}^p_f}\otimes\chi^p_f|\,|^{-\frac{3}{2}}_{\mathbb{A}^p_f}\right), f^p) \\
& + \frac{1}{2}p^j(1+p^j)\xi(p)^j\chi(p)^j \sum_{\substack{(x,x)=s(X^p)\\ X^p\in(\mathfrak{a}^G_{M_1})^p_f}} f^p_{M_1}((\xi^p_f\circ\det)\otimes\chi^p_f, X^p)e^{-3|x|}\Big] \\
- & \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{A}_{cusp}(\mathbb{R}^\times_+\backslash GL(2,\mathbb{A}))\\ \sigma_\infty\simeq D_3}} \sum_{\chi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^\times_+\backslash\mathbb{A}^\times)} \Big[p^j z_1(\sigma_p)^j z_2(\sigma_p)^j \chi(p)^j \mathrm{tr}(i_{M_1}\left(\sigma^p_f|\det|^{\frac{1}{2}}_{\mathbb{A}^p_f}\otimes\chi^p_f|\,|^{-\frac{1}{2}}_{\mathbb{A}^p_f}\right), f^p) \\
& + \frac{1}{2}p^{\frac{3}{2}j}(z_1(\sigma_p)^j + z_2(\sigma_p)^j)\chi(p)^j \sum_{\substack{(x,x)=s(X^p)\\ X^p\in(\mathfrak{a}^G_{M_1})^p_f}} f^p_{M_1}(\sigma^p_f\otimes\chi^p_f, X^p)e^{-|x|}\Big]
\end{aligned}
$$

(5.9)

$$
\begin{aligned}
J^G_{M_2}(f) = & 2\sum_{\substack{\chi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^\times_+\backslash\mathbb{A}^\times)\\ \chi_\infty=\mathbf{1}}} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{A}_{cusp}(\mathbb{R}^\times_+\backslash GL(2,\mathbb{A}))\\ \sigma_\infty\simeq D_1}} p^{\frac{j}{2}}\chi(p)^j(z_1(\sigma_p)^j+z_2(\sigma_p)^j)\mathrm{tr}(i_{M_2}(\chi^p_f|\,|^2_{\mathbb{A}^p_f}\otimes\sigma^p_f|\det|^{-1}_{\mathbb{A}^p_f}), f^p) \\
& - 2\sum_{\substack{\chi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^\times_+\backslash\mathbb{A}^\times)\\ \chi_\infty=\mathbf{1}}} \sum_{\xi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^\times_+\backslash\mathbb{A}^\times)} (1+p^j)\chi(p)^j\xi(p)^j\mathrm{tr}(i_{M_2}(\chi^p_f|\,|^2_{\mathbb{A}^p_f}\otimes(\xi^p_f\circ\det)|\det|^{-1}_{\mathbb{A}^p_f}), f^p) \\
& - 2\sum_{\substack{\chi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^\times_+\backslash\mathbb{A}^\times)\\ \chi_\infty=\mathrm{sgn}}} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{A}_{cusp}(\mathbb{R}^\times_+\backslash GL(2,\mathbb{A}))\\ \sigma_\infty\simeq D_2}} p^j\chi(p)^j(z_1(\sigma_p)^j+z_2(\sigma_p)^j)\mathrm{tr}(i_{M_2}\left(\chi^p_f|\,|_{\mathbb{A}^p_f}\otimes\sigma^p_f|\det|^{-\frac{1}{2}}_{\mathbb{A}^p_f}\right), f^p)
\end{aligned}
$$

(5.10)

$$
\begin{aligned}
J^G_{\mathbf{T}}(f) = & 4\sum_{\substack{\chi_1,\chi_2,\chi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^\times_+\backslash\mathbb{A}^\times)\\ \chi_{1,\infty}=\chi_{2,\infty}=\mathrm{sgn}^a}} \chi_1(p)^j\chi_2(p)^j\chi(p)^j\Big[(-1)^a\mathrm{tr}(i_{\mathbf{T}}\left(\chi^p_{1,f}|\,|^2_{\mathbb{A}^p_f}\otimes\chi^p_{2,f}|\,|_{\mathbb{A}^p_f}\otimes\chi^p_f|\,|^{-\frac{3}{2}}_{\mathbb{A}^p_f}\right), f^p) \\
& + \frac{1}{2}p^j\sum_{\substack{(x_1,x_2)=s(X^p)\\ X^p\in(\mathfrak{a}^G_{\mathbf{T}})^p_f}} f^p_{\mathbf{T}}(\chi^p_{1,f}\otimes\chi^p_{2,f}\otimes\chi^p_f, X^p)e^{-\frac{(x_1+x_2)}{2}-\frac{3|x_1-x_2|}{2}} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{\substack{(x_1,x_2)=s(X^p)\\ X^p\in(\mathfrak{a}^G_{\mathbf{T}})^p_f}} f^p_{\mathbf{T}}((\chi^p_{1,f}\otimes\chi^p_{2,f}\otimes\chi^p_f, X^p)e^{-\frac{3(x_1+x_2)}{2}+\frac{|x_1-x_2|}{2}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

定理 5.5. $\mathcal{A}_{cusp}(\mathbb{R}^\times_+\backslash H(\mathbb{A}))$ で $H(\mathbb{A})$ の既約 *cuspidal* 保型表現でその中心指標の $Z_H(\mathbb{R})_+$ への制限が自明なものの集合を、$\mathcal{A}(\mathbb{R}^\times_+\backslash H(\mathbb{A}))$ で $H(\mathbb{A})$ の保型関数の空間に *discrete* に現れる既約保型表現でその中心指標の $Z_H(\mathbb{R})_+$ への制限が自明なものの集合を表す。また ι

で H 上の *involution* $H \ni (g_1, g_2) \to (g_2, g_1) \in H$ を表す。$h = h_\infty h_p h_q h^{p,q}$ を *Theorem5.4* の f から *4.4* によって得られるものに取るとき

(5.11)

$$J_H^H(h) = -\sum_{\substack{\rho_1\otimes\rho_2 \in \mathcal{A}_{cusp}(\mathbb{R}_+^\times\backslash H(\mathbb{A}))\\ \rho_{1,\infty}=D_3, \rho_{2,\infty}=D_1}} p^{\frac{3j}{2}}\left[(z'(\rho_{1,p})^j + z''(\rho_{2,p})^j) - (z'(\rho_{2,p})^j + z''(\rho_{2,p})^j)\right]$$
$$\mathrm{tr}(\rho_{1,f}^p \otimes \rho_{2,f}^p, h^p + (h^p \circ \iota))$$
$$+ \sum_{\substack{\rho_1\otimes(\xi_2\circ\det) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^\times\backslash H(\mathbb{A}))\\ \rho_{1,\infty}=D_3}} \left[p^{\frac{3j}{2}}(z'(\rho_{1,p})^j + z''(\rho_{2,p})^j) - p^j(1+p^j)\xi_2(p)^j\right]$$
$$\mathrm{tr}(\rho_{1,f}^p \otimes (\xi_{2,f}^p \circ \det), h^p + (h^p \circ \iota))$$

(5.12)

$$J_{L_1}^H(h) = -2 \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_{cusp}(\mathbb{R}_+^\times\backslash GL(2,\mathbb{A}))\\ \sigma_\infty = D_1}} \sum_{\substack{\chi',\chi'' \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^\times\backslash \mathbb{A}^\times)\\ \chi'_\infty=\chi''_\infty}} \left[\chi'(p)^j \mathrm{tr}(i_{L_1}\left(\sigma_f^p \otimes \chi'^p_f|\ |_{\mathbb{A}_f^p}^{\frac{3}{2}} \otimes \chi''^p_f|\ |_{\mathbb{A}_f^p}^{-\frac{3}{2}}\right), f^p)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}p^{\frac{3j}{2}}(z_1(\sigma_p)^j + z_2(\sigma_p)^j) \sum_{\substack{(y,-y)\in S(Y^p)\\ Y^p \in (\mathfrak{a}_{L_1}^H)_f^p}} h_{L_1}^p(\sigma_f^p \otimes \chi'^p_f \otimes \chi''^p_f, Y^p) e^{-3|y|}\right]$$
$$+ 2 \sum_{\xi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^\times\backslash \mathbb{A}^\times)} \sum_{\substack{\chi',\chi'' \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^\times\backslash \mathbb{A}^\times)\\ \chi'_\infty=\chi''_\infty}} \left[\chi'(p)^j \mathrm{tr}(i_{L_1}\left((\xi_f^p\circ\det) \otimes \chi'^p_f|\ |_{\mathbb{A}_f^p}^{\frac{3}{2}} \otimes \chi''^p_f|\ |_{\mathbb{A}_f^p}^{-\frac{3}{2}}\right), h^p)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}p^j(1+p^j)\xi(p)^j \sum_{\substack{(y,-y)\in S(Y^p)\\ Y^p \in (\mathfrak{a}_{L_1}^H)_f^p}} h_{L_1}^p((\xi_f^p\circ\det) \otimes \chi'^p_f \otimes \chi''^p_f, Y^p) e^{-3|y|}\right]$$
$$+ 2 \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_{cusp}(\mathbb{R}_+^\times\backslash GL(2,\mathbb{A}))\\ \sigma_\infty = D_3}} \sum_{\substack{\chi',\chi'' \in \mathcal{A}(\mathbb{R}_+^\times\backslash \mathbb{A}^\times)\\ \chi'_\infty=\chi''_\infty}} \left[p^j\chi'(p)^j \mathrm{tr}(i_{L_1}\left(\sigma_f^p \otimes \chi'^p_f|\ |_{\mathbb{A}_f^p}^{\frac{1}{2}} \otimes \chi''^p_f|\ |_{\mathbb{A}_f^p}^{-\frac{1}{2}}\right), h^p)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}p^{\frac{3j}{2}}(z_1(\sigma_p)^j + z_2(\sigma_p)^j) \sum_{\substack{(y,-y)\in S(Y^p)\\ Y^p \in (\mathfrak{a}_{L_1}^H)_f^p}} h_{L_1}^p(\sigma_f^p \otimes \chi'^p_f \otimes \chi''^p_f, Y^p) e^{-|y|}\right]$$

(5.13)

$$J_{\mathbf{T}_H}^H(h) = -4 \sum_{\substack{\chi'_1,\chi''_1,\chi'_2,\chi''_2\\ \chi'_{1,\infty}=\chi''_{1,\infty}\\ \chi'_{2,\infty}=\chi''_{2,\infty}}} \chi'_1(p)^j \sum_{\substack{(y_1,y_2)\in s(Y^p)\\ Y^p \in (\mathfrak{a}_{\mathbf{T}_H}^H)_f^p}} h_{\mathbf{T}_H}^p(\chi'^p_{1,f} \otimes \chi''^p_{1,f} \otimes \chi'^p_{2,f} \otimes \chi''^p_{2,f}, Y^p) e^{-\frac{3(y_1+y_2)}{2} - \frac{|y_1-y_2|}{2}}$$
$$+ 4 \sum_{\substack{\chi'_1,\chi''_1,\chi'_2,\chi''_2\\ \chi'_{1,\infty}=\chi''_{1,\infty}\\ \chi'_{2,\infty}=\chi''_{2,\infty}}} p^j\chi'_1(p)^j \sum_{\substack{(y_1,y_2)\in s(Y^p)\\ Y^p \in (\mathfrak{a}_{\mathbf{T}_H}^H)_f^p}} h_{\mathbf{T}_H}^p(\chi'^p_{1,f} \otimes \chi''^p_{1,f} \otimes \chi'^p_{2,f} \otimes \chi''^p_{2,f}, Y^p) e^{-\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{3|y_1-y_2|}{2}}$$

が成り立つ。なお $J^H_{L_2}(h)$ の式は $J^H_{L_1}(h)$ の式で L_1 を L_2 で、$(y,-y)$ を (y,y) で、σ^p_f（あるいは ξ^p_f）と
$\chi'|\ |^?_{\mathbb{A}^p_f}, \chi''|\ |^?_{\mathbb{A}^p_f}$ を取り替えて得られる。

6. The result

6.1. Calculation of the trace.

6.1.1. *Rationality.* 保型関数に対応する Galois 表現を記述する際には保型関数の有理性の問題に注意せねばならない。詳しいことはこの報告集の吉田先生の記事や [Cl2] を参照してもらうことにして、ここでは必要な結果をまとめておく。

まず $\chi : \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ を quasi-character で $\chi_\infty = |\ |^n_{\mathbb{R}}\mathrm{sgn}^\epsilon$（$n \in \mathbb{Z}, \epsilon \in \{0,1\}$）なるものとする。大域類体論により Abel 拡大 $E(\chi)/\mathbb{Q}$ があって $\chi(\mathbb{A}^\times_f) \subset E(\chi)^\times$。このとき $E(\chi)$ の有限素点 λ に対して $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の λ-adic 表現の compatible system $\{V_\lambda(\chi)\}_\lambda$ があって、

(1) $V_\lambda(\chi)$ は 1 次元で pure of weight $-2n$。
(2) χ が不分岐な p に対して $\mathrm{tr}(\Phi^j_p|V_\lambda(\chi)) = \chi(p)^j$。

が成り立つ。

次に σ を既約で cuspidal な $GL(2,\mathbb{A})$ の保型表現でその無限成分 σ_∞ が $\widetilde{\sigma}_n := D_n \otimes |\det|^{(1-n)/2}_{\mathbb{R}}$ であるものとする。Eichler-志村それに Deligne によれば（cf. [De3]）、ある数体 $E(\sigma)$ であって σ_f がその上で定義されている（cf. [Cl2] 3.1.) ものがあり、さらに $E(\sigma)$ の各有限素点 λ に対して $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の 2 次元 λ-adic 表現の compatible system $\{V_\lambda(\sigma)\}_\lambda$ があって

(1) $V_\lambda(\sigma)$ は pure of weight n。
(2) σ_p が不分岐な p に対して

$$\mathrm{tr}(\Phi^j_p|V_\lambda(\sigma)) = p^{\frac{j}{2}}(z_1(\sigma_p)^j + z_2(\sigma_p)^j) \in E(\sigma), \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

が成り立つ。

最後に tensor 積について。まず χ_1、χ_2 を上の通りの quasi-character とするとき、$E(\chi_1)$ と $E(\chi_2)$ の合成体を E と書けば E の各有限素点 λ で

$$V_\lambda(\chi_1\chi_2) = V_\lambda(\chi_1) \otimes_{E_\lambda} V_\lambda(\chi_2)$$

である。次に σ を上で触れたタイプの $GL(2,\mathbb{A})$ の cuspidal 保型表現、χ を上の通りの quasi-character とするとき、E を $E(\sigma)$ と $E(\chi)$ の合成体として、E の各有限素点 λ で

$$V_\lambda((\chi \circ \det) \otimes \sigma) = V_\lambda(\chi) \otimes V_\lambda(\sigma)$$

が成り立つ。最後に σ を上の通りとし ω_σ でその中心指標を表すとき、$E(\omega_\sigma) \subset E(\sigma)$ であり、

$$V_\lambda(\omega_\sigma) = \det(V_\lambda(\sigma))(1)$$

が成り立つ。

6.1.2. *The trace* $\mathrm{tr}(\Phi^j_p \times f^p\mathrm{Ch}_{K_p}|W_\lambda)$. 主結果を述べる、がその前に W_ℓ（cf. 3）の中には G 自身以外の放物型部分群たちの寄与が含まれている。放物型部分群の Levi 成分は本質的に $GL(2)$ と $\mathbb{G}_m$ の直積なので、その寄与は 6.1.1 を使って次のように計算される。まず $P = MN \subset G$ を放物型部分群とし、π_f を $M(\mathbb{A}_f)$ の既約 smooth な表現とする。$j_M(\pi_f)$ で unnormalized な誘導表現

$$\mathrm{ind}^{G(\mathbb{A}_f)}_{P(\mathbb{A}_f)}[\pi_f \otimes \mathbf{1}_{N(\mathbb{A}_f)}] = \mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A}_f)}_{P(\mathbb{A}_f)}[\delta_P^{-1/2}\pi_f \otimes \mathbf{1}_{N(\mathbb{A}_f)}]$$

を表す。ここで δ_P は $P(\mathbb{A}_f)$ の modulus である。このとき保型表現の定義体 E を適切に取り、その有限素点 $\lambda|\ell$ に対して

(6.1)
$$
\begin{aligned}
W_{M_1,\lambda} := &\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{A}_{cusp}(\mathbb{R}_+^\times\backslash GL(2,\mathbb{A}))\\ \sigma_\infty\simeq\widetilde{\sigma}_1}}\ \sum_{\chi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{A}^\times)} V_\lambda(\omega_\sigma\chi)\otimes j_{M_1}(\sigma_f|\det|_{\mathbb{A}_f}^3\otimes\chi_f|\ |_{\mathbb{A}_f}^{-3})^{K_N}\\
&-\sum_{\chi,\xi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{A}^\times)} V_\lambda(\xi^2\chi)\otimes j_{M_1}((\xi_f\circ\det)|\det|_{\mathbb{A}_f}^3\otimes\chi_f|\ |_{\mathbb{A}_f}^{-3})^{K_N}\\
&-\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{A}_{cusp}(\mathbb{R}_+^\times\backslash GL(2,\mathbb{A}))\\ \sigma_\infty\simeq\widetilde{\sigma}_3}}\ \sum_{\chi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{A}^\times)} V_\lambda(\omega_\sigma\chi)(1)\otimes j_{M_1}(\sigma_f|\det|_{\mathbb{A}_f}^3\otimes\chi_f|\ |_{\mathbb{A}_f}^{-2})^{K_N}
\end{aligned}
$$

(6.2)
$$
\begin{aligned}
W_{M_2,\lambda} := &\sum_{\substack{\chi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{A}^\times)\\ \chi_\infty=\mathbf{1}}}\ \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{A}_{cusp}(\mathbb{R}_+^\times\backslash GL(2,\mathbb{A}))\\ \sigma_\infty\simeq\widetilde{\sigma}_1}} V_\lambda((\chi\circ\det)\sigma)\otimes j_{M_2}(\chi_f|\ |_{\mathbb{A}_f}^4\otimes\sigma_f|\det|_{\mathbb{A}_f}^{-2})^{K_N}\\
&-\sum_{\substack{\chi,\xi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{A}^\times)\\ \chi_\infty=\mathbf{1}}} (V_\lambda(\chi\xi)+V_\lambda(\chi\xi)(-1))\otimes j_{M_2}(\chi_f|\ |_{\mathbb{A}_f}^4\otimes(\xi_f\circ\det)|\det|_{\mathbb{A}_f}^{-2})^{K_N}\\
&-\sum_{\substack{\chi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{A}^\times)\\ \chi_\infty=\mathrm{sgn}}}\ \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{A}_{cusp}(\mathbb{R}_+^\times\backslash GL(2,\mathbb{A}))\\ \sigma_\infty\simeq\widetilde{\sigma}_2}} V_\lambda((\chi\circ\det)\sigma)\otimes j_{M_2}(\chi_f|\ |_{\mathbb{A}_f}^3\otimes\sigma_f|\det|_{\mathbb{A}_f}^{-1})^{K_N}
\end{aligned}
$$

$$
W_{\mathbf{T},\lambda} := \sum_{\substack{\chi_1,\chi_2,\chi\in\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{A}^\times)\\ \chi_{1,\infty}=\chi_{2,\infty}=\mathbf{1}}} V_\lambda(\chi_1\chi_2\chi)\otimes J_{\mathbf{T}}(\chi_{1,f}|\ |_{\mathbb{A}_f}^4\otimes\chi_{2,f}|\ |_{\mathbb{A}_f}^2\otimes\chi_f|\ |_{\mathbb{A}_f}^{-3})^{K_N} \tag{6.3}
$$

とおく。これらを使って（$W_\lambda=W_\ell\otimes_{\mathbb{Q}_\ell}E_\lambda$ cf. 3）

$$
\overline{W}_\lambda := W_\lambda-(W_{M_1,\lambda}+W_{M_2,\lambda}+W_{\mathbf{T},\lambda})
$$

と定義するとき、[Lau] の主結果は次の通り。

定理 6.1 (The main result). N を割らない素数 $p\neq\ell$ を取る。勝手な $f^p\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p)//K_N)_{\mathbb{Q}}$ と $j\in\mathbb{N}$ に対して

$$
\mathrm{tr}(\Phi_p^j\times f^p\mathrm{Ch}_{K_p}|\overline{W}_\lambda)=J_G^G(f_\infty f^p f_p)+\frac{1}{4}J_H^H(h_\infty h^p h_p) \tag{6.4}
$$

が成り立つ。

証明 (Sketch) (1) まず<u>（仮定１）j を十分大きく取る</u>時 Deligne's conjecture（Theorem 3.3）と Theorem 4.10 から

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\Phi_p^j\times f^p\mathrm{Ch}_{K_p}|W_\lambda)&=N(j,f^p)\\
&=ST_e^*(f)+\iota(G,H)ST_e^*(h)
\end{aligned}
$$

である。また定数 $\iota(G,H)$ は計算により 1/4 に等しいことがわかる。
(2) ところが f_∞ は stable であったので Lemma 5.1 から

$$
ST_e^*(f)+\iota(G,H)ST_e^*(h)=T_e(f)+\frac{1}{4}T_e^H(h).
$$

(3) さらに(仮定２) p と異なる有限素点 q があって f_p、f_q が Lemma 5.2 の条件 5.4、5.5 を満たす。のもとでは Lemma 5.2 から $T_e(f) = J_{geom}(f)$, $T_e^H(h) = J_{geom}(h)$ であり、従って Arthur の跡公式から

$$\begin{aligned}T_e(f) + \frac{1}{4}T_e^H(h) =& J_{geom}(f) + \frac{1}{4}J_{geom}(h)\\ =& J_{spec}(f) + \frac{1}{4}J_{spec}(h)\end{aligned}$$

Theorem 5.3 から

$$\begin{aligned}=& J_G^G(f) + \frac{1}{4}J_H^H(h)\\ &+ \frac{1}{2}J_{M_1}^G(f) + \frac{1}{8}(J_{L_1}^H(h) + J_{L_2}^H(h)) + \frac{1}{2}J_{M_2}^G(f)\\ &+ \frac{1}{8}J_{\mathbf{T}}^G(f) + \frac{1}{16}J_{\mathbf{T}_H}^H(h).\end{aligned}$$

(4) ここで $GL(2)$ と $\mathbb{G}_m$ について知られている結果から

$$\frac{1}{2}J_{M_1}^G(f) + \frac{1}{8}(J_{L_1}^H(h) + J_{L_2}^H(h)) = \mathrm{tr}(\Phi_p^j \times f^p\mathrm{Ch}_{K_p}|W_{M_1,\lambda})$$
$$\frac{1}{2}J_{M_2}^G(f) = \mathrm{tr}(\Phi_p^j \times f^p\mathrm{Ch}_{K_p}|W_{M_2,\lambda})$$
$$\frac{1}{8}J_{\mathbf{T}}^G(f) + \frac{1}{16}J_{\mathbf{T}_H}^H(h) = \mathrm{tr}(\Phi_p^j \times f^p\mathrm{Ch}_{K_p}|W_{\mathbf{T},\lambda})$$

がわかる。結局（仮定１）（仮定２）の下で

$$\mathrm{tr}(\Phi_p^j \times f^p\mathrm{Ch}_{K_p}|\overline{W}_\lambda) = J_G^G(f) + \frac{1}{4}J_H^H(h) \tag{6.5}$$

である。
(5) (Laumon's technique) さて 6.5 の右辺から左辺を引いたものは j と f_q の関数として

$$\sum_z \sum_{t^\vee \in \mathcal{T}} c(z,t^\vee)z^j f_q^\vee(t^\vee) \tag{6.6}$$

と書けることに注意する（$f_q^\vee \in \mathbb{C}[\mathcal{T}]^\Omega$ は $f_q \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_q)//K_q)$ の佐武同型による像)。実際 Theorem 5.4 及び Theorem 5.5 から 6.5 の右辺は j に z^j の形の関数の有限和としてだけよっており、左辺も Φ_p の作用の固有値の j 上としてのみ依存している。(このように local なものの積に分解することが Arthur の跡公式の大変な長所である。）このとき

(1) 6.6 の形から $c(z,t^\vee)f_q^\vee(t^\vee)$ は j によらず０。つまり（仮定１）が除かれた。
(2) 次に（仮定２）を満たす $\mathcal{T}$ の開部分集合の上で $c(z,t^\vee) = 0$ なので解析接続の一意性から全 $\mathcal{T}$ 上で $c(z,t^\vee) = 0$。これで（仮定２）も除かれた。

□

6.2. **Galois 表現.** Theorem 6.1 の帰結としてある種の Siegel 保型形式に対応する Galois 表現についての情報が得られる。まずいくつか準備をする。

(1) $H^*(\mathfrak{g}, K_\infty^{der}; \pi_\infty) \neq \{0\}$ となる π_∞ たちを
  (a) $\pi^H := D_{hol}$, $\pi^W := D_{nh}$（cf. **??**)。
  (b) $\pi^{M_1,+} := \mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}[(D_3|\det|_{\mathbb{R}}^{1/2} \otimes |\ |_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbf{1}_{U_1(\mathbb{R})}] = \mathrm{ind}_{P_1(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}[(D_3|\det|_{\mathbb{R}}^2 \otimes |\ |_{\mathbb{R}}^{-2}) \otimes \mathbf{1}_{U_1(\mathbb{R})}]$ の Langlands' quotient。

(c) $\pi^{M_1,-} := \mathrm{Ind}_{P_1(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}[(D_3|\det|_{\mathbb{R}}^{1/2}\otimes|\ |_{\mathbb{R}}\mathrm{sgn})\otimes\mathbf{1}_{U_1(\mathbb{R})}] = \mathrm{ind}_{P_1(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}[(D_3|\det|_{\mathbb{R}}^2\otimes|\ |_{\mathbb{R}}^{-2}\mathrm{sgn})\otimes\mathbf{1}_{U_1(\mathbb{R})}]$ の Langlands' quotient。

(d) $\pi^{M_2} := \mathrm{Ind}_{P_2(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}[(|\ |_{\mathbb{R}}\otimes D_2)\otimes\mathbf{1}_{U_2(\mathbb{R})}] = \mathrm{ind}_{P_2(\mathbb{R})}^{G(\mathbb{R})}[(|\ |_{\mathbb{R}}^3\otimes D_2|\det|_{\mathbb{R}}^{-1})\otimes\mathbf{1}_{U_2(\mathbb{R})}]$ の Langlands' quotient。

と名付ける。

(2) $P=MN$ を standard 放物型部分群とする。$G(\mathbb{A})$ の既約保型表現 π が $M(\mathbb{A})$ の既約保型表現 τ からの *weak induction* であるとは、π_v 及び τ_v が不分岐であるようなほとんど全ての v で π_v が $\mathrm{ind}_{P(\mathbb{Q}_v)}^{G(\mathbb{Q}_v)}[\tau_v\otimes\mathbf{1}_{N(\mathbb{Q}_v)}]$ のただ１つの不分岐な既約商表現になっていることとする。

(3) $G(\mathbb{A})$ の既約保型表現 π が $H(\mathbb{A})$ の既約保型表現 $\rho_1\otimes\rho_2$ の *weak lifting* であるとは、π_v 及び $\rho_{1,v}\otimes\rho_{2,v}$ が不分岐であるようなほとんど全ての v で

$$\mathrm{diag}(z_1(\pi_v),z_2(\pi_v),z_3(\pi_v),z_4(\pi_v)) = \mathrm{diag}(z'(\rho_{1,v}),z'(\rho_{2,v}),z''(\rho_{2,v}),z''(\rho_{1,v}))$$

となることとする。

定理 6.2 (Galois 表現)**.** π を $G(\mathbb{Q})Z_G(\mathbb{R})_+\backslash G(\mathbb{A})$ 上の *cuspidal* な既約保型表現でその無限成分 π_∞ が $\{\pi^H,\pi^W,\pi^{M_1,\pm},\pi^{M_2}\}$ に含まれているものとする。このとき次のうち少なくとも１つが成り立つ。

(1) π は $(M_1,\sigma|\det|_{\mathbb{A}}^3\otimes\chi|\ |_{\mathbb{A}}^{-2})$（$(M_2,\chi|\ |_{\mathbb{A}}^3\otimes\sigma|\det|_{\mathbb{A}}^{-1})$ *resp.*）からの *weak induction*。但し σ は $GL(2,\mathbb{A})$ の既約 *cuspidal* 保型表現で $\sigma_\infty=\widetilde{\sigma}_3$（$\sigma_\infty=\widetilde{\sigma}_2$ *resp.*）なるもの、χ は $\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ の指標である。

(2) π は $(H,\rho_1|\det|_{\mathbb{A}}\otimes\rho_2)$ からの *weak lifting*。但し ρ_1 は $GL(2,A)$ の既約 *cuspidal* な保型表現で $\rho_{1,\infty}=\widetilde{\sigma}_3$ であるもの。ρ_2 は $GL(2,\mathbb{A})$ の既約 *cuspidal* 保型表現で $\rho_{2,\infty}=\widetilde{\sigma}_1$ であるものか、$\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ の指標 χ と det の合成である。

(3) $\pi_\infty=\pi^H$ *or* π^W かつ $m(\pi^{M_1,\pm}\otimes\pi_f)=m(\pi^{M_2}\otimes\pi_f)=0$ の時。素点の有限集合 S と数体 $E/\mathbb{Q}$ 及び、E の各有限素点 λ に対して $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の半単純で *pure of weight 3* の λ*-adic* 表現の *compatible system* $\{V_\lambda\}_\lambda$ があって、$p\notin S,\ \lambda\nmid p$ なる p で

$$\mathrm{tr}(\Phi_p^j|V_\lambda) = [m(\pi^H\otimes\pi_f)+m(\pi^W\otimes\pi_f)]p^{3j/2}\sum_{i=1}^4 z_i(\pi_p)^j$$

が成り立つ。

(4) $\pi_\infty=\pi^{M_1,\pm}$ *or* π^{M_2} かつ $m(\pi^H\otimes\pi_f)=m(\pi^W\otimes\pi_f)=0$ の時。やはり素点の有限集合 S と数体 $E/\mathbb{Q}$ 及び、E の各有限素点 λ に対して $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の半単純で *pure of weight 2* の λ*-adic* 表現の *compatible system* $\{V'_\lambda\}_\lambda$ があって、$p\notin S,\ \lambda\nmid p$ なる p で

$$\mathrm{tr}(\Phi_p^j|V'_\lambda\otimes {V'}_\lambda^\vee(-3)) = \left[\frac{m(\pi^{M_1,+}\otimes\pi_f)+m(\pi^{M_1,-}\otimes\pi_f)}{2}+m(\pi^{M_2}\otimes\pi_f)\right]p^{3j/2}\sum_{i=1}^4 z_i(\pi_p)^j$$

が成り立つ。但し ${V'}_\lambda^\vee$ は V'_λ の反傾表現である。

上で $m(\pi)$ は π の $L^2(G(\mathbb{Q})Z_G(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{A}))$ の *discrete spectrum* での π の重複度を表す。

注意 6.3. 上の *(3)* では V_λ は *pure of weight 3* であるからその上の Φ_p の固有値の絶対値は $p^{3/2}$。従って

$$|z_i(\pi_p)|=1,\qquad i=1,\ldots,4$$

つまり *Ramanujan* 予想が成り立つ。一方 *(4)* の時には *pure of weight 2* だから、左辺の Φ_p の固有値の絶対値は p であり、並べ替えを除いて

$$|z_1(\pi_p)|=|z_2(\pi_p)|=p^{1/2},\quad |z_3(\pi_p)|=|z_4(\pi_p)|=p^{-1/2}$$

となる。この 2 つの例は、なぜ $GL(n)$ 以外の群で *Ramanujan* 予想を望めないかを端的に示唆している。

証明 類似の議論は [Cl3] や [Ko5] に見ることができる。

(1) まず $H_c^*(Sh_{K_N}(G, X_\infty) \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の定義にでてきたよいコンパクト化 $Sh_{K_N}(G, X_\infty) \overset{j}{\hookrightarrow} \overline{Sh_{K_N}(G, X_\infty)}$ を取る。

$$H_c^*(Sh_{K_N} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell) = H^*(Sh_{K_N} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, j_!\mathbb{Q}_\ell)$$

であったが通常のコホモロジー群は

$$H^*(Sh_{K_N} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell) = H^*(Sh_{K_N} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, j_*\mathbb{Q}_\ell)$$

で与えられる。従って $j_!\mathbb{Q}_\ell \to j_*\mathbb{Q}_\ell$ から写像

$$H_c^*(Sh_{K_N} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^*(Sh_{K_N} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

が得られるが、この像を $H_!^*(Sh_{K_N} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ と書き *cohomologie of the interior* と呼ぶ。

(2) コホモロジーの比較定理から $\mathbb{Q}_\ell$-ベクトル空間として

$$H_!^*(Sh_{K_N} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H_!^*(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell.$$

一方よく知られているように $H_c^i(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q})$ は i が 2, 3, 4 の時以外は消えているから

$$H_!^2(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q}), \quad H_!^3(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q}), \quad H_!^4(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q})$$

を調べれば十分である。さらに Poincaré 双対性

$$H_!^i(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q}) \times H_!^{6-i}(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(-3)$$

から $H_!^2(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q})$ と $H_!^4(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q})$ は互いに dual である。

(3) Borel によれば（[Bo] 5.4）$H_!^*(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q})$ は cuspidal cohomology $H_{cusp}^*(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q})$ を含む。一方 $H_{cusp}^*(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q})$ については「松嶋-村上の公式」の variant

$$H_{cusp}^*(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q}) = \bigoplus_\pi m_{cusp}(\pi) H^*(\mathfrak{g}, K_\infty^{der}; \pi_\infty) \otimes \pi_f^{K_N}$$

が成り立つ。ここで $m_{cusp}(\pi)$ は π の $G(\mathbb{A})$ 上の cusp forms の空間での重複度である。$(\mathfrak{g}, K)$-コホモロジーの定義（cf. [Bo-Wa] I §5, see also I §1）から weight を見てやれば、π の有限成分 π_f は $H_!^*(Sh_{K_N} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ に少なくとも

(6.7)

$$\begin{aligned} H_!^2(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q}) &\simeq H_!^4(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q}) \\ &\supset [m_{cusp}(\pi^{M_1,+} \otimes \pi_f) + m_{cusp}(\pi^{M_1,-} \otimes \pi_f) + 2m_{cusp}(\pi^{M_2} \otimes \pi_f)]\pi_f^{K_N} \\ H_!^3(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q}) &\supset 2[m(\pi^H \otimes \pi_f) + m(\pi^W \otimes \pi_f)]\pi_f^{K_N} \end{aligned}$$

で寄与する。

(4) 定理の *(1)* と *(2)* の場合を除けば π は $H_!^*(S_{K_N}(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Q})$ に寄与する。しかも 6.7 から $\pi_\infty = \pi^H$ or π^W なものは H^3 に、$\pi_\infty = \pi^{M_1,\pm}$ or π^{M_2} なものは H^2 と H^4 に行くことがわかる。一方 Weil 予想から、$H_!^i(Sh_{K_N} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, E_\lambda) = H_!^*(Sh_{K_N} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} E_\lambda$ は pure of weight i の半単純な $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-加群である。これから *(3)* の V_λ 及び *(4)* の V'_λ が得られた。最後に Φ_p^j の trace の式は π の寄与が Theorem 5.4 の中の 5.7 に含まれていることからわかる。 □

7. Index of notations

References

[Ar1] J. Arthur, *A trace formula for reductive groups I. Terms associated to classes in $G(\mathbb{Q})$*, Duke Math. J. vol. 45 (1978), pp. 911–952.

[Ar2] ———, *On a family of distributions obtained from orbits*, Can. J. Math. vol. 38 (1986), pp. 179–214.

[Ar3] ———, *On a family of distributions obtained from Eisenstein series II: Explicit formulas*, Am. J. Math. vol. 104 (1982), pp. 1289–1336.

[Bo] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups II*, in “Manifolds and Lie Groups”, J. Hano et al. ed. Progress in Math. Birkhäuser (1981) pp.21–55.

[Bo-Wa] ———, N. Wallach, Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups, Annals of Math. Studies 94, Princeton Univ. Press (1980).

[Cas] W. Casselman, *The Hasse-Weil ζ-function of some moduli varieties of dimension greater than one*, in "Automorphic Forms, Representations, and L-functions" Proc. Symp in Pure Math. Vol. 33 (1979) part 2, pp. 141–163.
[Ch-Fa] C-L. Chai, G. Faltings, Degeneration of Abelian Varieties, Ergebnisse der Math. 3. Folge Bd. 22, Springer (1980).
[Cl1] L. Clozel, *The fundamental lemma for stable base change*, Duke Math. J. vol. 61 (1990), pp. 255–302.
[Cl2] ———, *Motifs et Formes Automorphes : Applications du Principe de Fonctorialité*, in "Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions", Proc. Conf. Ann Arbor, 1988, L. Clozel and J.S. Milne eds. Perspective in Math. 10, Academic Press, (1990), pp. 77–159.
[Cl3] ———, *Représentations Galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de $GL(n)$*, Publ. Math. IHES 73 (1991), pp. 97–145.
[Cl-De] ———, P. Delorme, *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs II*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 23 (1990), pp. 193–228.
[De1] P. Deligne, *Travaux de Shimura*, Séminaire Bourbaki, 23e année, (1970/71), n. 389.
[De2] ———, *Variétés de Shimura: Interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*, in "Automorphic Forms, Representations, and L-functions" Proc. Symp in Pure Math. Vol. 33 (1979) part 2, pp. 247–290.
[De3] ———, *Formes modulaires et représentations ℓ-adique*, Séminaire Bourbaki, 21e année, (1968/69), n. 355.
[H1] T. Hales, *Shalika germs on $GSp(4)$*, in Orbites Unipotentes et Rerprésentations II. Groupes p-adiques et réels, Astérisque 171-172 (1989) SMF pp. 195–256.
[H2] ———, *Unipotent representations and unipotent classes in $SL(n)$*, Can. J. Math. (1994) (recent volume).
[H3] ———, *A simple definition of transfer factors for unramified groups*, in "Representation Theory of Groups and Algebras", J. Adams et al. ed. Contemporary Math. 145 (1993) AMS pp.109–134.
[Ih] Y. Ihara, *Hecke polynomials as congruence ζ-functions in elliptic modular case*, Ann. of Math. 85 (1967), pp. 267–295.
[Ill] L. Illusie, *Appendice à Théorème de finitude en cohomologie ℓ-adique*, in SGA $4\frac{1}{2}$, Springer LNM 569.
[Kn] A. W. Knapp, Representation Theory of Semisimple Groups, An overview based on examples, Princeton Univ. Press (1986).
[Ko1] R. Kottwitz, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J.A.M.S. 5 (1992), pp. 373–444.
[Ko2] ———, *Shimura varieties and λ-adic representations*, in "Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions", Proc. Conf. Ann Arbor, 1988, L. Clozel and J.S. Milne eds. Perspective in Math. 10, Academic Press, (1990), pp. 161–209.
[Ko3] ———, *Stable trace formula: Cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. Vol. 51 (1984), pp. 611–650.
[Ko4] ———, *Stable trace formula: Elliptic singular terms*, Math. Ann. 275 (1986), pp. 365–399.
[Ko5] ———, *Tamagawa numbers*, Ann. of Math. 127 (1988), pp. 629–646.
[Ko5] ———, *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties*, Invent. Math. 108 (1992), pp. 653–665.
[Lab] J-P. Labesse, *Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base stable*, Duke Math. J. vol. 61 (1990), pp. 519–530.
[L1] R. Langlands, *Some contemporary problems with origins in the Jugendtraum*, in "Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems" Proc. Symp in Pure Math. Vol. 28 (1976), pp. 401–418.
[L2] ———, Shimura varieties and the Selberg trace formula, Can. J. Math. vol. 29 (1977), pp. 1292–1299.
[L3] ———, On the zeta-functions of some simple Shimura varieties, Can. J. Math. vol. 31 (1979), pp. 1121–1216.
[L4] R. Langlands, *Rank-one residues of Eisenstein series*, in "Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part II: Papers in Analysis, Number Theory and Automorphic L-functions", S. Gelbart et al. ed. Israel Mathematical Conference Proceedings, Weizmann Science Press (1990), pp. 111-125.
[L-S] ———, D. Shelstad, *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. 278 (1987), pp. 219–271.

[Lau] G. Laumon, *Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour* $GSp(4)_{\mathbb{Q}}$, preprint, Orsay (1994).

[Mü] W. Mühler, *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms*, Ann. of Math. 130 (1989), pp. 473–529.

[M] D. Mumford, Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Math. Bd. 34, Springer (1965).

[Pi] R. Pink, *On the calculation of local terms in the Lefschetz-Verdier trace formula and its application to a conjecture of Deligne*, Ann. of Math. 135 (1992), pp. 483–525.

[Sh] D. Shelstad, *L-indistinguishability for real groups*, Math. Ann. 259 (1982), pp. 385–430.

[Shim] G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton (1971).

[Vo] D. A. Vogan, *The Kazhdan-Lustzig conjecture for real reductive groups*, in "Representation Theory of Reductive Groups", P. C. Trombi ed. Progress in Math. Birkhäuser (1983) pp.223–264.

[Zi] T. Zink, *The Lefschetz trace formula for an open algebraic surface*, in "Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions", Proc. Conf. Ann Arbor, 1988, L. Clozel and J.S. Milne eds. Perspective in Math. 11, Academic Press, (1990), pp. 337–376.

東京大学大学院数理科学研究科 (博士 3 年) 〒 113 文京区本郷 7-3-1
E-mail address: `takuya@tansei.cc.u-tokyo.ac.jp`