保型形式入門[1]

今野 拓也 [2]

2004 年 1 月 28 日

[1]九州大学数理科学研究院での 2002 年度「数論大意」、2003 年度「数論基礎・演習」での講義ノート。訂正のご指摘、コメントなどありましたら下記までお知らせ下さい。

[2]九州大学大学院数理学研究院
E-mail : takuya@math.kyushu-u.ac.jp
URL : http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/~tkonno/index-j.html

目 次

一般的な記号　$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ でそれぞれ有理数体、実数体、複素数体を表す。$\mathbb{R}_+^\times$ で正実数全体のなす乗法群を表す。複素数 z の実部を $\Re z$, 虚部を $\Im z$ と書く。

第1章　楕円保型形式

1.1　Poincaré 上半平面

群作用　まずは群の作用について基本的なことを思い出そう。群 G の集合 X への**作用** *(action)* とは、写像 $\mu : G \times X \ni (g, x) \mapsto g.x \in X$ であって、

(i) $g.(h.x) = (gh).x,\ \forall g,\ h \in G,\ x \in X;$

(ii) $1.x = x,\ \forall x \in X$

を満たすものであった。（本当は位相群で説明しておいた方がよいが、ここでは簡単のために抽象群で考える。）

例 1.1.1. (1) 対称群 $\mathfrak{S}_n$ は $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ に

$$\mu : \mathfrak{S}_n \times X \ni (\sigma, i) \longmapsto \sigma(i) \in X$$

で作用している。
(2) 群 G は自分自身 $X = G$ に

$$\mu : G \times G \ni (g, x) \longmapsto \mathrm{Ad}(g)x := gxg^{-1} \in G$$

で作用している。これを**随伴作用** *(adjoint action)* と呼ぶ。
(3) $G' = SL(2, \mathbb{C})$ は $X = \mathbb{C}^2$ に

$$\mu : G' \times X \ni (g, v) \longmapsto g.v \in X$$

で作用している。

　各 $x \in X$ に対して、$G.x = \mu(G, x) := \{g.x \in X \mid g \in G\} \subset X$ をその G **軌道** *(G-orbit)* という。$x,\ y \in X$ が同一の G 軌道に属することを $x \sim_G y$ と書けば、これは同値関係である。特に X は G 軌道たちの直和に分解する。

$$X = \coprod_{i \in I} G.x_i \quad (G\ \textbf{軌道分解})$$

　X がただ一つの G 軌道からなるとき、G の作用 μ は**推移的** *(transitive)* であるという。またこのとき、X は G **等質空間** *(G-homogeneous space)* であるという。$x \in X$ の**固定化群** *(fixator, stabilizer, isotropy subgroup)* を

$$G_x = \mathrm{Stab}(x, G) := \{g \in G \mid g.x = x\}$$

と定めれば、これは G の部分群で全単射

$$u_x : G/G_x \ni gG_x \overset{\sim}{\longmapsto} g.x \in X$$

がある。逆に $H \subset G$ を部分群とするとき、$X = G/H$ は G 作用

$$\mu : G \times G/H \ni (g, xH) \longmapsto gxH \in G/H$$

に関して G 等質空間になる。また「基点」$x \in X$ を $x' = h.x$, $(h \in G)$ で置き換えると、

$$G_{x'} = \{g \in G \mid gh.x = h.x\} = \mathrm{Ad}(h)G_x$$

であるから、

$$\begin{array}{ccc} G/G_x & \xrightarrow{u_x} & X \\ {\scriptstyle \mathrm{Ad}(h)}\big\downarrow & & \Big\| \\ G/G_{x'} & \xrightarrow{u_{x'}} & X \end{array}$$

は可換である。

最後に各 $x \in X$ に対して $G_x = \{1\}$ のとき、G の X への作用は**単純** *(simple)* または**忠実** *(faithful)* であるという。G 等質空間 X への G 作用がさらに忠実なときには $G \xrightarrow{\sim} X$(全単射) だが、このとき X は G **主等質空間** *(principal G-homogeneous space, G-torsor)* であるという。

例 1.1.2. 例 1.1.1 の 3 つの作用を考える。
(1) $\mathfrak{S}_n$ の $\{1, 2, \ldots, n\}$ への作用は明らかに推移的。各 i の固定化群は $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ の置換たちの群だから、$\mathfrak{S}_{n-1}$ に同型である。
(2) 随伴作用についての G 内の G 軌道は**共役類**に他ならない。単位元はそれ一つだけで軌道をなすから、随伴作用が推移的になるのは G が単位群のときだけである。一方で定義から、G 内の勝手な共役類 C は G 等質空間である。$x \in C$ に対して G_x は**中心化群** *(centralizer)*$G_x = \mathrm{Cent}(x, G) := \{g \in G \mid gx = xg\}$ に等しい。
(3) $\mathbb{C}^2$ 内の $G' = SL(2, \mathbb{C})$ 軌道は $\{0\}$ と $Y := \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ の二つ。$\{0\}$ への作用はもちろん自明だから、Y の方を考えよう。例えば、$v_\infty := \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \in Y$ とすれば、

$$U = G'_{v_\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{C} \right\}$$

だから、$Y \simeq G'/U$ である。具体的には

$$G'/U \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} U \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \in Y$$

である。さらに

$$T' = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{C}^\times \right\}$$

は v_∞ に定数倍で作用するから、$B' = T'U$ を G' の上三角な元からなる部分群として、

$$G'/B' \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} U \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \bmod \mathbb{C}^\times \in Y/\mathbb{C}^\times = \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$$

がわかる。複素射影直線 $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ を Riemann 球面 $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と

$$\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{x}{y} \in S$$

と同一視すれば、v_∞ の像は ∞ である。

上半平面　上の例 (3) をさらに考えよう。v_∞ の代わりに

$$v_i = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = hv_\infty \in Y, \quad h := \begin{pmatrix} i & -1/2 \\ 1 & -i/2 \end{pmatrix}$$

を基点に取ると、

$$V^- := G'_{v_i} = \mathrm{Ad}(h)U = \left\{ \begin{pmatrix} 1+x & -xi \\ -xi & 1-x \end{pmatrix} \middle|\, x \in \mathbb{C} \right\}.$$

また、

$$L := \mathrm{Ad}(h)T' = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a+a^{-1}}{2} & \frac{a-a^{-1}}{2}i \\ \frac{-a+a^{-1}}{2}i & \frac{a+a^{-1}}{2} \end{pmatrix} \middle|\, a \in \mathbb{C}^\times \right\}$$

として $Q := LV^-$ と書けば、

$$G'/Q \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} Q \overset{\sim}{\longmapsto} \begin{pmatrix} ai+b \\ ci+d \end{pmatrix} \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \tag{1.1}$$

が得られる。これらの部分群と $G'(\mathbb{R}) := SL(2,\mathbb{R})$ との交わりを取れば、$V^- \cap SL(2,\mathbb{R}) = \{1\}$ および

$$\begin{aligned} L(\mathbb{R}) :=& L \cap SL(2,\mathbb{R}) = \mathbf{K}'_\infty \\ :=& \left\{ k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle|\, 0 \le \theta < 2\pi \right\} \quad (= SO(2,\mathbb{R})) \end{aligned}$$

がわかる。さらに $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G'(\mathbb{R})$ のとき、

$$g \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = (-ci+d)^{-1} \begin{pmatrix} (ac+bd) + (ad-bc=1)i \\ c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

である。かくして上半平面 $\{z = x+yi \in \mathbb{C} \,|\, y > 0\} \subset S$ を $\mathfrak{H}$ と書くとき、(実は解析同相の埋め込みの) 図式

$$\begin{array}{ccc} G'/Q & \xrightarrow{\ \sim\ } & \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) = S \\ \cup\Big\uparrow & & \Big\uparrow\cup \\ G'(\mathbb{R})/\mathbf{K}'_\infty & \xrightarrow{\ \sim\ } & \mathfrak{H} \end{array} \tag{1.2}$$

が得られる (上半平面の *Borel* **埋め込み**)。

コンパクト化　複素解析で学んだように、

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

（による一次分数変換）は上半平面から開円盤 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} < 1\}$ への解析同相を与える。Borel 埋め込みの像の閉包 $\bar{\mathfrak{H}}$ はこれにより、$\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} \leq 1\}$ に移されるからコンパクトである。$\bar{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} \cup (\mathbb{R} \cup \infty)$ に注意せよ。

1.2　Riemann 面

保型形式は $\bar{\mathfrak{H}}$ を $SL(2, \mathbb{R})$ の離散部分群で割って得られる空間上の正則ないしは有理型の微分形式である。正則関数の概念を定義するためにその空間を Riemann 面と見ることが必要である。

Riemann 面　連結な Hausdorff 位相空間 X の *(***複素***)* **座標近傍系** $\mathcal{U} = (U_i, z_i)_{i \in I}$ とは

- 開被覆 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$
- 各 U_i から $\mathbb{C}$ の開部分集合への同相写像 $z_i : U_i \to \mathbb{C}$

であって、整合条件：「任意の $i,\ j \in I$ に対して

$$z_j(U_i \cap U_j) \xrightarrow{z_j^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{z_i} z_i(U_i \cap U_j)$$

が正則かつ至る所で微分が消えていない。」を満たしているものをいう。二つの座標近傍系 $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ が**同値**とは、それらの合併が再び座標近傍系であること、すなわち上の整合条件を満たすこととする。X の座標近傍系の同値類を X 上の**複素構造** *(complex structure)* と呼ぶ。*Riemann* **面**とは連結 Hausdorff 位相空間 X とその上の複素構造の対のことであった。整合条件はどこでも同値な正則函数の概念が定義されることを保証している。もちろん局所的に $\mathbb{C}$ の開部分集合とその上の正則函数の層であるような環付き空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ だと思ってもよい。いずれにせよ、空間だけでなくその上の函数のデータも備えている点が重要である。

問 1.1. 上で定義した複素座標近傍系の同値は同値関係であることを示せ。（推移律が問題だが、それは正則函数の合成が再び正則であることから従う。）

Riemann 面 X 上の函数 $f : X \to \mathbb{C}$ が**正則**とは、X の座標近傍系 $\mathcal{U} = (U_i, z_i)_{i \in I}$ に対して、

$$z_i(U_i) \xrightarrow{z_i^{-1}} U_i \xrightarrow{f} \mathbb{C}, \quad \forall i \in I$$

が正則なこととする。同様に Riemann 面の間の正則写像も定義できる。特に、Riemann 面の間の同相写像 $f : X \to Y$ が双正則であるとき、これを X と Y の間の**解析同型**という。

例 1.2.1. (1) 複素解析で学んだように、複素射影直線 $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ は Riemann 面である。実はこれは２次元球面 S のただ一つの複素構造の解析同型類である。
(2) $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ の時、$X = \mathbb{C}/\Lambda(\omega)$, $\Lambda(\omega) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ は Riemann 面である。後でみるように、$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の複素構造の解析同型類は $SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ と一対一に対応する。これは、任意の２次元位相多様体上の可微分構造が一意であること [Mun60] と好対照である。

$U \subset \mathbb{C}$ を開部分集合とするとき、その上の任意の１次微分形式 ω はある有理型函数 $f : U \to \mathbb{C}$ を使って $\omega = f(z)dz$ と書けていた。特に有理型函数 f に対しては微分形式 $df = \frac{df}{dz}(z)dz$ が定まる。X 上の**微分形式** *(differential form)* とは、ある座標近傍系 $\mathcal{U} = (U_i, z_i)_{i\in I}$ に対する $z_i(U_i)$ 上の微分形式 $f_i(z)dz$ たちの族であって、整合条件：

$$f_j(z)dz = f_i(z_i \circ z_j^{-1}(z)) \cdot d(z_i \circ z_j^{-1})(z), \quad \forall z \in z_j(U_i \cap U_j)$$

が任意の $i, j \in I$ に対して成り立つものである。

複素解析の復習　コンパクト Riemann 面上の複素解析は明快であった。その要点を思い出しておこう。X をコンパクト Riemann 面とする。

(i) X 上至る所で正則な函数は定数函数のみ。定数函数でない正則函数は開写像だからこれは明らかである。

(ii) X 上の微分形式 ω の全ての極での留数の和は 0 である。実際、解析同相写像は等角写像だから座標近傍系を用いて X は向き付け可能なことがわかる。X の、辺が ω の極を通らず、各面がたかだか一つの ω の極を含むような有限三角形分割に、留数定理を適用すればよい。

(iii) 特に df/f を考えて、X 上の有理型函数 f の極の位数の和は零点の位数の和に等しい。

(iv) 上から、定数でない有理型函数 $f : X \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ に対して、$n \in \mathbb{N}$ があって、任意の $z \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ に対して $f^{-1}(z)$ は重複度込みで数えて n 点からなる。n を f の**被覆次数** *(valence)* という。重複を無視して数えて $|f^{-1}(z)| < n$ となる $f^{-1}(z) \subset X$ の各点 x を f の**分岐点** *(ramification point)* と呼び、x の $f^{-1}(z)$ での重複度 e_x をその**分岐指数** *(ramification index)* という。

Riemann 面の有理型函数体　明らかに Riemann 面 X 上の有理型函数とは X から $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ への正則写像のことである。それらの全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $K(X)$ は体をなすことに注意する。上の (i) から

(v) $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ 上の有理型函数は有理函数のみである。すなわち $K(\mathbf{P}^1(\mathbb{C})) = \mathbb{C}(z)$ である。

ここで次の事実を引用する。証明についてはたとえば [Gun62, 定理 12] を見よ。

事実 1.2.2 (基本存在定理). コンパクト Riemann 面 X の２点 $x, y \in X$ に対して、$f(x) \neq f(y)$ となる X 上の有理型函数 f が存在する。

定理 1.2.3. コンパクト Riemann 面 X 上の有理型函数の全体 $K(X)$ は $\mathbb{C}$ 上の１変数代数函数体（超越次数１の有限生成拡大体）である。

証明. 定数でない $f \in K(X)$ を取り、その被覆次数を n としよう。f の分岐点でない $x \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ の近傍 U 上では有理型な局所切断 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : U \to X$ で

$$f(\varphi_i(z)) = z, \quad \varphi_i(z) \neq \varphi_j(z), \qquad 1 \leq \forall i \neq j \leq n, \forall z \in U$$

をみたすものがある。また基本対称式 $S_k(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, $(1 \leq k \leq n)$ とは

$$\prod_{i=1}^{n} (T - x_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i S_i(x_1, \ldots, x_n) T^{n-i}$$

で定まる多項式のことだった。

さて、勝手な $g \in K(X)$ を取る。$g(\varphi_i(z))$ たちはその限りではないが、それらと基本対称式との合成 $s_k(z) := S_k(g \circ \varphi_1(z)), \ldots, g \circ \varphi_n(z))$ たちは $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ 上の定義可能な有理型函数、よって (v) から、有理函数 $s_k(z) \in \mathbb{C}(z)$ を定める。ところが構成から、f の分岐点でない $x \in X$ では

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i s_i(f(x)) g(x)^{n-i} = \prod_{i=1}^{n} (g(x) - g(\varphi_i \circ f(x))) = 0$$

が成り立っている。これは $K(X)$ 内の等式であるから、$\mathbb{C}(f, g)$ は $\mathbb{C}(f)$ 上高々n 次の代数拡大である。$[\mathbb{C}(f, g) : \mathbb{C}(f)]$ が最大となる g を取れば、$K(X) = \mathbb{C}(f, g)$ は容易に従う。 □

注意 1.2.4. 実は上の証明の最後で $g(\varphi_i(z))$, $(1 \leq i \leq n)$ たちが全て異なっていることを使えば、$n = [K(X) : \mathbb{C}(f)]$ もわかる。

Riemann-Roch の定理　保型形式の定義には必要ないが、Riemann-Roch の定理を用意しておこう。これは与えられた極と零点を持つ有理型函数の次元に関する定理で、我々は後にこれを使って保型形式の次元を計算する。

コンパクト Riemann 面 X 上の *(Weil)* **因子** *(Weil divisor)* D とは、X の点たちの形式的な有限 $\mathbb{Z}$ 係数線型結合

$$D = \sum_{i=1}^{r} n_i x_i, \quad n_i \in \mathbb{Z},\, x_i \in X$$

のことだった。これらのなす自由アーベル群を $\mathrm{Div}(X)$ と書く。$n_i \geq 0$, $(1 \leq i \leq r)$ のとき、因子 D は**効果的** *(effective)* であるという。$f \in K(X)^\times$ の $z \in X$ での（零点の）位数を $\mathrm{ord}_z(f)$ とするとき、

$$\mathrm{div} : K(X)^\times \ni f \longmapsto \sum_{z \in X} \mathrm{ord}_z(f) z \in \mathrm{Div}(X)$$

は定義可能である。$\mathrm{div}(K(X)^\times)$ の元を**主因子** *(principal divisor)* と呼び、$D, D' \in \mathrm{Div}(X)$ が $D - D' \in \mathrm{div}(K(X)^\times)$ のときそれらは**線型同値** *(linearly equivalent)* であるという。因子の線型同値類たちの群 $\mathrm{Cl}(X) := \mathrm{Div}(X)/\mathrm{div}(K(X)^\times)$ を X の**因子類群** *(divisor class group)* という。次数を取る写像

$$\deg : \mathrm{Div}(X) \ni \sum_{i=1}^{r} n_i x_i \longmapsto \sum_{i=1}^{r} n_i \in \mathbb{Z}$$

は前段の (ii) から準同型 $\deg : \mathrm{Cl}(X) \to \mathbb{Z}$ を定める。

注意 1.2.5 (Cartier 因子). コンパクト Riemann 面 X 上の正則函数の層を $\mathscr{O}_X$、有理型函数の層を $\mathscr{K}_X$ で表す。X 上の因子の層を商層 $\mathscr{D}_X := \mathscr{K}_X^\times/\mathscr{O}_X^\times$ と定義する。この $\mathscr{D}_X$ の大域切断を *Cartier* **因子**と呼ぶ。コンパクト Riemann 面ではこの概念は Weil 因子に同値である。Cartier 因子の群を $\Gamma(X, \mathscr{D}_X)$ と書く。前段の (i) から $\mathscr{O}_X^\times$ の大域切断の群は $\mathbb{C}^\times$ であり、$\mathscr{K}_X^\times$ のそれは $K(X)^\times$ に他ならない。よって

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X^\times \longrightarrow \mathscr{K}_X^\times \longrightarrow \mathscr{D}_X \longrightarrow 0$$

は長完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow & K(X)^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} \Gamma(X, \mathscr{D}_X) \\ & \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X^\times) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{K}_X^\times) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{D}_X) = 0 \end{aligned}$$

を与える。ただし、$\mathscr{D}_X$ の切断は離散群 $\mathbb{Z}$ に値を持つため、$\mathrm{H}^q(X, \mathscr{D}_X) = 0$, $q \geq 1$ となることを使った。また事実 1.2.2 は $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{K}_X^\times) = 0$ に同値だから、結局

$$\mathrm{Cl}(X) \simeq \Gamma(X, \mathscr{D}_X)/\mathrm{div}(K(X)^\times) \simeq \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X^\times)$$

がわかる。最後の群は X 上の線束の同型類の群である。

X 上の微分形式 ω の $x \in X$ での位数を、その座標近傍 (U, z) での記述 $f(z)dz$ を使って、$\mathrm{ord}_x(\omega) := \mathrm{ord}_{z(x)}(f)$ と定める。これは座標近傍系の整合条件から (U, z) の取り方によらない。X 上の微分形式の全体は $K(X)$ 上の１次元ベクトル空間だから、

$$K = \mathrm{div}(\omega) := \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(\omega) x$$

の線型同値類は ω の取り方によらない。これを X の**標準類** *(canonical class)* という。

$D \in \mathrm{Div}(X)$ に対して、

$$L(D) := \{ f \in K(X) \mid \mathrm{div}(f) + D \text{ は効果的} \} \cup \{0\}$$

とおく。$\deg D \geq 0$ でなければこれは $\{0\}$ で、前段の (i) から一般に有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間である。$\ell(D) := \dim_{\mathbb{C}} L(D)$ は明らかに D の線型同値類のみによる。

注意 1.2.6. $D \in \mathrm{Div}(X)$ に対して、注意 1.2.5 の同型による $\mathrm{div}(D)$ の像を $\mathscr{L}_D \in \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X^\times)$ と書けば、$L(D)$ は $\Gamma(X, \mathscr{L}_D)$, $\ell(D)$ はその次元に他ならない。

定理 1.2.7 (Riemann-Roch の定理). X の**種数** *(genus)* と呼ばれる X のみによる $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって、任意の $D \in \mathrm{Div}(X)$ に対して

$$\ell(D) = \deg(D) + 1 - g + \ell(K - D)$$

が成り立つ。

証明は例えば、[Gun62, § 7] を参照。X の種数 g は位相幾何で出てくる種数、すなわち X が g 人乗りの浮き輪であることを表す数である。(幾何学 A で習った知識で確かめられる。)

$$\mathrm{H}_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad \mathrm{H}_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}, \quad \mathrm{H}_2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

ちなみに genus の複数形は genera である。以下ここではこの定理について基本的な考察をしておく。

系 1.2.8. $\deg(K) = 2g - 2$, $\ell(K) = g$.

証明. 定理で $D = 0$ とすれば、

$$1 = 0 + 1 - g + \ell(K)$$

となって $\ell(K) = g$ がわかる。次に $D = K$ として、

$$g = \deg(K) + 1 - g + 1$$

から $\deg(K) = 2g - 2$ を得る。 □

一般に $\ell(K - D)$ を計算するのは難しいが、$L(D)$ の定義の後のコメントから $\deg(D) > 2g - 2$ の場合にはこれが 0 となって問題はない。

系 1.2.9. $\deg(D) > 2g - 2$ のとき、

$$\ell(D) = \deg(D) + 1 - g.$$

系 1.2.10 (Riemann-Hurwitz の公式). $f : X \to Y$ をコンパクト Riemann 面の n 次被覆（定数でない整型写像で被覆次数が n のもの）とする。$\Xi \subset X$ を f の分岐点の集合とするとき、

$$\chi(X) = n\chi(Y) + \sum_{x \in \Xi} (1 - e_x).$$

ここで $\chi(X) = 2 - 2g(X) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim \mathrm{H}_i(X, \mathbb{Q})$ は X の *Euler* **標数**である。

証明. Y 上の微分形式 ω で $f(\Xi)$ で極も零点も持たないものを取り、引き戻し $f^*\omega$ を考える。$x\in\Xi$ の座標近傍 (U,z) で $z(x)=0$ なるものを取れば、そこで

$$f(z^{-1}(t))=t^{e_x}f_1(t),\quad f_1(0)\neq 0.$$

$f(U)\subset Y$ に含まれる $f(x)$ の座標近傍 (V,w) 上で、$\omega=g(w)dw$ と書ける。このとき、$f^{-1}(V)\cap U$ 上で

$$f^*\omega(z^{-1}(t))=g(f(z^{-1}(t)))df(z^{-1}(t))=g(f(z^{-1}(t)))e_xt^{e_x-1}(f_1(t)-e_x^{-1}tf_1'(t))$$

ゆえ、$\mathrm{ord}_x(f^*\omega)=e_x-1$ である。従って

$$\deg(f^*\omega)=n\deg(\omega)+\sum_{x\in\Xi}(e_x-1)=n(2g(Y)-2)+\sum_{x\in\Xi}(e_x-1)$$

を得る。これに定理 1.2.7 を適用すれば

$$g(X)=\ell(f^*\omega)=n(2g(Y)-2)+\sum_{x\in\Xi}(e_x-1)+1-g(X)+1$$

となって主張が従う。 □

1.3 Riemann 面 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$

1.3.1 位相空間としての $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$

まず離散群の作用について復習しよう。抽象群 Γ の位相空間 X への作用が**不連続** *(discontinuous)* とは、Γ 内の相異なる元たちからなる任意の無限列 $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $x\in X$ に対して $\{\gamma_n.x\}_{n\in\mathbb{N}}$ が集積しないことだった。さらにそのような作用が**完全不連続** *(properly discontinuous)* とは、任意の $x,\,y\in X$ の近傍 $U,\,V$ で $\sharp\{\gamma\in\Gamma\,|\,\gamma.U\cap V\neq\emptyset\}$ が有限であるものが存在することであった。

§ 1.1 の状況 $\mathfrak{H}\xrightarrow{\sim}G'(\mathbb{R})/\mathbf{K}'_\infty$ を思い出そう。$G'(\mathbb{R})$ は $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^4$ の部分集合としての位相を持ち、それについて局所コンパクト (Hausdorff) 位相群になる。部分群 $\Gamma\subset G'(\mathbb{R})$ でこの位相に関して離散位相空間になるものを $G'(\mathbb{R})$ の**離散部分群** *(discrete subgroup)* という。$\Gamma\subset G'(\mathbb{R})$ を離散部分群とし、$p:\mathfrak{H}\twoheadrightarrow\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ を自然な射影とする。$U\subset\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ で $p^{-1}(U)\subset\mathfrak{H}$ が開部分集合であるものを $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ の開部分集合とすることにより、$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ に位相を定める。

補題 1.3.1. $\Gamma\in G'(\mathbb{R})$ について次の条件は同値。

(i) Γ は離散部分群。

(ii) Γ は $\mathfrak{H}$ に完全不連続に作用する。

(iii) $\mathfrak{H}$ の任意のコンパクト部分集合 $C,\,C'$ に対して、$\{\gamma\in\Gamma\,|\,\gamma.C\cap C'\neq\emptyset\}$ は有限集合。

証明. (i) ⇒ (iii) 連続射影 $G'(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow G'(\mathbb{R})/\mathbf{K}'_\infty \xrightarrow{\sim} \mathfrak{H}$ を π と書けば、$\pi^{-1}(C)$, $\pi^{-1}(C') \subset G'(\mathbb{R})$ はコンパクトである。$\gamma \in \Gamma$ が $\gamma.C \cap C' \neq \emptyset$ を満たせば、$\gamma\pi^{-1}(C) \cap \pi^{-1}(C') \neq \emptyset$ だから $\gamma \in \pi^{-1}(C')\pi^{-1}(C)^{-1} \cap \Gamma$ である。この最後の部分集合はコンパクトかつ離散的だから有限集合。

(iii) ⇒ (ii) は自明。

(ii) ⇒ (iii) コンパクト部分集合 $C, C' \subset \mathfrak{H}$ を $z \in C$, $w \in C'$ に対する (ii) の近傍たちで被覆せよ (下の問)。

(iii) ⇒ (i) $V \subset G'(\mathbb{R})$ を 1 の相対コンパクト近傍とする。$z \in \mathfrak{H}$ に対して、$\{z\}$, $\bar{V}.z \subset \mathfrak{H}$ はともにコンパクトだから、(iii) から

$$\Gamma \cap V \subset \{\gamma \in \Gamma \,|\, \gamma.z \in \bar{V}.z\}$$

は有限集合である。つまり、1 は Γ 内で孤立しているから Γ は離散的。 □

問 1.2. 上の (ii) ⇒ (iii) を証明せよ。

系 1.3.2. $\Gamma \subset G'(\mathbb{R})$ が離散部分群だとする。
(i) $z \in \mathfrak{H}$ の近傍 U で次を満たすものがある。「$\gamma.U \cap U \neq \emptyset$ ならば、$\gamma \in \Gamma_z$。」
(ii) $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ は Hausdorff 位相空間。

証明. (i) $z \in \mathfrak{H}$ の相対コンパクト近傍 V を取れば、補題 1.3.1 (iii) から $\gamma.V \cap V \neq \emptyset$ となる $\gamma \in \Gamma$ の集合 Ξ は有限である。明らかに $\Xi \cdot \Gamma_z = \Xi$ だから、有限剰余類分解

$$\Xi = \coprod_{i=0}^{r} \gamma_i \Gamma_z, \quad \gamma_0 = 1$$

を得る。$1 \leq i \leq r$ に対しては $z \neq \gamma_i.z$ だから ($\mathfrak{H}$ が Hausdorff なことから) 近傍 $U_i \ni z$, $V_i \ni \gamma_i.z$ で $U_i \cap V_i = \emptyset$ なるものがある。そこで

$$U := V \cap \bigcap_{i=1}^{r} U_i \cap \gamma_i^{-1}.V_i$$

とおけば、これは z の近傍で系の主張を満たす。

(ii) 同一の Γ 軌道に属さない z, $z' \in \mathfrak{H}$ を取る。C, C' をおのおの z, z' の相対コンパクト近傍とすれば、補題 1.3.1 (iii) から有限部分集合 $\{\gamma_i\}_{1\leq i\leq r} \subset \Gamma$ で

$$\gamma.\bar{C} \cap \bar{C}' = \emptyset, \quad \forall\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_i\}_{1\leq i\leq r}$$

となるものがある。γ_i たちに対しても $\gamma_i.z \neq z'$ だから、$\gamma_i.z$ と z' おのおのの近傍 U_i, V_i で、$U_i \cap V_i \neq \emptyset$ となるものが取れる。そこで

$$U := C \cap \bigcap_{i=1}^{r} \gamma_i^{-1}.U_i, \quad V := C' \cap \bigcap_{i=1}^{r} V_i$$

とおけば、これらはそれぞれ z, z' の近傍で

$$\gamma.U \cap \gamma'.V = \emptyset, \quad \forall\gamma, \gamma' \in \Gamma$$

を満たす。よって $p(z) \neq p(z') \in \Gamma\backslash\mathfrak{H}$ の近傍 $p(U)$, $p(V)$ で、$p(U) \cap p(V) = \emptyset$ を満たすものが得られた。 □

1.3.2 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上の複素構造

$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ に Riemann 面の構造、すなわち複素構造を入れよう。我々の出発点は次の補題である。$G'(\mathbb{R})$ の中心 $Z_{G'}(\mathbb{R}) = \{\pm\mathbf{1}_2\}$ は $\mathfrak{H}$ に自明に作用している。そこで $G'(\mathbb{R})$ の代わりに $G'(\mathbb{R})_{\mathrm{ad}} := G'(\mathbb{R})/Z_{G'}(\mathbb{R})$ の $\mathfrak{H}$ への作用を考えることができる。特に離散部分群 Γ を必要なら $Z_{G'}(\mathbb{R})\Gamma$ で置き換えて、$Z_{G'}(\mathbb{R}) \subset \Gamma$ であるとしてよい。部分集合 $S \subset G'(\mathbb{R})$ の射影 $G'(\mathbb{R}) \ni g \mapsto gZ_{G'}(\mathbb{R}) \in G'(\mathbb{R})_{\mathrm{ad}}$ による像を S_{ad} と書く。

補題 1.3.3. $\Gamma \subset G'(\mathbb{R})$ を離散部分群とする。Γ_{ad} の $\mathfrak{H}$ への作用が忠実ならば、$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ はただ一つの複素構造を持つ。

証明. $x \in \Gamma\backslash\mathfrak{H}$ を取る。系 1.3.2 (i) から $z \in p^{-1}(x)$ の近傍 U で、$\gamma.U \cap U = \emptyset$, $(\forall\gamma \neq \pm\mathbf{1}_2, \in \Gamma)$ なるものがある。$p|_U : U \to p(U)$ は同相であることに注意して、x の座標近傍を

$$(U_x, \varphi_x) := (p(U), p^{-1} : p(U) \xrightarrow{\sim} U \subset \mathbb{C})$$

と定める。$(U_x, \varphi_x)_{x\in\Gamma\backslash\mathfrak{H}}$ が定義可能な座標近傍系を定めることは明らかである。 □

複素構造は局所的なものであるから、この構成は Γ_{ad} が $\mathfrak{H}$ に忠実に作用していない場合でも、$\Gamma_z = \{\pm\mathbf{1}_2\}$ となる $x = p(z)$ の近傍には適用可能である。それ以外の $x \in \Gamma\backslash\mathfrak{H}$ を扱うために、$z \in \mathfrak{H}$ の固定化群 Γ_z を考察しよう。

$G'(\mathbb{R})$ 内の共役類と１次分数変換の分類　高校で学んだように $G'(\mathbb{R})$ 内の共役類には次の３タイプがあった。

楕円共役類 $g \in G'(\mathbb{R})$ の特性多項式が実根を持たないとき、g の共役類は**楕円的** *(elliptic)* であるという。楕円共役類たちの代表系は

$$k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad 0 < \theta < \pi \text{ または } \pi < \theta < 2\pi$$

で与えられる。$k(\theta)$ は $\pm i$ を固定する。同様に楕円的な g の 1 次分数変換は上半平面 $\mathfrak{H}$ と下半平面 $\mathfrak{H}^-$ に一つずつ固定点を持つ。

双曲共役類 $g \in G'(\mathbb{R})$ の特性多項式が異なる 2 実根を持つとき、その共役類は**双曲的** *(hyperbolic)* であるという。双曲共役類たちの代表系は

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^\times,\ |a| > 1$$

で与えられる。$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ は $0,\ \infty$ を固定する。同様に双曲的な g の 1 次分数変換は $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に 2 つの固定点を持つ。

放物型共役類 $g \in G'(\mathbb{R})$ の特性多項式が重根を持つとき、その共役類は**放物型** *(parabolic)* であるという。放物型共役類の代表系は

$$\pm\mathbf{1}_2, \quad \pm\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。$\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ は ∞ のみを固定する。同様に $Z_{G'}(\mathbb{R})$ に属さない放物型の元 g は $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ にただ 1 つの固定点を持つ。

固定点での複素構造　$\Gamma_z = \{\pm\mathbf{1}_2\}$ である $z \in \mathfrak{H}$ を（用語を転用して）Γ の**固定点**と呼ぶ。Γ の固定点 $z \in \mathfrak{H}$ に対して、$z = g.i$ となる $g \in G'(\mathbb{R})$ を取れば

$$G'(\mathbb{R})_z = \mathrm{Ad}(g)G'(\mathbb{R})_i = \mathrm{Ad}(g)\mathbf{K}'_\infty$$

であるから、$\Gamma_z = \Gamma \cap \mathrm{Ad}(g)\mathbf{K}'_\infty$ は楕円的な元からなる偶数次巡回群。その位数を 2ℓ と書こう。

$$\mathrm{Ad}(g^{-1})\Gamma_z = \{k(m\pi/\ell) \,|\, 0 \leq m \leq 2\ell - 1\}.$$

$\delta := \mathrm{Ad}(g)k(\pi/\ell) \in \Gamma_z$ を取れば、δ の固定点は z と $\bar{z}$ で、定数倍を除いて

$$\begin{aligned}
\delta^m \begin{pmatrix} -\bar{z} & z \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= gk(m\pi/\ell)g^{-1} \cdot g \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= g \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{2\ell}^m & 0 \\ 0 & \zeta_{2\ell}^{-m} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\bar{z} & z \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{2\ell}^m & 0 \\ 0 & \zeta_{2\ell}^{-m} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である。ただし、$\zeta_{2\ell} := e^{\pi i/\ell}$ と書いている。よって定数倍を除いて

$$\begin{pmatrix} 1 & -z \\ 1 & -\bar{z} \end{pmatrix} \delta^m = \begin{pmatrix} \zeta_{2\ell}^m & 0 \\ 0 & \zeta_{2\ell}^{-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z \\ 1 & -\bar{z} \end{pmatrix}$$

だから、これを $w \in \mathfrak{H}$ に作用させて

$$\frac{\delta^m.w - z}{\delta^m.w - \bar{z}} = e^{2m\pi i/\ell}\frac{w - z}{w - \bar{z}}, \quad m \in \mathbb{Z},\, w \in \mathfrak{H} \tag{1.3}$$

を得る。そこで、系 1.3.2 (i) により $\gamma.U_z \cap U_z = \emptyset,\ (\forall\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_z)$ となる U_z を取って、$x = p(z)$ の座標近傍を

$$\left(U_x := p(U_z), \varphi_x : U_x \ni p(w) \mapsto \left(\frac{w - z}{w - \bar{z}}\right)^\ell \in \mathbb{C}\right)$$

と定める。

1.3.3 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ 上の複素構造

岩澤分解と不変測度 1.1 節で得た全単射

$$G'(\mathbb{R})/\mathbf{K}'_\infty \ni g\mathbf{K}'_\infty \overset{\sim}{\longmapsto} g.i \in \mathfrak{H} \tag{1.4}$$

を思い出す。これは

$$B'(\mathbb{R})_+ := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a \in \mathbb{R}_+^\times \\ b \in \mathbb{R} \end{array} \right\} = U(\mathbb{R})T'(\mathbb{R})_+ \subset B'(\mathbb{R})$$
$$T'(\mathbb{R})_+ := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}_+^\times \right\}$$

からの全単射

$$B'(\mathbb{R})_+ \ni \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \longmapsto x + yi \in \mathfrak{H}$$

で与えられることに注意すれば、**岩澤分解**

$$G'(\mathbb{R}) = B'(\mathbb{R})_+\mathbf{K}'_\infty = U(\mathbb{R})T'(\mathbb{R})_+\mathbf{K}'_\infty \tag{1.5}$$

および、(1.4) が実は解析同相であることがわかる。

$G'(\mathbb{R})$ は局所コンパクト位相群だから $\mathbb{R}_+^\times$ 倍を除いてただ一つの左不変測度を持つ。岩澤分解を使って

$$g = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} k(\theta), \quad b \in \mathbb{R},\, a \in \mathbb{R}^\times,\, 0 \le \theta < 2\pi$$

と書けば、

$$d\mu_{G'(\mathbb{R})}(g) = 2a^{-2}db\,da^\times \frac{d\theta}{2\pi}$$

がその不変測度である。ただし、db は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度、$da^\times = da/a$ は $\mathbb{R}^\times$ 上の不変測度、$d\theta/2\pi$ は $\mathbf{K}'_\infty$ の測度が 1 となる $\mathbf{K}'_\infty$ 上の測度である。これと $\mathbf{K}'_\infty$ 上の測度 $d\theta/2\pi$ から商空間 $\mathfrak{H} = G'(\mathbb{R})/\mathbf{K}'_\infty$ 上の $G'(\mathbb{R})$ 不変測度

$$d\mu_{\mathfrak{H}}(x + yi) = 2y^{-1}dx\,d(y^{1/2})^\times = \frac{dx\,dy}{y^2} \tag{1.6}$$

が得られる。

歴史的に $G'(\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群を *Fuchs* **群**という。Fuchs 群 $\Gamma \subset G'(\mathbb{R})$ には各点の測度を 1 とする測度を入れるものとする。商空間 $\Gamma\backslash G'(\mathbb{R})$ にも

$$\int_{G'(\mathbb{R})} f(g)\,d\mu_{G'}(g) = \int_{\Gamma\backslash G'(\mathbb{R})} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma x)\,d\mu_{\Gamma\backslash G'(\mathbb{R})}(x), \quad \forall f \in C_c(G'(\mathbb{R}))$$

なる右 $G'(\mathbb{R})$ 不変測度 $\mu_{\Gamma\backslash G'(\mathbb{R})}$ が定まる。これに関する全測度 $\mu_{\Gamma\backslash G'(\mathbb{R})}(\Gamma\backslash G'(\mathbb{R}))$ が有限のとき、Γ は**第 1 種** *Fuchs* **群** *(Fuchsian group of the first kind)* と呼ばれる。

基本領域とカスプ　連結な開部分集合 $\Omega \subset \mathfrak{H}$ が Fuchs 群 $\Gamma \subset G'(\mathbb{R})$ の**基本領域** *(fundamental domain)* であるとは、

(i) $\mathfrak{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma.\overline{\Omega}$.

(ii) $\Omega \cap \gamma.\Omega = \emptyset$, $\forall \gamma \neq \pm \mathbf{1}_2$.

なることとする。実際に与えられた Fuchs 群 Γ に対して基本領域を構成するには、$\mathfrak{H}$ 上の $G'(\mathbb{R})$ 不変計量を使う。

$$\frac{d(g.z)}{dz} = \frac{a}{cz+d} - \frac{c(az+b)}{(cz+d)^2} = (cz+d)^{-2}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G'(\mathbb{R})$$

であるから、$d(g.z)(g.\bar{z}) = |cz+d|^{-4} dz\bar{z}$ である。$z = x+yi$ として $\Im(g.z) = |cz+d|^{-2}y$ だから

$$ds^2(z) = \frac{dz\bar{z}}{y^2}$$

が $\mathfrak{H}$ 上の $G'(\mathbb{R})$ 不変 Riemann 計量である。この Riemann 計量について $\mathfrak{H}$ を Riemann 多様体と見たものは、非 Euclid 幾何の最初の例である *Lobachevsky* **空間**に他ならない。この計量に関する測地線は実軸に直行する円、および実軸に直行する直線 (**広義円周**) たちである。$C : [0,1] \ni t \mapsto z(t) \in \mathfrak{H}$ を $\mathfrak{H}$ 内の連続曲線とすれば、その長さ

$$\ell(C) := \int_0^1 \sqrt{\frac{d(y(t)^{-2}z(t)\bar{z}(t))}{dt^2}}\, dt$$

が定まる。さらに、$z_1, z_2 \in \mathfrak{H}$ の間の「距離」を

$$r(z_1, z_2) := \inf_C \ell(C)$$

と定義する。ここで C は z_1 と z_2 を結ぶ連続曲線たちを走る。作り方からこの「距離」は $G'(\mathbb{R})$ 不変である。

$$r(g.z_1, g.z_2) = r(z_1, z_2), \quad \forall g \in G'(\mathbb{R}).$$

命題 1.3.4. Fuchs 群 Γ の固定点ではない $o \in \mathfrak{H}$ を取れば、

$$\Omega := \{z \in \mathfrak{H} \,|\, r(z, o) < r(z, \gamma.o),\, \forall \gamma \neq \pm \mathbf{1}_2, \in \Gamma\}$$

は Γ の基本領域である。

証明. 距離 r の定める位相は $\mathbb{C}$ の部分集合としての $\mathfrak{H}$ の位相と一致することはすぐにわかるので、Ω は明らかに連結開集合である。

$\overline{\Omega} = \{z \in \mathfrak{H} \,|\, r(z, o) \leq r(z, \gamma.o),\, \forall \gamma \in \Gamma\}$ に注意する。勝手な $z \in \mathfrak{H}$ に対して、$R > 0$ を止めれば

$$\{\gamma \in \Gamma \,|\, r(\gamma.z, o) \leq R\}$$

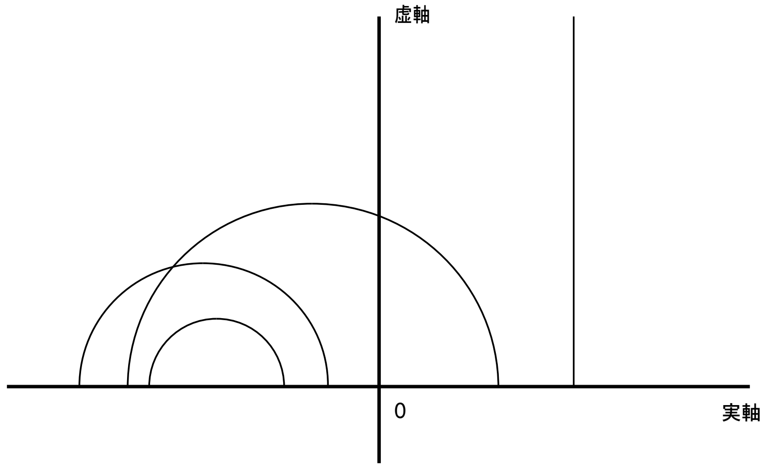

図 1.1: **Lobachevsky 空間の測地線**

は有限集合だから、$r(\delta.z,o)=\inf_{\gamma\in\Gamma} r(\gamma.z,o)$ となる $\delta\in\Gamma$ が取れる。言い換えれば、$\delta.z\in\overline{\Omega}$ なので基本領域の条件 (i) が示された。

次に $\gamma\neq\mathbf{1}_2$ に対して $\gamma.\Omega\cap\Omega$ の元 z が存在したとしよう。Ω の定義から、$r(z,o)<r(z,\gamma.o)=r(\gamma^{-1}.z,o)$ だが、$\gamma^{-1}.z\in\Omega$ でもあるから $r(\gamma^{-1}.z,o)<r(\gamma^{-1}.z,\gamma^{-1}.o)=r(z,o)$ でなければばならない。これは矛盾しているから、基本領域の条件 (ii) も示された。 □

$\overline{\Omega}$ がコンパクトならば、自然な射影の制限 $\overline{\Omega}\to\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ が全射なことから、$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ もコンパクトである。特に 1.3.2 節の構成により、$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ にはコンパクト Riemann 面の構造が入る。

次に Γ を Fuchs 群とし、$\overline{\Omega}$ がコンパクトでない場合を考える。$o=g.i$ となる $g\in G'(\mathbb{R})$ を取る。仮定から Ω 内の点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で

$$\lim_{n\to\infty} r(o,z_n)=\infty \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n\to\infty} r(i,g^{-1}.z_n)=\infty$$

となるものが取れる。$\overline{\Omega}$ は局所有限な測地線の族に囲まれた「凸多角形」だから o と z_n を結ぶ測地線分は Ω に含まれる。つまり任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $k_n\in\mathbf{K}'_\infty$ を $k_ng^{-1}.z_n\in i\mathbb{R}$ なるものとして、

$$gk_n^{-1}.(i\cdot e^t)\in\Omega,\quad 0\le t\le r(o,z_n)$$

である。$\ell(\{i\cdot e^t\,|\,0\le t\le r\})=r$ に注意せよ。$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の収束部分列を $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と置き直して、$k:=\lim_{n\to\infty}k_n$ とする。このとき（半）測地線

$$gk^{-1}.(i\cdot e^t),\quad 0\le t<\infty$$

は $\overline{\Omega}$ に含まれる。

この時点で $\underline{\Gamma\text{ が第 1 種である}}$ とする。$c:=\lim_{t\to\infty}gk^{-1}.(i\cdot e^t)=gk^{-1}.\infty\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ とおけば、例 1.1.2 から

$$\Gamma_c=\mathrm{Ad}(gk^{-1})(U(\mathbb{R})\cap\mathrm{Ad}(kg^{-1})\Gamma).$$

ここで Γ は第1種なので $kg^{-1}.\overline{\Omega}$ は測度有限でなければならないから $\Gamma_c \supsetneq \{\pm \mathbf{1}_2\}$ である。つまり

$$\Gamma_c = \mathrm{Ad}(gk^{-1}) \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & n\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \exists \lambda > 0.$$

一般に $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ の点 $c = k'.\infty$ で $\Gamma_c \neq \{\pm \mathbf{1}_2\}$ であるものを第1種 Fuchs 群 Γ の**カスプ** *(***尖点、***cusp)* という。

補題 1.3.5. 第1種 Fuchs 群 Γ のカスプの Γ 軌道は有限個しかない。

証明. 基本領域 Ω の条件 (1) から、Γ のカスプで $\overline{\Omega}$ に含まれるものが有限個であることをいえばよい。上で固定した原点 o からそのようなカスプ c へ向かう半測地線は Ω に含まれるから、Ω 内の o を出発する半測地線が有限個しかないことをいえばよい。o を出発する２つの半測地線

$$gk_1^{-1}.i \cdot e^t, \quad gk_2^{-1}.i \cdot e^t, \quad (0 \leq t < \infty)$$

$(k_1, k_2 \in \mathbf{K}'_\infty)$ がともに Ω に含まれているとする。$c_1 := k_1.\infty \in \mathbb{R} \cup \infty$ とおけば、上の議論から

$$\mathrm{Ad}(k_1 g^{-1})\Gamma_{c_1} = \big(\mathrm{Ad}(k_1 g^{-1})\Gamma\big)_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & n\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \exists \lambda > 0$$

と書ける。特に $k_1 g^{-1}.\overline{\Omega}$ は ∞ の近傍で幅が λ の帯状領域になっている。後者の測地線が Ω に含まれることから、

$$k_1 g^{-1} \cdot gk_2^{-1} i \cdot e^t = k_1 k_2^{-1} i \cdot e^t \in k_1 g_1^{-1}.\Omega, \quad \forall t > 0$$

でなければならないが、これは $k_1 k_2^{-1}$ が 1 に十分近ければ $k_1 k_2^{-1} = 1$ を意味する。言い換えれば $gk^{-1}.i \cdot e^t \in \Omega$, $(\forall t \in [0, \infty))$ となる $k \in \mathbf{K}'_\infty$ の集合は離散的だから、補題が示された。 $\square$

コンパクト Riemann 面 $\Gamma \backslash \mathfrak{H}^*$　$\Gamma \subset G'(\mathbb{R})$ を第1種 Fuchs 群とする。$\mathfrak{H}$ に Γ のカスプを付け加えた空間を $\mathfrak{H}^* \subset \overline{\mathfrak{H}}$ と書く。商空間 $\Gamma \backslash \mathfrak{H}^*$ には次のようにコンパクト Riemann 面の構造が入る。

まず、Γ のカスプ $c = gk^{-1}.\infty$ の基本近傍系を

$$B_c(T) := \{gk^{-1}.z \,|\, \Im z > T\}, \quad T > 0$$

の形の集合とすることで $\mathfrak{H}^*$ に位相を入れる。$c \in \mathbb{R}$ のときにはこれは c を中心とする広義円周の内側だから、容易にわかるように $\mathfrak{H}^*$ は Hausdorff である。これから $\Gamma \backslash \mathfrak{H}^*$ にも商位相を定める。

命題 1.3.6. 第1種 Fuchs 群 $\Gamma \subset G'(\mathbb{R})$ に対して、$\Gamma \backslash \mathfrak{H}^*$ はコンパクト Hausdorff 空間。

証明. Hausdorff であることは問いとする (下)。コンパクトであることを示すには、$\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ の代わりに命題 1.3.4 の基本領域 $\overline{\Omega}$ を使うとよい。勝手な開被覆

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$$

を取る。$\overline{\Omega}$ 内の Γ のカスプの集合 $\{c_1,\dots,c_n\}$ は有限だから、$U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}$, $(\alpha_i \in A)$ で $c_i \in U_{\alpha_i}$ となるものがある。これらは位相の定義から

$$U_{\alpha_i} \supset B_{c_i}(T_i), \quad \exists T_i > 0$$

を満たす。ところが

$$\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_{c_i}(T_i)$$

はコンパクトだから、これの有限被覆 $\{U_{\beta_i}\}_{i=1}^m$ も取れる。結局 $\overline{\Omega}$ の有限被覆

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \cup \bigcup_{i=1}^{m} U_{\beta_i}$$

が得られた。 □

問 1.3. 上で $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ が位相空間として Hausdorff であることを示せ。

カスプ $c = gk^{-1}.\infty$ での複素構造は次のように定める。$T>0$ を十分大きく取れば $B_c(T)$ は

$$\Gamma_c = \mathrm{Ad}(gk^{-1})\left\{ \pm\begin{pmatrix} 1 & n\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

の作用で不変で、

$$U_c(T) := \Gamma_c\backslash B_c(T) \overset{kg^{-1}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \left\{ z \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \,\middle|\, \begin{array}{c} -\frac{\lambda}{2} \le \Re z < \frac{\lambda}{2}, \\ \Im z > T \end{array} \right\}$$

は c の $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ での近傍である。そこで c での座標近傍を $(U_c(T), \varphi_c)$:

$$\varphi_c : U_c(T) \ni z \longmapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{2\pi i(kg^{-1}.z)}{\lambda}\right) & z \ne \infty \text{ のとき} \\ 0 & z = \infty \text{ のとき} \end{cases} \in \mathbb{C}$$

と定める。これは 1.3.2 節の構成と併せて $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ にコンパクト Riemann 面の構造を定める。

1.3.4 第１種 Fuchs 群の例

保型形式の定義をする前に、第１種 Fuchs 群の代表例をいくつか挙げておこう。

楕円モヂュラー群　明らかに

$$G'(\mathbb{Z}) = SL(2,\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{Z} \\ ad - bc = 1 \end{matrix} \right\}$$

は Fuchs 群である。これは

$$\mathtt{T} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathtt{S} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成され、その基本領域は

$$\Omega = \{ z \in \mathfrak{H} \,|\, |\Re z| < 1/2,\, |z| > 1 \} \tag{1.7}$$

で与えられる (証明は、例えば [J.-P79], [清水 92, 定理 1.15] を参照)。従って

$$\operatorname{meas}\Omega = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2}\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_{2\pi/3}^{\pi/3} -1\, d\theta = \frac{\pi}{3}$$

となって、$G'(\mathbb{Z})$ が第 1 種であることがわかる。

(i) Ω の形から $G'(\mathbb{Z})$ のカスプの $G'(\mathbb{Z})$ 軌道は $G'(\mathbb{Z}).\infty = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ のみ。

(ii) $G'(\mathbb{Z})$ の固定点は i と $\rho := (-1+\sqrt{-3})/2$ の $G'(\mathbb{Z})$ 軌道の元で、$G'(\mathbb{Z})_i = \langle S \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $G'(\mathbb{Z})_\rho = \langle ST \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

主合同部分群　自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して定まる $G'(\mathbb{Z})$ の部分群

$$\Gamma(N) := \{ g \in G'(\mathbb{Z}) \,|\, g \equiv \mathbf{1}_2 \mod N \}$$

を**レベル N の主合同部分群** *(principal congruence subgroup of level N)* という。$G'(\mathbb{Z}) = \Gamma(1)$ である。

補題 1.3.7. $\Gamma(N)$ は $\Gamma(1) = G'(\mathbb{Z})$ の正規部分群で、$\Gamma(1)/\Gamma(N) \simeq G'(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = SL(2,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ である。

証明. 行列の各成分を N を法として見る写像 $G'(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow G'(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ は明らかに準同型でその核は $\Gamma(N)$ である。これが全射であることを見ればよい。$\bar{g} \in G'(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ に対して、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{Z}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \bar{g} \mod N$$

を取る。仮定から $(ad-bc, N) = \mathbb{Z}$ だから $(c, d, N) = \mathbb{Z}$。c の素因数で d の約数でないものたちの積を n とすれば $(c, d' := d + nN) = \mathbb{Z}$ かつ $(ad' - bc, N) = \mathbb{Z}$ である。よって

$$\det \begin{pmatrix} a + kN & b + mN \\ c & d' \end{pmatrix} = ad' - bc + N(kd' - mc)$$

において k, m をうまく取れば $kd' - mc$ は任意の整数を表すから、この行列式が 1 となる k, $m \in \mathbb{Z}$ が存在する。 $\square$

これから $\Gamma(N)$ は $\Gamma(1)$ の指数

$$|SL(2,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = N^3 \prod_p (1-p^{-2}) \tag{1.8}$$

の部分群である (下の問参照)。ただし p は N の素因数全体を走る。明らかに $\Gamma(N)$ は第 1 種 Fuchs 群で、

$$\mathrm{meas}(\Gamma(N)\backslash G'(\mathbb{R})) = [\Gamma(1):\Gamma(N)]\cdot \mathrm{meas}(\Gamma(1)\backslash G'(\mathbb{R})) = \frac{\pi}{3}N^3\prod_p(1-p^{-2})$$

である。

(i) 定義から $\Gamma(N)$ のカスプは $\Gamma(1)$ のカスプである。逆に $\Gamma(1)$ のカスプ $c\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ に対して $\Gamma(1)_c$ は無限次巡回群で、

$$\{\gamma^{[\Gamma(1):\Gamma(N)]}\,|\,\gamma\in\Gamma(1)_c\}\subset\Gamma(N)_c$$

であるから、c は $\Gamma(N)$ のカスプである。すなわち $\Gamma(N)$ のカスプの集合は $\Gamma(1)$ のそれに一致している。

(ii) 1.1 節から得られる全単射 $\Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty \ni \gamma\Gamma(1)_\infty \overset{\sim}{\mapsto} \gamma.\infty \in \mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ は、全単射

$$\Gamma(N)\backslash\Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty \ni \Gamma(N)\gamma\Gamma(1)_\infty \overset{\sim}{\longmapsto} \Gamma(N)\gamma.\infty \in \left\{\begin{array}{l}\Gamma(N)\text{ のカスプの}\\ \Gamma(N)\text{ 軌道}\end{array}\right\}$$

を与える。ここで $\Gamma(N)$ が $\Gamma(1)$ の正規部分群で

$$\Gamma(1)_\infty = \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$$

であることに注意すれば、$\Gamma(N)$ のカスプの $\Gamma(N)$ 軌道の個数 ν_∞ は

$$\begin{aligned}|\Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty\Gamma(N)| &= |G'(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/[\Gamma(1)_\infty\text{ の像}]|\\ &= \begin{cases}3 & N=2\text{ のとき}\\ \dfrac{N^2}{2}\prod_{p|N}(1-p^{-2}) & N>2\text{ のとき}\end{cases}\end{aligned}$$

で与えられる。

(iii) $\Gamma(N)$ の固定点 $z\in\mathfrak{H}$ は $\Gamma(1)$ の固定点であり、$\Gamma(N)_z = \Gamma(1)_z\cap\Gamma(N)$ である。$N\geq 2$ のとき、$\Gamma(N)$ は S, ST の $\Gamma(1)$ 共役類と交わらない ($\Gamma(N)\triangleleft\Gamma(1)$ だから $\Gamma(N)$ が S, ST を含まないと言っても同じことである) から $\Gamma(N)$ は $\mathfrak{H}$ に固定点を持たない。

問 1.4 (Euler 函数). (i) p を素数とするとき、$(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^\times$ の位数は $p^e(1-p^{-1})$ であることを確かめよ。
(ii) $\varphi : \mathbb{Z} \ni N \mapsto |(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times| \in \mathbb{N}$ を *Euler* **函数**というのだった。孫子定理を使って、$N = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$, $(p_i \neq p_j,\ i \neq j)$ と素因数分解されるとき、

$$\varphi(N) = N\prod_{i=1}^n (1-p_i^{-1})$$

であることを示せ。

問 1.5. $G'(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = SL(2,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の位数を求めよう。$N = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$, $(p_i \neq p_j,\ i \neq j)$ を素因数分解とする。
(i) 孫子定理から $G'(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^n G'(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})$ であることを示せ。
(ii) 各 $G'(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})$ に対して、例 1.1.2 と同様に単射

$$G'(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})/U(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}) \longrightarrow (Z/p^e\mathbb{Z})^2$$

を構成し、その像が

$$\left\{ \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{c} \end{pmatrix} \in (Z/p^e\mathbb{Z})^2 \,\middle|\, (a,c,p)=1 \right\}$$

であることを示せ。ただし、$m \in \mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ での像を $\bar{m}$ と書いている。
(iii) 上の像の濃度は $p^e(p^e-p^{e-1})+p^{e-1}(p^e-p^{e-1}) = p^{2e}(1-p^{-2})$ であることを確かめよ。
(iv) $|G'(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = N^3\prod_{p|N}(1-p^{-2})$ を証明せよ。

$SL(2,\mathbb{Z})$ の部分群 Γ で、ある $N \in \mathbb{N}$ に対する $\Gamma(N)$ を含むものを $SL(2,\mathbb{Z})$ の**合同部分群** *(congruence subgroup)* という。主合同部分群以外の合同部分群の代表例が次に述べる Hecke 部分群である。

Hecke 部分群　$N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Gamma_0(N) := \left\{ g \in G'(\mathbb{Z}) \,\middle|\, g \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mod N \right\}$$

と定める。$\Gamma(1) \supset \Gamma_0(N) \supset \Gamma(N)$ で、上の問 1.4 から

$$[\Gamma_0(N) : \Gamma(N)] = |B'(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = N^2\prod_{p|N}(1-p^{-1})$$

だから

$$[\Gamma(1) : \Gamma_0(N)] = N\prod_{p|N}(1+p^{-1}). \tag{1.9}$$

$\Gamma(N)$ は固定点を持たなかったが、$\Gamma_0(N)$ は固定点を持つ。

命題 1.3.8. (i) $\Gamma_0(N)$ の固定点は $\Gamma(1)$ の固定点に含まれているから、その固定化群は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ または $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ に同型である。前者のタイプの固定点の個数を nu_2、後者のタイプの固定点の数を ν_3 と書けば、

$$\nu_2=\begin{cases}1 & N=2\text{ のとき}\\ 0 & 4|N\text{ のとき}\\ \prod_{p|N,\,p\neq 2}\left(1+\left(\dfrac{-1}{p}\right)\right) & 4\nmid N\text{ のとき}\end{cases}$$

$$\nu_3=\begin{cases}1 & N=3\text{ のとき}\\ 0 & 9|N\text{ または }2|N\text{ のとき}\\ \prod_{p|N,\,p\neq 3}\left(1+\left(\dfrac{-3}{p}\right)\right) & 9\nmid N\text{ かつ }2\nmid N\text{ のとき。}\end{cases}$$

(ii) $\Gamma_0(N)$ のカスプは $\Gamma(1)$ のそれに一致している。特に全単射

$$\Gamma_0(N)\backslash\Gamma(1)/\Gamma(1)_0\ni\Gamma_0(N)\gamma\Gamma(1)_0\overset{\sim}{\longmapsto}\gamma.0\in\left\{\begin{array}{l}\Gamma_0(N)\text{ のカスプの}\\ \Gamma_0(N)\text{ 軌道}\end{array}\right\}$$

$$\Gamma(1)_0=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$$

があるから、$\Gamma_0(N)$ のカスプの $\Gamma_0(N)$ 軌道の個数 ν_∞ は

$$\sum_{d|N}\varphi((d,d/N)).$$

上で $\left(\dfrac{a}{p}\right)$ は平方剰余記号 (Legendre 記号) である。つまり、

$$\left(\frac{\bullet}{p}\right):\mathbb{F}_p^\times/(\mathbb{F}_p^\times)^2\longrightarrow\{\pm1\}$$

は唯一の非自明な 2 次指標である。Hecke 部分群は整数論的に重要であるからこれらの結果を引用したが、その証明はあまりすっきりしたものではない。詳しいことは [清水 92, ３章] などを参照されたい。

四元数体の合同部分群　体論演習でも触れたが、$a,b\in\mathbb{Q}^\times$ に対して $\mathscr{D}=\mathscr{D}_{a,b}:=\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\cdot i\oplus\mathbb{Q}\cdot j\oplus\mathbb{Q}\cdot ij$ にかけ算を

$$i^2=a,\quad j^2=b,\quad ij=-ji$$

を $\mathbb{Q}$ 線型に延ばしたものと定めて**四元数環** *(quaternion)* が得られる。**主対合** *(main involution)*

$$\iota:\mathscr{D}\ni x+y\cdot i+z\cdot j+w\cdot ij\longmapsto x-y\cdot i-z\cdot j-w\cdot ij\in\mathscr{D}$$

を使って、**被約ノルム** *(reduced norm)* $\nu_{\mathscr{D}/\mathbb{Q}}:\mathscr{D}^\times\ni x\mapsto x{}^\iota x\in\mathbb{Q}^\times$, **被約トレース** *(reduced trace)* $\tau_{\mathscr{D}/\mathbb{Q}}:\mathscr{D}\ni x\mapsto x+{}^\iota x\in\mathbb{Q}$ が定まる。例えば、$a=b=1$ のときには $\mathscr{D}$ は2次の行列環 $\mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ に同型で、

$$\iota\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix},\quad \nu_{\mathscr{D}/\mathbb{Q}}(x)=\det x,\quad \tau_{\mathscr{D}/\mathbb{Q}}(x)=\mathrm{tr}x$$

となる。$\mathscr{D}^\times=\{x\in\mathscr{D}\,|\,\nu_{\mathscr{D}/\mathbb{Q}}(x)\in\mathbb{Q}^\times\}$ であるから、$\mathscr{D}^1:=\{x\in\mathscr{D}\,|\,\nu_{\mathscr{D}/\mathbb{Q}}(x)=1\}$ はその部分群である。部分環 $\mathfrak{o}\subset\mathscr{D}$ はランクが4の自由 $\mathbb{Z}$ 加群であるとき、$\mathscr{D}$ の**整環** *(order)* と呼ばれる。

問 1.6. $a=b=1$ のとき、同型 $\mathscr{D}\xrightarrow{\sim}\mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ を与え、それによって主対合が上で述べた形に移されることを示せ。

問 1.7. $a,b\in\mathbb{R}_+^\times$ のとき、上と同様の生成元と関係式で定義される $\mathbb{R}$ 代数 $\mathscr{D}=\mathscr{D}_{a,b}$ は行列環に同型で、前問と同様の主張を満たすことを示せ。（実際には $a>0$ または $b>0$ だけでよい。）

$\mathscr{D}\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{R}$ は $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ か $\mathbb{H}$(Hamilton の四元数体) に同型だが、ここでは $\mathscr{D}\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{R}\simeq\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ だとする。$\mathscr{D}$ の整環 $\mathfrak{o}$ に対して

$$\Gamma_{a,b}(\mathfrak{o}):=\{\gamma\in\mathfrak{o}\,|\,\nu_{\mathscr{D}/\mathbb{Q}}(\gamma)=1\}\subset\mathscr{D}^1$$

は同型 $(\mathscr{D}\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{R})^1\xrightarrow{\sim}SL(2,\mathbb{R})$ によって、Fuchs 群と見なせる。

定理 1.3.9 (Minkowski). $\mathscr{D}$ が斜体のとき、$\Gamma_{a,b}(\mathfrak{o})\backslash\mathfrak{H}$ はコンパクト。

これの証明はアデール群の設定を用いた方がわかりよいのでこの時点では省略することにする。

♣♢♠♡

補論—数論的部分群

第1種 Fuchs 群の中で整数論から見て重要なものに数論的部分群がある。第1種 Fuchs 群 Γ,Γ' は $\Gamma\cap\Gamma'$ が Γ,Γ' の中で共に指数有限であるとき、**通訳可能** *(commensurable)* であるという。上の四元数環を使った第1種 Fuchs 群の構成は、実は総実代数体上のある種の不定値四元数環 $\mathscr{D}$ とその整環 $\mathfrak{o}$ に対しても適用できる。こうして得られた Fuchs 群 $\Gamma_\mathscr{D}(\mathfrak{o})$ のいずれかと通訳可能な Fuchs 群を**数論的部分群** *(arithmetic subgroup)* という。例えば上で扱った合同部分群たちは $\Gamma(1)=\Gamma_{\mathbb{M}_2(\mathbb{Q})}(\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}))$ と通訳可能だから数論的部分群である。

$SL(2,\mathbb{R})$ には数論的でない第1種 Fuchs 群が存在する。しかしこのような群は実はあまりない。というのも $Sp(n,\mathbb{R})$, $SO(n,m)$ $(n,\,m\geq 2)$ など $\mathbb{R}$ ランクが2以上の半単純 Lie 群の離散部分群でそれによる剰余類空間の測度が有限なものは数論的であるという Margulis の定理があるからである [Mar84]。Margulis はこの結果に対して Fields 賞を受けている。他方で $SO(n,1)$ には多くの数論的でない余測度有限離散部分群があることが知られている [GPS88]。$SU(2,1)$, $SU(3,1)$ にもそのような部分群が存在するが [Mos78], [Mos81]、それ以外の $\mathbb{R}$ ランク1半単純 Lie 群に余測度有限かつ非数論的な部分群があるかどうかは知られていない。

1.4 保型函数と保型形式

1.4.1 定義

$\Gamma \subset G'(\mathbb{R})$ を第 1 種 Fuchs 群とする。コンパクト Riemann 面 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ 上の有理型函数を Γ に対する**保型函数** *(modular function)* という。1.3 節の複素構造の定義から、次のように言っても同じことである。函数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ が保型函数とは、

(i) f は Γ 不変: $f(\gamma.z) = f(z)$, $(\forall\gamma \in \Gamma,\ z \in \mathfrak{H})$。

(ii) f は $\mathfrak{H}$ 上有理型。

(iii) f は Γ のカスプで有理型。

この最後の条件は次のように述べられる。$c = g_c.\infty$ を Γ のカスプとすれば、$h > 0$ があって

$$\Gamma_c = \mathrm{Ad}(g_c)\left\{ \begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

と書ける。$\left(\begin{smallmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).z = z + nh$ と f が Γ 不変であることから、$\mathfrak{H} \ni z \mapsto f(g.z) \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ は周期 h の周期函数である。このとき、(iii) は $f(g_c.z)$ が $q_c := \exp(\frac{2\pi i}{h}z)$ に関する Laurent 展開を持つこと

$$f(g_c.z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n q_c^n \tag{1.10}$$

に等価である。

これを受けて保型形式を次のように定義する。$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G'(\mathbb{R})$ に対して

$$j(\gamma, z) := \frac{1}{cz + d} \quad z \in \mathfrak{H}$$

と書く。函数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ が Γ に対するウェイト $2k$ の**保型形式** *(modular form)* とは、

(i) $f(\gamma.z)j(\gamma, z)^{2k} = f(z)$, $(\forall\gamma \in \Gamma,\ z \in \mathfrak{H})$。

(ii) f は $\mathfrak{H}$ 上正則。

(iii) 上の意味で f は Γ のカスプで正則。すなわち $f(g_c.z)j(g_c, z)^{2k}$ は (1.10) で負べきの項がないものを持つ。

Γ に対するウェイト $2k$ の保型形式の空間を $M_{2k}(\Gamma)$ と書く。さらに f が Γ の任意のカスプで消えている、すなわち展開 (1.10) で正べきの項のみが現れるとき、f は**カスプ形式** *(cusp form)* と呼ばれる。Γ に対するウェイト $2k$ のカスプ形式の空間を $S_{2k}(\Gamma)$ と書こう (Spitzen (カスプ) Formen の S である)。上で正則性を有理型であることで置き換えて、有

理型保型形式が定義できる。$\mathfrak{H}$ 上の有理型函数 $f(z)$ に対して、微分形式 $\omega := f(z)\,dz$ が Γ 不変であるためには、$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ に対して、

$$\begin{aligned}\gamma^*\omega :=& f(\gamma.z)\,d\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) = f(\gamma.z)\frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}\,dz \\ =& f(\gamma.z)j(\gamma,z)^2\,dz\end{aligned}$$

であることが必要十分。すなわち**ウェイト 2 の有理型保型形式は $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ 上の微分形式と対応している**。同様にウェイト $2k$ の有理型保型形式は $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ の k 次の微分形式、すなわち適当な座標近傍上で $f(z)\,dz^k$ ($f(z)$ は有理型函数) と書けるものと対応している。しかし、正則保型形式を自然に解釈するためには保型線束と呼ばれる $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ 上の線束の大域切断と見る必要がある (将来解説する予定)。

1.4.2　次元公式

Riemann-Roch の定理を使って $M_{2k}(\Gamma)$ の次元を計算しよう。$p : \mathfrak{H}^* \twoheadrightarrow \Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ を自然な射影とする。上で述べたように $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ 上の k 次の微分形式 ω とウェイト $2k$ の有理型保型形式 $f(z)$ が

$$f(z)\,dz^k = p^*\omega$$

によって対応している。これらの位数は次のように対応している。

(i) $z \in \mathfrak{H}$ では $x = p(z)$ の座標近傍 (U_x, φ_x) 上で $\omega = h\circ\varphi_x\,d\varphi_x^k$ と書けているとすれば、

$$f(w)\,dw^k = h(\varphi_x\circ p(w))\,d(\varphi_x\circ p(w))^k, \quad w\in\mathfrak{H}^*,\ p(w)\in U_x.$$

$h(z)$ の $\varphi_x(x)$ での位数が ω の x での位数であった。$e = e_x := |(\Gamma_z)_{\mathrm{ad}}|$ として

$$\begin{aligned} h\Big(\Big(\frac{w-z}{w-\bar z}\Big)^e\Big)\,d\Big(\Big(\frac{w-z}{w-\bar z}\Big)^e\Big)^k =& h\Big(\Big(\frac{w-z}{w-\bar z}\Big)^e\Big)\Big(\frac{d}{dz}\Big(\frac{w-z}{w-\bar z}\Big)^e\Big)^k\,dw^k \\ =& h\Big(\Big(\frac{w-z}{w-\bar z}\Big)^e\Big)\Big(e\Big(\frac{w-z}{w-\bar z}\Big)^{e-1}\Big(\frac{1}{w-\bar z}-\frac{w-z}{(w-\bar z)^2}\Big)\Big)^k\,dw^k \\ =& h\Big(\Big(\frac{w-z}{w-\bar z}\Big)^e\Big)\Big(e\Big(\frac{w-z}{w-\bar z}\Big)^{e-1}\frac{z-\bar z}{(w-\bar z)^2}\Big)^k\,dw^k \end{aligned}$$

であるから、

$$\mathrm{ord}_z f = e\cdot\mathrm{ord}_x\omega + k(e-1).$$

特に Γ の固定点以外では $\mathrm{ord}_z f = \mathrm{ord}_x\omega$ が成り立つ。

(ii) Γ のカスプ $c = g.\infty$ では座標近傍 $(U_c(T), \varphi_c(z) = q_c)$ 上で $\omega = h(q_c)\,dq_c^k$ と書いたときの、h の $q_c = 0$ での位数が ω の $x = p(c)$ での位数。

$$h(q_c)\,dq_c^k = h(q_c)\Big(\frac{dq_c}{dz}\Big)^k = h(q_c)\Big(\frac{2\pi i}{\lambda}q_c\cdot j(g^{-1},z)^2\Big)^k\,dz^k$$

から

$$\mathrm{ord}_c f = \mathrm{ord}_x\omega + k.$$

これらから $f \in M_{2k}(\Gamma)$ である、すなわち f が正則であるためには

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}_x\omega + k\Big(1 - \frac{1}{e_x}\Big) \geq 0, \quad \forall x \in p(\mathfrak{H}), \\ &\mathrm{ord}_x\omega + k \geq 0, \quad \forall x \in p(\mathfrak{H}^* \setminus \mathfrak{H}) \end{aligned} \tag{1.11}$$

が必要十分である。

定理 1.4.1. $\Gamma \subset G'(\mathbb{R})$ を第 1 種 Fuchs 群とし $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ の種数を g, Γ のカスプの Γ 軌道の個数を ν_∞ と書く。
(i) $k \geq 2$ または Γ がカスプを持つとき、$\dim_{\mathbb{C}} M_{2k}(\Gamma)$ は

$$(2k-1)(g-1) + \nu_\infty \cdot k + \sum_{\substack{x=p(z)\in\Gamma\backslash\mathfrak{H} \\ z\text{ は }\Gamma\text{ の固定点}}} \Big[k\big(1 - \frac{1}{e_z}\big)\Big]$$

に等しい。$k = 1$ かつ $\nu_\infty = 0$ のときには $\dim_{\mathbb{C}} M_{2k}(\Gamma) = g$ である。
(ii) 同様に $k \geq 2$ または Γ がカスプを持つとき、$\dim_{\mathbb{C}} S_{2k}(\Gamma)$ は

$$(2k-1)(g-1) + \nu_\infty \cdot (k-1) + \sum_{\substack{x=p(z)\in\Gamma\backslash\mathfrak{H} \\ z\text{ は }\Gamma\text{ の固定点}}} \Big[k\big(1 - \frac{1}{e_z}\big)\Big]$$

で与えられる。$k = 1$ かつ $\nu_\infty = 0$ のときには $\dim_{\mathbb{C}} S_{2k}(\Gamma) = g$ である。

証明. $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ 上の k 次の微分形式 ω_0 を固定して $\omega = h \cdot \omega_0$ と書こう。

$$D := \mathrm{div}(\omega_0) + \sum_{c\in\Gamma\backslash(\mathfrak{H}^*\setminus\mathfrak{H})} k \cdot c + \sum_{\substack{x=p(z)\in\Gamma\backslash\mathfrak{H} \\ z\text{ は }\Gamma\text{ の固定点}}} \Big[k\big(1 - \frac{1}{e_z}\big)\Big] \cdot x$$

として ($[\bullet]$ は Gauss 記号である)、(1.11) は $\mathrm{div}(h) + D$ が効果的であること、すなわち $h \in L(D)$ に同値である。系 1.2.8 から微分形式の次数は $2g-2$ だから、$\deg(\omega_0) = k(2g-2)$。よって

$$\deg(D) = k(2g-2) + \nu_\infty \cdot k + \sum_{\substack{x=p(z)\in\Gamma\backslash\mathfrak{H} \\ z\text{ は }\Gamma\text{ の固定点}}} \Big[k\big(1 - \frac{1}{e_z}\big)\Big]$$

である。$k \geq 2$ または $\nu_\infty \neq 0$ であればこれは $2g-2$ より大きいから、系 1.2.9 が使えて (i) を得る。$k = 1$ かつ Γ のカスプがないときには、(i) は系 1.2.8 から直ちに従う。(ii) はカスプ形式の定義を用いて同様に示せる。カスプがないときには $S_{2k}(\Gamma) = M_{2k}(\Gamma)$ であることに注意せよ。 □

$\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ の種数　定理 1.4.1 を使って保型形式の空間の次元を計算するには、$\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ の種数が必要である。Γ が合同部分群の場合には、$\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ を $\Gamma(1)\backslash\mathfrak{H}^*$ の被覆と見ることでこの種数を計算できる。

補題 1.4.2. $\Gamma(1)\backslash\mathfrak{H}^*$ の種数は 0 である。(言い換えれば $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ は Riemann 面として $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ に同型。)

証明. 種数 0 のコンパクト Riemann 面は射影直線のみであることを思い出しておく。$\Gamma(1)\backslash\mathfrak{H}^*$ は

$$\overline{\Omega} := \{z \in \mathfrak{H} \mid -1/2 \leq \Re z \leq 1/2,\ |z| \geq 1\}$$

の境界のうち

- 半直線 $\{z \mid \Re(z) = 1/2,\ \Im z \geq \sqrt{3}/2\}$ と $\{z \mid \Re(z) = -1/2,\ \Im z \geq \sqrt{3}/2\}$、
- 円弧 $\{z \mid |z| = 1,\ \pi/6 \leq \arg(z) \leq \pi/2\}$ と $\{z \mid |z| = 1,\ \pi/2 \leq \arg(z) \leq \pi/3\}$

をそれぞれ張り合わせてできる袋の口を ∞ で閉じたものだから、明らかに球面に同相である。球面の種数は幾何学 A で見たように 0 であった。 □

Γ を合同部分群とする。1.3.4 節で見たように Γ の固定点 z は $\Gamma(1)$ の固定点であるから、$(\Gamma_z)_{\mathrm{ad}}$ の位数は 2 または 3 である。

命題 1.4.3. $\Gamma \subset \Gamma(1)$ を指数有限部分群とし、$d(\Gamma) := [\Gamma(1)_{\mathrm{ad}} : \Gamma_{\mathrm{ad}}]$ とする。$|(\Gamma_z)_{\mathrm{ad}}| = m$ である Γ の固定点の Γ 軌道の個数を ν_m、Γ のカスプの Γ 軌道の個数を ν_∞ と書く。このとき、$\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ の種数は

$$g(\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*) = 1 + \frac{d(\Gamma)}{12} - \frac{\nu_2}{4} - \frac{\nu_3}{3} - \frac{\nu_\infty}{2}$$

で与えられる。

証明. $d(\Gamma)$ は被覆 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^* \twoheadrightarrow \Gamma(1)\backslash\mathfrak{H}^*$ の次数であることと上の補題を Riemann-Hurwitz の定理 (系 1.2.10) と組み合わせて

$$\begin{aligned} g(\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*) =& 1 + d(\Gamma)(g(\Gamma(1)\backslash\mathfrak{H}^*) - 1) + \sum_{x\ \text{分岐点}} \frac{e_x - 1}{2} \\ =& 1 - d(\Gamma) + \sum_{x\ \text{分岐点}} \frac{e_x - 1}{2}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

ただし、右辺の和は $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^* \to \Gamma(1)\backslash\mathfrak{H}^*$ の分岐点 x を走る。

$p : \mathfrak{H}^* \twoheadrightarrow \Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$, $p_1 : \mathfrak{H}^* \twoheadrightarrow \Gamma(1)\backslash\mathfrak{H}^*$ をそれぞれ標準射影とする。z の $p(z)$, $p_1(z)$ 上の分岐指数をそれぞれ $e(z/p(z))$, $e(z/p_1(z))$ と書けば、分岐指数は乗法公式

$$e(z/p_1(z)) = e(z/p(z))e_{p(z)} \tag{1.13}$$

を満たす。ただし、$e_{p(z)}$ は $p(z)$ の $\Gamma(1)\backslash\mathfrak{H}^*$ 上の分岐指数であった。

(i) $p_1(z) = p_1(i)$ のとき、(1.13) から $(e(z/p(z)), e_{p(z)}) = (2, 1)$ または $(1, 2)$ のいずれかである。

(a) $e(z/p(z))=2,\ e_{p(z)}=1$ となる $p(z)$ は ν_2 個。

(b) $e(z/p(z))=1,\ e_{p(z)}=2$ となる $p(z)$ は $(d(\Gamma)-\nu_2)/2$ 個 (分岐指数で割っている)。

これらから

$$\sum_{p(z),\,p_1(z)=i} e_{p(z)}-1=\frac{d(\Gamma)-\nu_2}{2}.$$

(ii) $p_1(z)=p_1(\rho)$ のとき、(1.13) から $(e(z/p(z)),e_{p(z)})=(3,1)$ または $(1,3)$ のいずれかである。

(a) $e(z/p(z))=3,\ e_{p(z)}=1$ となる $p(z)$ は ν_3 個。

(b) $e(z/p(z))=1,\ e_{p(z)}=3$ となる $p(z)$ は $(d(\Gamma)-\nu_3)/3$ 個 (分岐指数で割っている)。

これらから

$$\sum_{p(z),\,p_1(z)=i} e_{p(z)}-1=\frac{2(d(\Gamma)-\nu_2)}{3}.$$

(iii) $z\in\mathfrak{H}$ が上のいずれでもないとき、$e(z/p_1(z))=1$ だから (1.13) によって $p(z)$ は分岐点ではない。

(iv) $z\in\mathfrak{H}^*$ が $p_1(z)=\infty$ を満たすとき、

$$\sum_{p(z),\,z\text{ は }\Gamma\text{ のカスプ}}(e_{p(z)}-1)=\sum_{p(z),\,z\text{ は }\Gamma\text{ のカスプ}} e_{p(z)}-\nu_\infty=d(\Gamma)-\nu_\infty.$$

以上を (1.12) に代入して

$$\begin{aligned} g(\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*)=&1-d(\Gamma)+\frac{1}{2}\Big(\frac{d(\Gamma)-\nu_2}{2}+\frac{2(d(\Gamma)-\nu_3)}{3}+d(\Gamma)-\nu_\infty\Big)\\ =&1+\frac{d(\Gamma)}{12}-\frac{\nu_2}{4}-\frac{\nu_3}{3}-\frac{\nu_\infty}{2}. \end{aligned}$$

□

例 1.4.4 ($\Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}^*$ の種数). 上の命題を 1.3.4 節の主合同部分群 $\Gamma(N)$ の場合に適用してみよう。$X(N):=\Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}^*$ と書く。

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$d(\Gamma)$	1	6	12	24	60	72	168	192	324	360	660	144
ν_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_∞	1	3	4	6	12	12	24	24	36	36	60	12
$g(X(N))$	0	0	0	0	0	1	3	5	10	13	26	7

例 1.4.5 ($\Gamma(1)$ の保型形式の空間の次元). $\Gamma = \Gamma(1)$ の場合には、補題 1.4.2 と定理 1.4.1 から

$$\dim M_{2k}(\Gamma(1)) = 1 - k + \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{2k}{3}\right], \quad \dim S_{2k}(\Gamma(1)) = -k + \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{2k}{3}\right]$$

を得る。

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim M_{2k}(\Gamma(1))$	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	4
$\dim S_{2k}(\Gamma(1))$	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	2

1.5 楕円函数

保型形式の簡単な例を構成するために、複素解析から楕円函数について復習する [L.V.82, 7 章], [Sil86, VI 章]。

1.5.1 二重周期函数

複素数の対 (ω_1, ω_2) でその比 $\tau := \omega_1/\omega_2$ が $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に含まれないものは、$\mathbb{C}$ 内の $\mathbb{Z}$ 格子

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$$

の $\mathbb{Z}$ 基底である。以下、必要なら ω_1, ω_2 を入れ替えて $\tau \in \mathfrak{H}$ であるとする。別のそのような対 (ω_1', ω_2') が同じ格子 Λ を張るためには、$\gamma \in \Gamma(1)$ があって

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

と書けることが必要十分である。すなわち全単射

$$\Gamma(1)\backslash\mathfrak{H} \times \mathbb{C}^\times \ni (\tau, \omega_2) \overset{\sim}{\longmapsto} \mathbb{Z}\tau\omega_2 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \in \{\mathbb{C} \text{ 内の格子 }\} \tag{1.14}$$

がある。

一方で Λ は平行移動によって $\mathbb{C}$ に作用し、この作用は忠実であるから、補題 1.3.3 と同様にして $\mathbb{C}/\Lambda$ にはコンパクト Riemann 面の構造が入る。Λ の $\mathbb{Z}$ 基底 (ω_1, ω_2) と $o \in \mathbb{C}$ に対して、o, $o + \omega_1$, $o + \omega_2$, $o + \omega_1 + \omega_2$ を頂点とする平行四辺形の内部は $\mathbb{C}/\Lambda$ の基本領域なので、**基本平行四辺形**と呼ばれる。基本平行四辺形を平行移動して得られる $\mathbb{C}/\Lambda$ の基本領域も再び基本平行四辺形と呼ぶことにしよう。射影 $\mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ を p_Λ と書く。幾何学 A で見たように $g(\mathbb{C}/\Lambda) = 1$ である。

$\mathbb{C}$ 上の有理型函数 f が Λ 不変:

$$f(z + \omega) = f(z), \quad \forall \omega \in \Lambda$$

のとき、f は Λ に関する**二重周期函数** *(doubly periodic function)* と呼ばれる。これは言い換えれば、f がコンパクト Riemann 面 $\mathbb{C}/\Lambda$ 上の有理型函数であるということなので、1.2 節で復習したコンパクト Riemann 面上の複素解析の基本事項が適用できる。例えば D を Λ の基本平行四辺形でその境界上に f の極や零点がないものとするとき、

- D 内の f の極での f の留数の和は 0 である。
- D 内の f の極の位数の和と零点の位数の和は等しい。

系 1.5.1. Λ の定数でない二重周期函数は D 内に少なくとも二つの極を持つ。

証明. f をそのような函数とする。f が正則なら、f は $\mathbb{C}$ 上の有界正則函数だから Liouville の定理により定数である。そうでなければ上の 1 番目の主張から、f の留数たちは互いに相殺するはずで、そのためには少なくとも 2 つの極が必要である。 □

1.5.2　$\mathbb{C}/\Lambda$ の自己準同型環

補題 1.5.2. $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{C}$ を $\mathbb{Z}$ 格子とする。
(i) $\alpha \in \mathbb{C}$ で $\alpha\Lambda \subset \Lambda'$ なるものに対して、

$$\varphi_\alpha : \mathbb{C}/\Lambda \ni z \longmapsto \alpha z \in \mathbb{C}/\Lambda'$$

は定義可能な正則写像で、$\mathbb{C}/\Lambda, \mathbb{C}/\Lambda'$ を $\mathbb{C}$ の格子による商群と見たものの準同型。
(ii) 次は全単射。

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha\Lambda \subset \Lambda'\} \ni \alpha \longmapsto \varphi_\alpha \in \left\{ \varphi : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda' \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(a)} & \varphi \text{ は正則写像} \\ \text{(b)} & \varphi(0) = 0 \end{array} \right\}$$

証明. (i) は明らか。(ii) の単射性も自明だから、全射性を示せばよい。$\varphi(0) = 0$ となる正則写像 $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda'$ を取る。$\mathbb{C} \xrightarrow{p_\Lambda} \mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}/\Lambda'$ は $\mathbb{C}/\Lambda'$ の単連結被覆 $\mathbb{C}$ を経由する。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\exists\widetilde{\varphi}} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle p_\Lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\Lambda'}} \\ \mathbb{C}/\Lambda & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}/\Lambda' \end{array}$$

$p_\Lambda, p_{\Lambda'}$ は共に局所同型だから、持ち上げ $\widetilde{\varphi}$ は正則写像である。任意の $\omega \in \Lambda$ に対して

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto \widetilde{\varphi}(z+\omega) - \widetilde{\varphi}(z) \in \Lambda'$$

は定義可能な連続写像、よって定数函数である。特に $\widetilde{\varphi}$ の導関数 $\widetilde{\varphi}'$ は正則二重周期函数ゆえ、系 1.5.1 から定数函数である: $\widetilde{\varphi}(z) = \alpha z + \beta$, $\exists\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. 最後に $\varphi(0) = 0$ から $\beta = 0$ であり、$\alpha\Lambda \subset \Lambda'$ は明らかである。 □

系 1.5.3. (i) $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{C}$ を $\mathbb{Z}$ 格子とする。$\mathbb{C}/\Lambda$ と $\mathbb{C}/\Lambda'$ が Riemann 面として同型であるためには、$\Lambda' = \alpha\Lambda, \exists\alpha \in \mathbb{C}^\times$ が必要十分である。
(ii) $\mathbb{Z}$ 格子 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ に対して商群 $\mathbb{C}/\Lambda$ の正則自己準同型環は、補題 1.5.2 (ii) の写像により $\mathbb{Z}$ または虚二次体の整数環の部分環と同一視される。

証明. (i) 任意の Riemann 面の同型 $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}/\Lambda'$ は平行移動によって $\varphi(0) = 0$ となるものに移せるから、主張は命題から明らか。

(ii) $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$ による $\mathbb{Z}$ の像が $\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ に属するのは明らか。そこでその像に含まれない $\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ の元があるとする。補題 1.5.2 (ii) からそのようなものは φ_α, ($\alpha \in \mathbb{C}^\times$, $\alpha\Lambda \subset \Lambda$) と書ける。$\Lambda$ の $\mathbb{Z}$ 基底 (ω_1, ω_2) で $\tau = \omega_1/\omega_2 \in \mathfrak{H}$ となるものを取る。仮定から

$$\alpha \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ。$\alpha \notin \mathbb{Z}$ としたから $c \neq 0$ なので、これから引き起こされる一次分数写像の式の分母を払って

$$c\tau^2 + (d-a)\tau - b = 0.$$

すなわち $\mathbb{Q}(\tau)$ が虚二次体であることがわかる。さらに $\alpha = c\tau + d \in \mathbb{Z}[\tau]$ は $\det(T \cdot \mathbf{1}_2 - \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) \in \mathbb{Z}[T]$ の根だから $\mathbb{Q}(\tau)$ での $\mathbb{Z}$ の整閉包に含まれる。 □

1.5.3 Weierstrass の $\wp$ 函数と Eisenstein 級数

実際に与えられた $\Lambda \subset \mathbb{C}$ に対して二重周期函数を構成するには、収束性のよい核函数の Λ 上の平均（和）を取るのが基本的である。ここではそのような構成の例を二つ挙げる。用いるのは次の簡単な補題である。

補題 1.5.4. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を有界領域、$\Lambda \subset \mathbb{C}$ を (ω_1, ω_2) で張られる格子とする。第 1 変数について連続な函数 $\varphi : \Omega \times \Lambda \to \mathbb{C}$ が、$C > 0$, $\epsilon > 0$ に対して

$$|\varphi(z, m\omega_1 + n\omega_2)| \leq C(m^2 + n^2)^{-1-\epsilon}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

を満たせば、$\sum_{\omega \in \Lambda} \varphi(z, \omega)$ は Ω 上絶対一様収束する。

注意 1.5.5. 補題の状況で $\varphi(z, \omega)$ が $z \in \Omega$ について有理型だとしてみる。定義から Ω 上のある多項式 $P(z)$ について $P(z)\varphi(z, \omega)$ が補題の条件を満たすから、$P(z) \sum_{\omega \in \Lambda} \varphi(z, \omega)$ は整型で、$\sum_{\omega \in \Lambda} \varphi(z, \omega)$ も有理型になる。

系 1.5.1 から、もっとも単純な Λ の二重周期函数は Λ 上で 2 位の極を持ち、それ以外で正則なものであろう。そのような $f(z)$ があったとすれば、$f(z) - f(-z)$ も二重周期函数で、Λ 上で高々 1 位の極を持ちそれ以外で正則だから定数函数で、しかも奇函数だから $f(z) = f(-z)$ つまり f は偶函数である。このような $f(z)$ は定数を足すことと 0 でない定数をかけることを除いて一意だから、0 での Laurent 展開が

$$f(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$$

となるよう「正規化」すれば $f(z)$ は一意である。ところがこれの微分

$$f'(z) = -2z^{-3} + \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n z^{2n-1}$$

の第 1 項 $-2z^{-3}$ は任意の有界領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して補題の条件を満たすから、

$$\wp'(z) := -2\sum_{\omega\in\Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

は広義絶対一様収束して $\mathbb{C}$ 上の有理型函数を定める。これは明らかに Λ で 3 位の極を持ちそれ以外で正則な二重周期函数だから、$f'(z) = \wp'(z)$ でなくてはならない。このような $f(z)$ は存在し、それは

$$\wp(z) = \wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

で与えられる (Weierstrass の $\wp$ **函数**)。実際、

$$\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| \leq \sum_{\substack{\omega\in\Lambda\\ |\omega|\leq 2|z|}} \left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| + \sum_{\substack{\omega\in\Lambda\\ |\omega|>2|z|}} \frac{10|z|}{|\omega|^3}$$

だから、上の和は広義絶対一様収束して有理型函数を定める。

命題 1.5.6 (加法公式). $\wp(z)$ は次の函数等式を満たす。

$$\wp(z+w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}\right)^2 - \wp(z) - \wp(w).$$

証明. Λ の基本平行四辺形 D で 0 を含むものを取る。

$$F(z) := \wp(z+w) - \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}\right)^2 + \wp(z) + \wp(w)$$

の D 内の極は高々$0, \pm w$ の 3 点だが、$0, -w$ で極を持たないことはすぐわかる。真ん中の括弧内の w での極は高々 1 位だから、系 1.5.1 により F は定数函数である。$F(0) = 0$ から命題を得る。 □

続いて第 2 の例であるウェイト $2k$ の *Eisenstein* **級数**を

$$G_k(\Lambda) := \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^{2k}}$$

と定める。$z \in \mathbb{C}^\times$ に対して $G_k(z\Lambda) = z^{-2k}G_k(\Lambda)$ という意味でこれは格子の函数として**ウェイト** $2k$ である。$F(\Lambda)$ をそのような函数として

$$f(\tau) := F(\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}) = \omega_2^{2k} F(\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2), \quad \tau = \omega_1/\omega_2 \in \mathfrak{H}$$

とおけば、これは $\Gamma(1)$ に対するウェイト $2k$ の保型性を満たす。すなわち、$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$, $\tau = \omega_1/\omega_2 \in \mathfrak{H}$ として、

$$\begin{aligned} f(\gamma.\tau) =& f\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}\right) = (c\omega_1 + d\omega_2)^{2k} F(\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2) \\ =& (c\tau + d)^{2k} f(\tau) \end{aligned}$$

である。

命題 1.5.7. $k \geq 2$ のとき、$G_k(\tau) := G_k(\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z})$, $(\tau \in \mathfrak{H})$ は絶対収束して $M_{2k}(\Gamma(1))$ の元を定める。そのカスプ ∞ での値は $2\zeta(2k)$。ただし

$$\zeta(s) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s}, \quad \Re s > 1$$

は *Riemann* **ゼータ函数**である。

証明. 補題 1.5.4 から $k \geq 2$ のとき、$G_k(\tau)$ は絶対収束して $\mathfrak{H}$ 上の正則函数を定める。上で見たように $G_k(\tau)$ はウェイト $2k$ の保型性を満たす。$G_k(\tau)$ を定義する級数は広義絶対一様収束しているから、極限と和が入れ替えられて

$$\lim_{\tau \to \infty} G_k(\tau) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^{2k}} = 2\zeta(2k).$$

特に $G_k(\tau)$ はカスプ ∞ でも正則である。 □

習慣にならって、$g_2 = g_2(\Lambda) := 60G_2(\Lambda)$, $g_3 = g_3(\Lambda) := 140G_3(\Lambda)$ と書く。

補題 1.5.8.

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3.$$

証明. $(1-t)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ の両辺を微分すれば、$|t| < 1$ で

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^n.$$

t を z/ω で置き換えて、$|z| < |\omega|$ のとき

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\frac{z^n}{\omega^{n+2}}.$$

これを $\wp(z)$ の定義に代入して、0 の近傍で

$$\begin{aligned} \wp(z) =& \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} (n+1)\frac{z^n}{\omega^{n+2}} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)G_{k+1}(\Lambda)z^{2k} \\ =& \frac{1}{z^2} + 3G_2(\Lambda)z^2 + 5G_3(\Lambda)z^4 + \ldots \end{aligned}$$

が成り立っている。これから直ちに

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_2(\Lambda) + 140G_3(\Lambda)$$

が $z = 0$ で正則かつ零点を持つことがわかる。しかもこれは 0 以外で正則だから、系 1.5.1 から 0 でなくてはならない。 □

1.6 保型形式の例

1.6.1 Eisenstein 級数の Fourier 展開

Bernoulli 数　有理型函数 $z(e^z-1)^{-1}$ の $z=0$ での Laurent 展開を

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{z^n}{n!},\quad |z|<2\pi$$

と書く。b_n たちはこれと

$$\frac{e^z-1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}$$

を掛け合わせて得られる

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{z^n}{n!}=1$$

の両辺の各項の係数を比較して計算することができる。

$$b_1=-\frac{1}{2},\ b_2=\frac{1}{6},\ b_3=0,\ b_4=-\frac{1}{30},\ b_5=0,\ b_6=\frac{1}{42},\ b_7=0,\dots$$

すぐにわかるように b_1 以外の奇数次の項はない。$B_k:=(-1)^{k-1}b_{2k}$, $(k\in\mathbb{N})$ を *Bernoulli* **数**と呼ぶ。

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\ B_4=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66},\ B_6=\frac{691}{2730},\ B_7=\frac{7}{6},$$
$$B_8=\frac{3617}{510},\ B_9=\frac{43867}{798},\ B_{10}=\frac{174611}{330},\ B_{11}=\frac{854513}{138},\ B_{12}=\frac{103\times 2294797}{2730},\dots$$

これを用いて Riemann ゼータ函数の偶自然数での値が計算できる。

命題 1.6.1. $k\in\mathbb{N}$ のとき

$$\zeta(2k)=\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}B_k\pi^{2k}.$$

証明. [高木 83, 第 5 章 64 節] を参照。 □

例 1.6.2.

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\ \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450},\ \zeta(10)=\frac{\pi^{10}}{93555},\dots$$

Eisenstein 級数の Fourier 係数　上の命題により Eisenstein 級数の定数項は計算できた (命題 1.5.7 参照)。実は残りの係数も具体的に計算することができる。

命題 1.6.3. 自然数 n に対してその約数の k 乗の和を $\sigma_k(n)$ と書く。

$$\sigma_k(n) := \sum_{d\in\mathbb{N},\, d|n} d^k.$$

$k \geq 2$ のとき、$q = q_\infty := e^{2\pi iz}$ として

$$G_k(z) = 2\zeta(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n.$$

証明. [高木 83, 234 頁] から

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\Big)$$

を思い出す。一方で cot の定義から

$$\begin{aligned}\pi\cot\pi z &= \pi\frac{\frac{e^{\pi iz}+e^{-\pi iz}}{2}}{\frac{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}}{2i}} = \frac{q+1}{q-1}\pi i = \pi i - \frac{2\pi i}{1-q}\\ &= \pi i - 2\pi i\sum_{n=0}^{\infty} q^n\end{aligned}$$

でもある。これらの間の等式を z について順次微分すれば

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}q^n \tag{1.15}$$

が得られる。命題 1.5.7 の証明と同様にして、

$$G_k(z) = 2\zeta(2k) + \sum_{\substack{m\neq 0\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{Z}}}\frac{1}{(mz+n)^{2k}} = 2\zeta(2k) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(mz+n)^{2k}}$$

内側の和に (1.15) を適用して

$$=2\zeta(2k) + \frac{2(-2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{d=1}^{\infty} d^{2k-1}q^{md}$$

$n = dm$ とおいて

$$=2\zeta(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n.$$

□

1.6.2 Ramanujan の Δ

例 1.4.5 の $\dim S_{2k}(\Gamma(1))$ の表によればウェイト 10 以下のカスプ形式は存在せず、ウェイト 12 のそれは定数倍を除いて一意である。このウェイト 12 のカスプ形式を作ろう。$g_2(z) = 60G_2(z)$, $g_3(z) = 140G_3(z)$ はそれぞれウェイト 4, 6 の保型形式でその定数項は

$$60 \cdot 2\zeta(4) = \frac{2^2}{3}\pi^4, \quad 140 \cdot 2\zeta(6) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \pi^6$$

である。これらのべきとして得られるウェイト 12 の保型形式

$$\Delta(z) := g_2(z)^3 - 27g_3(z)^2$$

の定数項は $2^6/3^3 - 27 \cdot 2^6/3^6 = 0$ で消えている。命題 1.6.3 の展開式を使って

$$\Delta(z) = (2\pi)^{12} \cdot (q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \dots)$$

がわかるので、Δ は 0 でない $S_6(\Gamma(1))$ の元である。

定理 1.6.4 (Jacobi). Δ は無限積展開 $\Delta(z) = (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$ を持つ。

証明. (スケッチ。詳しい証明は [J.-P79, VII 章 4.4 節] などを参照。)

$$F(z) := q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

がウェイト 12 の保型形式であることを示せばよい。$\Gamma(1)$ は 18 頁の S, T で生成されていたが、$F(z+1) = F(z)$ は明らかだから

$$F\left(\frac{-1}{z}\right) = z^{12}F(z) \tag{1.16}$$

を証明すればよい。そのためにウェイト 2 の「Eisenstein 級数」

$$G_1(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z} \\ n=0\ \text{のとき}\ m\neq 0}} \frac{1}{(mz+n)^2}$$

を導入する (無限和は条件収束している)。これは保型形式にはならないが

$$G_1\left(\frac{-1}{z}\right) = z^2G_1(z) - 2\pi iz$$

を満たす。これと関係

$$\frac{dF}{F} = \frac{dq}{q}\Big(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big)$$

を組み合わせて

$$\frac{dF(-1/z)}{F(-1/z)} = \frac{dF(z)}{F(z)} + 12\frac{dz}{z}$$

が示せる。これから $F(-1/z)$ は $z^{12}F(z)$ の定数倍であり、$z=i$ での値を比較して (1.16) を得る。 □

系 1.6.5. (i) Δ は ∞ で 1 位の零点を持ち、それ以外の (1.7) の基本領域 $\overline{\Omega}$ の元では極も零点も持たない。
(ii) $j(z) = 1728g_2(z)^3/\Delta(z)$ は $\Gamma(1)$ の保型函数で、∞ で 1 位の極を持ち、それ以外の $\overline{\Omega}$ の元で正則。$(1728 = 2^6 \cdot 3^3)$
(iii) $j : \Gamma\backslash\mathfrak{H}^* \to \mathbf{P}_1(\mathbb{C})$ は Riemann 面の同型。

証明. (i) は上の定理から明らかである。(ii) も g_2^3 と Δ が共にウェイト 12 の保型形式であることと、(i) から直ちに従う。

(iii) $j : \Gamma\backslash\mathfrak{H}^* \to \mathbf{P}_1(\mathbb{C})$ は定数でない有理型函数であるから、あとはその被覆次数が 1 であることを言えばよい。これは $f^{-1}(\infty)$ が（重複も込めて）∞ のみであるから明らか。 □

注意 1.6.6. (i) $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ 上の有理型函数は有理函数のみであったから、$\Gamma(1)$ の任意の保型函数は上の $j(z)$ の有理函数である。
(ii) $j(z)$ は Fourier 展開

$$j(z) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

を持つ。関連した話題については [金子 01] を見られるとよい。

命題 1.6.7 ($\Gamma(1)$ の保型形式環). (i) $k < 0$ または $k = 1$ のとき $M_{2k}(\Gamma(1)) = \{0\}$.
(ii) $k = 0$ のとき $M_0(\Gamma(1)) = \mathbb{C}$, $k = 2, 3, 4, 5$ のとき $M_{2k}(\Gamma(1)) = \mathbb{C} \cdot G_k$.
(iii) $M_{2k-12}(\Gamma(1)) \ni f \xrightarrow{\sim} \Delta \cdot f \in S_{2k}(\Gamma(1))$ は線型同型。
(iv) $M(\Gamma(1)) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M_{2k}(\Gamma(1))$ は明らかな次数環の構造を持つが、$M(\Gamma(1)) = \mathbb{C}[G_2, G_3]$ (二変数多項式環) である。

証明. (i), (ii) は G_k がウェイト $2k$ の非自明な保型形式であることと例 1.4.5 からすぐわかる。(iii) は $k \geq 6$ のとき $S_{2k}(\Gamma(1)) \ni f \mapsto \Delta^{-1}f \in M_{2k-12}(\Gamma(1))$ が定義可能なことのみ確かめればよいが、それはカスプ形式の定義と系 1.6.5 (i) から明らかである。

(iv) ここまでの結果により $\mathbb{C}[X, Y] \ni f(X, Y) \mapsto f(G_2, G_3) \in M(\Gamma(1))$ は全射環準同型である。これが単射でないとすると、$G_2^3/G_3^2 \in \mathbb{C}(\Gamma(1)\backslash\mathfrak{H}^*)$ は $\mathbb{C}$ 上代数的で $\mathbb{C}$ は代数閉体だから G_2^3 は G_3^2 の定数倍のはずだが、これは命題 1.6.3 から誤りである。 □

τ 函数と Mordell の結果　$(2\pi)^{-12}\Delta(z)$ の Fourier 係数 $\tau(n)$ を *Ramanujan* **の τ 函数**という。

$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n.$$

$$\tau(1) = 1,\ \tau(2) = -24,\ \tau(3) = 252,\ \tau(4) = -1472,\ \tau(5) = 4830,\ \tau(6) = -6048$$
$$\tau(7) = -16744,\ \tau(8) = 84480,\ \tau(9) = -113643,\ \tau(10) = -115920$$

この $\tau(n)$ は次のような乗法性を満たす。

(i) n, m が互いに素なとき $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$.

(ii) p が素数で $n \geq 2$ のとき漸化式 $\tau(p^{n+1}) = \tau(p)\tau(p^n) - p^{11}\tau(p^{n-1})$ が成り立つ。

$\Delta(z)$ に付随する L **函数**を

$$L(s, \Delta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$$

と定めれば、これは $\Re s$ が十分大きいところで絶対収束し、s の整型函数に解析接続される。上の乗法性はこれが *Euler* **積展開**

$$L(s, \Delta) = \prod_{p;\ \text{素数}} \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}}$$

を持つことを意味する。

1.7　補足—保型線束

Riemann 面 X 上の**線束** *(line bundle)* とは、複素多様体の写像 $\pi : L \to X$ であってある X の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ に対して同型 $\pi^{-1}(U_i) \simeq \mathbb{C} \times \varphi_i(U_i)$ が与えられているもののことだった。開部分集合 $U \subset X$ 上の L の**切断** *(section)* とは、整型写像 $f : U \to L$ であって $\pi \circ f = \mathrm{id}_U$ を満たすものである。それらのなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $\Gamma(U, L)$ と書く。U が十分小さく $L|_U$ が自明なとき、つまり $\pi^{-1}(U) \simeq \mathbb{C} \times U$ のときには $\Gamma(U, L)$ は U 上の整型函数の空間に他ならない。

$X = \Gamma \backslash \mathfrak{H}$ の状況に戻る。$\pi : L \to X$ が線束ならば明らかに射影 $p : \mathfrak{H} \twoheadrightarrow X$ による引き戻し

$$p^*(L) := \{(z, v) \in \mathfrak{H} \times L \mid p(z) = \pi(v)\}$$

は第一成分への射影によって $\mathfrak{H}$ 上の線束である。これには Γ が

$$\gamma : p^*(L) \ni (z, v) \longmapsto (\gamma.z, v) \in p^*(L), \quad \gamma \in \Gamma$$

によって作用している。今、この $p^*(L)$ の**自明化** *(trivialization)*、すなわち同型 $i : \mathfrak{H} \times \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} p^*(L)$ が与えられたとする。$(z, w) \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ に対して $J(\gamma, z) \in \mathbb{C}^\times$ があって

$$\gamma.(z, w) = (\gamma.z, J(\gamma, z)w)$$

と書けるが、これが Γ の作用であることから

$$(\gamma\gamma'.z, J(\gamma\gamma', z)w) = \gamma\gamma'.(z, w) = \gamma.(\gamma'.z, J(\gamma', z)w) = (\gamma\gamma'.z, J(\gamma, \gamma'.z)J(\gamma', z)w)$$

すなわち**コサイクル関係式**

$$J(\gamma, \gamma'.z)J(\gamma', z) = J(\gamma\gamma', z), \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma \tag{1.17}$$

が成り立つ。一般に函数 $J : \Gamma \times \mathfrak{H} \to \mathbb{C}^\times$ であって

- $\forall\gamma\in\Gamma$ に対して $\mathfrak{H}\ni z\mapsto J(\gamma,z)\in\mathbb{C}$ は整型。
- J はコサイクル関係式 (1.17) を満たす。

なるものを Γ に対する**保型因子** *(automorphy factor)* と呼ぶ。

命題 1.7.1. $X=\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上の線束 L と $p^*(L)$ の自明化 $i:\mathfrak{H}\times\mathbb{C}\xrightarrow{\sim}L$ の対 (L,i) の同型類と Γ の保型因子は一対一に対応する。

証明. (L,i) から保型因子 J は上のように構成される。逆に $\gamma\in\Gamma$ の $\mathfrak{H}\times\mathbb{C}$ への作用を保型因子 J で

$$\gamma.(z,v):=(\gamma.z,J(\gamma,z)v),\quad z\in\mathfrak{H},\,v\in\mathbb{C}$$

と捻れば、この作用についての商 $L:=\Gamma\backslash(\mathfrak{H}\times\mathbb{C})\to\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ は X 上の線束である。 $\square$

第2章　アデール群への移行

この章では楕円保型形式や Hilbert 保型形式が $GL(2)$ のアデール群上の函数と見なせることを解説する。

2.1　古典論の問題点

　まずは 1 章の内容をさっと思い出そう。

$$\mathfrak{H} := \{z = x + iy \,|\, x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}_{>0}\} \quad \text{((Poincaré) 上半平面)}$$

には、$SL(2,\mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, \det g = 1\}$ が一次分数変換

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

で作用していた。特に $SL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群も $\mathfrak{H}$ に作用するが、離散部分群 $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{R})$ はその作用で上半平面を割った空間 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ が有限な体積 (測度) を持つとき**第 *1* 種 *Fuchs* 群**というのだった。$\Gamma(1) = SL(2,\mathbb{Z})$ などを見ればわかるようにその場合にも $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ はコンパクトとは限らない。第 1 種 Fuchs 群 $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{R})$ に対して $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ は Riemann 面の構造を持ち、それに有限個の点 (**カスプ**と呼ばれる) を付け加えてコンパクト Riemann 面にできる。特にその上の正則、有理型函数などが考えられる。函数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ が Γ に対するウェイト $2k$ の**保型形式 (modular form)** とは、

(i) $f(\gamma.z) = (cz+d)^{2k} f(z)$, $(\forall\gamma \in \Gamma,\, z \in \mathfrak{H})$。

(ii) f は $\mathfrak{H}$ 上正則。

(iii) f は Γ のカスプで正則。

となることだった。それらの空間を $M_{2k}(\Gamma)$ と書いていた。さらに f が全てのカスプで零点を持つとき、f は**カスプ形式**と呼ばれていた。Γ に対するウェイト $2k$ のカスプ形式の空間を $S_{2k}(\Gamma)$ と書くのだった。

　1 章では Riemann 面上の複素解析を用いて $M_{2k}(SL(2,\mathbb{Z}))$ を調べた。特に $\cot z$ の Laurent 展開を用いて次を得た。

命題 2.1.1 (命題 1.6.7). $M(SL_2(\mathbb{Z})) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M_{2k}(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[G_2, G_3]$ (二変数多項式環) である。ただし、G_2, G_3 はそれぞれウェイト 4, 6 の Eisenstein 級数である。

$$G_k(z) := \sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{(az+b)^{2k}}$$

さて整数論の目的のためには Γ が数論的部分群、つまり $SL_2(\mathbb{Q})$ または総実体上の不定四元数体の乗法群 $D^\times$ 内の合同式で定義される部分群の場合のみが重要である。特に現代整数論においては、数論的部分群 Γ たちに対する $X_\Gamma = \Gamma\backslash\mathfrak{H}$ に数論多様体の構造を入れ、エタール被覆からなる射影系

$$\varprojlim_{\Gamma} X_\Gamma$$

への $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の作用を調べることが主たる目的となる。このためには任意に小さい数論的部分群 $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ に対する $M_{2k}(\Gamma)$ の分析が必要になるが、そうした情報をこれまで見てきたような複素解析的な手法から得るのは難しい。示せることと言えば $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{Z})$ が指数有限部分群の場合に、$M_{2k}(\Gamma)$ が *Poincaré* **級数**

$$\varphi_n(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma_0\backslash\Gamma} (cz+d)^{-2k} \exp\Bigl(\frac{2\pi i\cdot n(\gamma.z)}{h}\Bigr), \quad n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

たちで張られるということくらいである。ここで

$$\Gamma_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, n\in\mathbb{Z} \right\}$$

は Γ 内の上三角な元からなる部分群である。$M_{2k}(\Gamma)$ の次元は有限であった (定理 1.4.1) から Poincaré 級数たちは線型従属なのだが、それらから $M_{2k}(\Gamma)$ の基底を作り出すことも難しい。

2.2 Hecke 理論

こうしたレベルの深い数論的部分群 Γ に対する $M_{2k}(\Gamma)$ の記述の端緒を与えたのが、Hecke の理論である。$N\in\mathbb{N}$ を止め、Γ としてレベル N の主合同部分群

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, \begin{matrix} a\equiv d\equiv 1 \pmod N \\ b\equiv c\equiv 0 \pmod N \end{matrix} \right\}$$

を考える。このとき N の約数でない素数 p に対して *Hecke* **作用素** $T_p \in GL_{\mathbb{C}}(S_{2k}(\Gamma))$ が定まって、次が成り立つ。

定理 2.2.1 (Hecke 理論). (i) T_p, $(p\nmid N)$ たちは互いに可換な $S_{2k}(\Gamma)$ 上の正規作用素。従って $S_{2k}(\Gamma)$ はそれらの同時固有函数からなる基底を持つ。
(ii) T_p, $(p\nmid N)$ たちの $S_{2k}(\Gamma)$ における各同時固有空間は 1 次元。

これらの結果は一般に Hecke 理論と呼ばれるが、実際には Hecke の結果のみではなく彼以後のの多くの研究者の手になる結果も含んでいる。その端緒を与えたという理由により Hecke の名が冠されているのである。特に (ii) は Jacquet-Langlands による GL_2 上の保型形式に対する**強重複度一定理**の特別な場合であり [JL70]、その証明は保型表現論によるほかない。この章の目的はこうした結果を正確に解説することである。そこでまずこの節ではこれらの理論を展開するために最適なアデール群の設定に舞台を移す過程を解説する [Gel75, §§ 2, 3]。

2.3　上半平面から $SL(2,\mathbb{R})$ へ

Γ を $G'(\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})$ 内の第 1 種 Fuchs 群とする。ここでは 1.3.3 節の解析同相 (1.4)

$$G'(\mathbb{R})/\mathbf{K}'_\infty \ni \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \mathbf{K}'_\infty \overset{\sim}{\longmapsto} x + yi \in \mathfrak{H}$$

を用いて $S_{2k}(\Gamma)$ の元を $G'(\mathbb{R})$ 上の函数に持ち上げる。まずは Lie 群と Lie 環について必要な事項を簡単に復習しておこう。

2.3.1　Lie 環と Lie 群

実 *Lie* **環**とは、$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ と**ブラケット積**と呼ばれる双線型写像 $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の対であって、

- 交代性 $[Y,X] = -[X,Y],\ \forall X,Y \in \mathfrak{g}$ および
- *Jacobi* **恒等式**
$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

を満たすもののことだった。通常はブラケットを省略して $\mathfrak{g}$ のみで Lie 環を表す。係数体を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ に取り替えて**複素** *Lie* **環**も同様に定義できる。特に実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ は複素 Lie 環になるが、これを $\mathfrak{g}$ の**複素化** *(compexification)* と呼ぶ。

例 2.3.1. (i) n 次正方行列の空間 $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ にブラケットを

$$[X,Y] := XY - YX$$

で定めたものは実 Lie 環である。これを $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ と書く。同様に n 次正方複素行列の空間 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ も複素 Lie 環となり、$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ と書かれる。$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ の複素化は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ である。
(ii) $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ の部分空間

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}X = 0\}$$

は実 Lie 環である。同様にその複素化 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ も定義される。

問 2.1. 上の例の $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ がそれぞれ Lie 環になることを確かめよ。

Lie 群の定義を簡潔に思い出しておこう。n 次元**可微分多様体** *(smooth manifold)* とは Hausdorff 位相空間 M とその上の n 次元**可微分構造**、すなわち座標近傍系と呼ばれる族 $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$

(i) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は M の開被覆。

$$M=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha.$$

(ii) $\phi_\alpha:U_\alpha\to\mathbb{R}^n$ は連続開写像で、$\alpha,\beta\in A$ に対して

$$\phi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\xrightarrow{\phi_\alpha^{-1}}U_\alpha\cap U_\beta\xrightarrow{\phi_\beta}\phi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

は C^∞ 級写像であるもの。

の同値類の対のことだった。ただし、二つの座標近傍系 $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, $\{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ が**同値**とは、それらの合併が再び座標近傍系の条件を満たすこととする。可微分構造は M 上の可微分函数の概念を定めるのだった。$C^\infty(M)$ で M 上の C^∞ 級函数の空間を表す。群 G が可微分多様体の構造を持ち、しかも演算 $G\times G\ni(g,h)\mapsto gh\in G$ および逆元を取る写像 $G\ni g\mapsto g^{-1}\in G$ が C^∞ 級写像であるとき、これを *Lie* **群**と呼ぶ。

例 2.3.2. 可逆な n 次正方実行列たちのなす群 $GL(n,\mathbb{R})$ は埋め込み

$$\iota:GL(n,\mathbb{R})\ni\begin{pmatrix}g_{1,1}&g_{1,2}&\cdots&g_{1,n}\\g_{2,1}&g_{2,2}&\cdots&g_{2,n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\g_{n,1}&g_{n,2}&\cdots&g_{n,n}\end{pmatrix}\longmapsto(g_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in\mathbb{R}^{n^2}$$

によって $\mathbb{R}^{n^2}$ の位相から誘導される位相に関して *Hausdorff* 位相空間になる。さらにその任意の開部分集合 U に対して上の埋め込みの制限を取って得られる座標近傍系 $\{(U,\iota|_U)\}_U$ の定める可微分構造に関して *Lie* 群になる。

問 2.2. 上の例を参考にして $SL(n,\mathbb{R}):=\{g\in GL(n,\mathbb{R})\mid\det g=1\}$ が Lie 群になることを示せ (可微分多様体であることも確かめよ)。

Lie 群には次のようにして Lie 環が付随する。まず n 次元可微分多様体 M 上のベクトル場たちのなす Lie 環を思い出そう。$x\in M$ での C^∞ 級函数の芽の空間を $\mathcal{F}_x$ と書く。線型写像 $D:\mathcal{F}_x\to\mathbb{R}$ で Leibnitz の規則

$$D(fg)=Df\cdot g(x)+f(x)Dg,\quad f,\,g\in\mathcal{F}_x$$

を満たすものたちの空間を M の x での**接空間** *(tangent space)* と呼び、T_xM と書く。x の座標近傍 (U,ϕ) を取れば、T_xM は

$$\partial^i_{\phi,x}:\mathcal{F}_x\ni f\longmapsto\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(x))\in\mathbb{R},\quad(1\le i\le n)$$

(ただし $(x_1,\dots,x_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の標準座標) たちで張られる n 次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間である。これらの合併

$$TM := \bigcup_{x\in M} T_xM$$

は 1.7 節でも触れた M 上のベクトル束の構造を持つ。その C^∞ 級切断のことを M 上の可微分ベクトル場という。もっと具体的に言うと、M の開部分集合 U 上の**可微分ベクトル場** *(smooth vector field)* とは函数 $X : U \ni x \mapsto X_x \in T_xM$ であって、任意の $x \in U$ の座標近傍 (V,ϕ) を使って

$$X_y = \xi_1(\phi(y))\partial^1_{\phi,y} + \cdots + \xi_n(\phi(y))\partial^n_{\phi,y}, \quad \forall y \in V$$

と書いたときの係数 ξ_i たちが $\phi(V)$ 上の C^∞ 級函数になるもののことである。U 上のベクトル場 X と U 上の C^∞ 級函数 $f \in C^\infty(U)$ に対して、

$$Xf(x) := X_xf, \quad x \in U \quad (f \text{ の } X \text{ による } \mathit{Lie}\ \textbf{微分})$$

は再び $C^\infty(U)$ の元である。さて、$\mathfrak{X}_M$ で M 上の可微分ベクトル場全体のなすベクトル空間を表す。$X, Y \in \mathfrak{X}_M$ のブラケット積を

$$[X,Y]_xf := X_x(Yf) - Y_x(Xf), \quad f \in \mathcal{F}_x$$

と定めれば、これに関して $\mathfrak{X}_M$ は実 Lie 環になる。

問 2.3. $\mathfrak{X}_M$ が実 *Lie* 環になることを確かめよ。

可微分多様体の間の C^∞ 級写像 $f : M \to N$ はそれらの接空間の間に線型写像

$$df : T_xM \ni D \longmapsto (\phi \mapsto D(\phi\circ f)) \in T_{f(x)}N$$

を定める。これを f の**微分** *(differential)* と呼ぶ。今、G を Lie 群とする。$g \in G$ は C^∞ 級写像 $L(g) : G \ni x \longmapsto gx \in G$ (**左移動作用** *(left translation)* と呼ばれる) で G 自身に作用しており、$C^\infty(G)$ にも引き戻し $L(g)f(x) := f(g^{-1}x)$, $(f \in C^\infty(G))$ で作用する。$X \in \mathfrak{X}_G$ が**左不変**とは、

$$dL(g)(X_x) = X_{gx}, \quad \forall g,\, x \in G$$

となることだった。G 上の左不変可微分ベクトル場の全体のなす $\mathbb{R}$ ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{X}_G$ のブラケットについて閉じており、特に実 Lie 環になる。これを *Lie* **群** G **の** *Lie* **環**と呼ぶ。定義から任意の $X \in \mathfrak{g}$ は X_1 で決まる: $X_g = dL(g)(X_1)$ ので $\mathfrak{g} \ni X \overset{\sim}{\mapsto} X_1 \in T_1G$ は線型同型である。さらに指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ が次のように定義される。C^∞ 級準同型 $\phi : \mathbb{R} \to G$ を G の**一変数部分群** *(1-parameter subgroup)* と呼ぶ。

補題 2.3.3. $\mathfrak{g}$ と G の一変数部分群の集合の間には全単射: $X \mapsto (t \mapsto e_X(t))$ がある。

証明. (スケッチ。詳しくは[森田96, 1.4], [War71, 定理1.48]などを参照。) まず一変数部分群 ϕ に対しては $T_1(G)$ の元

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_1 : \mathcal{F}_1 \ni f \longmapsto \left.\frac{d(f\circ\phi)}{dt}\right|_{t=0} \in \mathbb{R}$$

が定まる。これを $(d\phi/dt)_g := dL(g)(d\phi/dt)_1$ によって G 全体に延ばして $(d\phi/dt) \in \mathfrak{g}$ が得られる。

逆に $X \in \mathfrak{g}$ に対しては微分方程式

$$\frac{d(f\circ e_X)}{dt} = X_{e_X(t)} f$$

の解 $e_X : \mathbb{R} \to G$ を対応させる。局所座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ を使って $e_X(t) = (e_1(t), \ldots, e_n(t))$ などと書けば、合成函数の微分の計算からこれは

$$\sum_{i=1}^n \frac{de_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \xi_i(e_X(t))\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

(ただし $X_g = \sum_{i=1}^n \xi_i(g)(\partial/\partial x_i)$ と書いた) となる。f は任意だから結局、常微分方程式 $de_i/dt = \xi_i(e_X(t))$ を解くことになる。ところが X は左不変だから

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \xi_i(\phi(t))\frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(t)) =& X_{\phi(t)}f = (dL(\phi(t))X)_{\phi(t)}f = X_1(L(\phi(t)^{-1})f) \\ =& \sum_{i=1}^n \xi_i(1)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(t))\end{aligned}$$

となって、係数 ξ_i は定数でありそのような解は一意に存在する。 □

この対応を使って**指数写像**を $\exp : \mathfrak{g} \ni X \mapsto e_X(0) \in G$ と定める。

例 2.3.4. (i) 例2.3.2の $GL(n,\mathbb{R})$ のLie環は例2.3.1の $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ である。実際、指数写像

$$\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \ni X \longmapsto \sum_{k=0}^\infty \frac{X^k}{k!} \in GL(n,\mathbb{R})$$

を使って

$$X_g f := \left.\frac{d}{dt}f(g\exp tX)\right|_{t=0}$$

と定めれば、これは $GL(n,\mathbb{R})$ 上の左不変ベクトル場になっており (右移動の微分だから左移動と可換になる)、これが $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ と $GL(n,\mathbb{R})$ のLie環との同一視を与える。
(ii) 同様に $SL(n,\mathbb{R})$ のLie環は $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ である。

問 2.4. 上の例の (ii) を確かめよ。すなわち (i) で与えた $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ から $GL(n,\mathbb{R})$ のLie環への写像が $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ から $SL(n,\mathbb{R})$ のLie環へのLie環の同型 (線型同型でブラケット積を保つもの) を与えることを確かめよ。

2.3.2 普遍包絡環と Casimir 作用素

実 Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を考える。共役作用 $\mathrm{Ad}(g) : G \ni x \mapsto gxg^{-1} \in G$, $(g \in G)$ の微分は

$$\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} T_1G \xrightarrow{d(\mathrm{Ad}(g))} T_1G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$$

により、G の**随伴表現** *(adjoint representation)* $\mathrm{Ad} : G \to GL_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ を与える ($\mathrm{Ad}(g)$ は G の自己同型なので左不変ベクトル場を左不変ベクトル場に移す)。$X, Y \in \mathfrak{g}$ および $f \in \mathcal{F}_1$ に対しては、指数写像の定義から

$$\begin{aligned}
[X,Y]_1 f =& X_1(Yf) - Y_1(Xf) = \frac{d}{dt}\big(Yf(\exp tX) - Xf(\exp tY)\big)\Big|_{t=0} \\
=& \frac{d}{dt}\big(Y_{\exp tX} f - X_{\exp tY} f\big)\Big|_{t=0} \\
=& \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds} f(\exp tX \exp sY)\Big|_{s=0}\right)\Big|_{t=0} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds} f(\exp tY \exp sX)\Big|_{s=0}\right)\Big|_{t=0} \\
=& \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}\big(f(\exp tX \exp sY) - f(\exp sY \exp tX)\big)\Big|_{s=0}\right)\Big|_{t=0} \\
=& \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Bigg(\frac{d}{ds}\big(f(\exp tX \exp sY) - f(\exp sY \exp tX)\big)\Big|_{s=0} \\
& \qquad\qquad - \frac{d}{ds}\big(f(\exp sY) - f(\exp sY)\big)\Big|_{s=0}\Bigg) \\
=& \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{d}{ds}\big(f(\exp tX \exp sY \exp(-tX)) - f(\exp sY)\big)\Big|_{s=0}\right) \\
=& \frac{d}{dt} Y_1(f \circ \mathrm{Ad}(\exp tX))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\big(\mathrm{Ad}(\exp tX)Y\big)_1 f\Big|_{t=0}
\end{aligned}$$

である。すなわち

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp tX)Y\Big|_{t=0} = [X,Y], \quad X,\, Y \in \mathfrak{g} \tag{2.1}$$

が成り立つ。これから特に

$$\mathrm{Ad}(g)[X,Y] = [\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y], \quad g \in G,\ X,\, Y \in \mathfrak{g} \tag{2.2}$$

が従う。

さて、V を有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする。V のテンソル積たちの直和

$$T(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(V), \quad T^n(V) := \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{n\text{ 個}}$$

に積 $T(V) \times T(V) \ni (x,y) \mapsto x \otimes y \in T(V)$ を定めて得られる $\mathbb{C}$ 代数を V の**テンソル代数**という。有限次元複素 Lie 環 $\mathfrak{g}$ のテンソル代数を

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X,Y], \quad X,\, Y \in \mathfrak{g}$$

たちの張る両側イデアル $I_{\mathfrak{g}}$ で割って得られる商 $\mathbb{C}$ 代数 $U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**普遍包絡環** *(universal enveloping algebra)* または**展開環**という。実 Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の複素化の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ は定義から G 上の左不変微分作用素環と同一視される。一方 G は随伴表現のテンソル積で各 $T^n(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, 従って $T(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ に作用し、しかも (2.2) から $I_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ はその作用で不変である。これから G の $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ への作用が定まるが、これを再び Ad で表す。G 上の調和解析で重要な役割を果たすのは不変微分作用素環、すなわち $\mathfrak{Z}(G) := U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathrm{Ad}(G)}$ である。G が連結な場合などには $\mathfrak{Z}(G)$ は $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の中心 $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ に一致する。その元の代表的なものが次の Casimir 作用素である。

　$\mathfrak{g}$ を有限次元実 Lie 環とする。(2.1) に動機づけられて $\mathrm{ad}(X)Y := [X, Y]$, $(X, Y \in \mathfrak{g})$ と定めれば、これは Lie 環の準同型

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

を与える ($\mathfrak{g}$ の**随伴表現**と呼ばれる)。$\mathfrak{g}$ 上の双線型形式

$$B : \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \ni X \otimes Y \longmapsto \mathrm{tr}(\mathrm{ad}X \mathrm{ad}Y) \in \mathbb{R}$$

を $\mathfrak{g}$ 上の *Killing* **形式**という。これは

(i) 対称: $B(X, Y) = B(Y, X)$, $(X, Y \in \mathfrak{g})$;

(ii) $\mathfrak{g}$ 不変: $B(\mathrm{ad}(X)Y, Z) = -B(Y, \mathrm{ad}(X)Z)$, $(X, Y, Z \in \mathfrak{g})$.

を満たす。Killing 形式がさらに非退化なとき、$\mathfrak{g}$ は**半単純** *(semisimple)* であると言われる。

　(有限次元) 半単純実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ を取り、それに関する非退化二次形式 B の表現対称行列 $(B(X_i, X_j))_{i,j}$ の逆行列を $(B^{i,j})_{i,j}$ と書く。このとき

$$\Delta := \sum_{1 \le i,j \le n} B^{i,j} X_i X_j \in U(\mathfrak{g})$$

を $\mathfrak{g}$ の *Casimir* **元**という。これは作り方から基底 $\{X_1, \ldots, X_n\}$ の取り方によらず、$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ に属する。Lie 群 G はその Lie 環 $\mathfrak{g}$ が半単純なとき**半単純**であると言われる。連結半単純 Lie 群 G に対して $\mathfrak{g}$ の Casimir 元 Δ は G 上の不変微分作用素の環 $\mathfrak{Z}(G)$ の元である。これを G の *Casimir* **作用素**という。

問 2.5. 有限次元 Lie 環の $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ が Lie 環準同型であることを確かめよ。

問 2.6. (i) n 次正方行列 X, Y に対して $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$ を示せ。
(ii) 有限次元実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B が対称であることを確かめよ。
(iii) 同様に B が $\mathfrak{g}$ 不変であることを確かめよ。

問 2.7. (i) 有限次元半単純実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Casimir 元 $\Delta \in U(\mathfrak{g})$ の定義が、$\mathfrak{g}$ の基底の取り方によらないことを確かめよ。
(ii) さらに $\Delta \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ を確かめよ。

例 2.3.5. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の基底 $\{X_1,X_2,X_3\}$ として

$$U:=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

を取れば、

$$\mathrm{ad}(U)\begin{pmatrix}y&x\\z&-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(x+z)&2y\\2y&x+z\end{pmatrix},\quad \mathrm{ad}(V)\begin{pmatrix}y&x\\z&-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z-x&-2y\\2y&x-z\end{pmatrix},$$
$$\mathrm{ad}(H)\begin{pmatrix}y&x\\z&-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2x\\-2z&0\end{pmatrix}$$

だから、座標 (x,y,z) についての行列表示

$$\mathrm{ad}(U)=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&0&-1\\0&2&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{ad}(V)=\begin{pmatrix}0&-2&0\\-1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{ad}(H)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

を得る。これからすぐわかるように

$$(B(X_i,X_j))_{i,j}=\begin{pmatrix}-8&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{pmatrix}$$

だから、$\Delta=(-U^2+V^2+H^2)/4$ である。$G'(\mathbb{R})$ 上の微分作用素としては、岩澤分解

$$g=\begin{pmatrix}y^{1/2}&xy^{-1/2}\\0&y^{-1/2}\end{pmatrix}k(\theta),\quad k(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

の座標を使って

$$\Delta=-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-y\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta} \tag{2.3}$$

と書ける[1]。

2.3.3 カスプ形式の $G'(\mathbb{R})$ への持ち上げ

さて、$S_{2k}(\Gamma)$ の $G'(\mathbb{R})$ への持ち上げに話を戻そう。保型因子 $j(g,z)=1/(cz+d)$, $(g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in G'(\mathbb{R}))$ を思い出す。$g_i=\left(\begin{smallmatrix}a_i&b_i\\c_i&d_i\end{smallmatrix}\right)$, $(i=1,\,2)$ とすれば

$$j(g_1g_2,z)=\frac{1}{(c_1a_2+d_1c_2)z+c_1b_2+d_1d_2}$$

なので、$j(g,z)$ はコサイクル関係式

$$j(g_1,g_2.z)j(g_2,z)=\frac{c_2z+d_2}{c_1(a_2z+b_2)+d_1(c_2z+d_2)}\frac{1}{c_2z+d_2}=j(g_1g_2,z) \tag{2.4}$$

を満たす (1.7 節 (1.17) 参照)。

[1]直接計算でも証明できる。定義から $\mathfrak{g}$ の実 Lie 環としての Casimir 元と $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の複素 Lie 環としての Casimir 元は一致する。後でこれを使って、$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の Casimir 元として (2.3) を証明する予定である。

滑らかな (C^∞ 級) 函数 $\phi : G'(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ で条件

(i) $\phi(\gamma g) = \phi(g)$, $\forall \gamma \in \Gamma$, $g \in G'(\mathbb{R})$;

(ii) $\phi(gk(\theta)) = e^{-2ki\theta}\phi(g)$, $\forall g \in G'(\mathbb{R})$, $k(\theta) \in \mathbf{K}'_\infty$;

(iii) $\Delta\phi = -k(k-1)\phi$;

(iv) ϕ は $G'(\mathbb{R})$ 上有界;

(v) ϕ は**カスプ的**、すなわち Γ の任意のカスプ $c = g_c.\infty$, ($\exists g_c \in G'(\mathbb{R})$, 1.3.3 節参照) に対して、その Γ での固定化群を ($\pm\mathbf{1}_2$ を除いて)

$$\Gamma_c = \mathrm{Ad}(g_c)\left\{ \begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \exists h > 0$$

と書くとき

$$\int_0^1 \phi\Big(g_c \begin{pmatrix} 1 & xh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big)\, dx = 0, \quad \forall g \in G'(\mathbb{R}) \tag{2.5}$$

が成り立つ。

を満たすものたちの空間を $\mathcal{A}_0(\Gamma, 2k)$ と書く。

命題 2.3.6. 写像

$$S_{2k}(\Gamma) \ni f \longmapsto \phi_f(g) := f(g.i)j(g,i)^{2k} \in \mathcal{A}_0(\Gamma, 2k)$$

は定義可能な線型同型。

証明. まず写像が定義可能なことを示そう。$f \in S_{2k}(\Gamma)$ を固定する。ϕ_f が滑らかなことは明らか。

(i) は

$$\begin{aligned}\phi_f(\gamma g) =& f(\gamma.(g.i))j(\gamma g, i)^{2k} = f(g.i)j(\gamma, g.i)^{-2k}j(\gamma g, i)^{2k} \\ &\overset{(2.4)}{=} f(g.i)j(g,i)^{2k} = \phi_f(g)\end{aligned}$$

となって確かめられる。

(ii) も (2.4) から従う。

$$\phi_f(gk(\theta)) = f(gk(\theta).i)j(gk(\theta),i)^{2k} = f(g.i)j(g,i)^{2k}j(k(\theta),i)^{2k} = e^{-2ki\theta}\phi_f(g)$$

ここで $j(k(\theta), i) = (i\sin\theta + \cos\theta)^{-1} = e^{-i\theta}$ を使った。

(iii) を示すには、岩澤分解の座標を使う。

$$\phi_f\Big(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} k(\theta)\Big) = e^{-2ki\theta}y^k f(x+yi) \tag{2.6}$$

および

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}y^k f(x+yi) = \frac{\partial}{\partial y}\left(ky^{k-1}f(x+yi)+y^k\frac{\partial}{\partial y}f(x+yi)\right)$$
$$= k(k-1)y^{k-2}f(x+yi)+2ky^{k-1}\frac{\partial}{\partial y}f(x+yi)+y^k\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x+yi)$$

に注意して

$$\begin{aligned}\varDelta\phi_f(g) &= \left(-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-y\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}\right)e^{-2ki\theta}y^k f(x+yi)\\ &= -y^2e^{-2ki\theta}y^k\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x+yi)-y^2e^{-2ki\theta}\frac{\partial^2}{\partial y^2}y^k f(x+yi)\\ &\qquad\qquad +y(2ki)e^{-2ki\theta}y^k\frac{\partial}{\partial x}f(x+yi)\\ &= -e^{-2ki\theta}y^{k+2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x+yi)+2kie^{-2ki\theta}y^{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x+yi)\\ &\qquad\qquad -k(k-1)y^k e^{-2ki\theta}f(x+yi)\end{aligned}$$

がわかる。ここで $z=x+iy$ と書けば

$$\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}=2\frac{\partial}{\partial\bar{z}},\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}$$

であるから、$f(z)$ の正則性より右辺の一行目は消えて (iii) を得る。

(iv) は (2.6) がコンパクト Riemann 面 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ 上の連続函数であることから明らか。

(v) Γ のカスプ $c:=g_c.\infty$ を上の通りとすれば、f がカスプ形式であることから c での Fourier 展開

$$f(g_c.z)j(g_c,z)^{2k}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp\Bigl(\frac{2\pi inz}{h}\Bigr)$$

の定数項 a_0 は消えている。この右辺は絶対収束しているからコンパクト集合上の積分と交換できて、これは

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^1\exp\Bigl(\frac{2\pi in(z+xh)}{h}\Bigr)\,dx=\int_0^1 f(g_c.(z+xh))j(g_c,z+xh)^{2k}\,dx$$

に同値である。今、$g\in G'(\mathbb{R})$ に対して $g.i=z$ と書けば、

$$\begin{aligned}\int_0^1\phi_f\Bigl(g_c\begin{pmatrix}1 & xh\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\Bigr)\,dx &= \int_0^1 f\Bigl(g_c\begin{pmatrix}1 & xh\\ 0 & 1\end{pmatrix}.z\Bigr)j\Bigl(g_c\begin{pmatrix}1 & xh\\ 0 & 1\end{pmatrix}g,i\Bigr)^{2k}\,dx\\ &= \int_0^1 f(g_c.(z+xh))j(g_c,z+xh)^{2k}\,dx\cdot j(g,i)^{2k}=0\end{aligned}$$

となって (v) が従う。

$f \mapsto \phi_f$ は明らかに単射だから、後は全射性を示せばよい。それには

$$\mathcal{A}_0(\Gamma, 2k) \ni \phi \longmapsto f(g.i) := \phi(g)j(g,i)^{-2k} \in S_{2k}(\Gamma)$$

が定義可能な線型写像であることを見ればよい。上の議論を逆にたどることにより、$S_{2k}(\Gamma)$ の条件のうち保型性、カスプで消えていることは直ちにわかる。問題は条件 (ii), (iii) から f の正則性が従うことだが、このメカニズムについては後に $GL(2,\mathbb{R})$ の既約表現を記述する際に解説することにしよう。 □

こうしてカスプ形式たちは $\Gamma\backslash G'(\mathbb{R})$ 上の函数に持ち上がった。$\mathcal{A}_0(\Gamma, 2k)$ を拡張して、$G'(\mathbb{R})$ 上の Γ に関する保型形式を次のように定義する。$G'(\mathbb{R})$ 上の函数 ϕ が**右 $\mathbf{K}'_\infty$ 有限**とは、

$$R(k)\phi : G'(\mathbb{R}) \ni g \longmapsto \phi(gk) \in \mathbb{C}, \quad (k \in \mathbf{K}'_\infty)$$

たちが生成する $\mathbb{C}$ ベクトル空間が有限次元なことだった。$G'(\mathbb{R})$ 上の Γ **保型形式**とは、滑らかな函数 $\phi : G'(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ であって条件

(i) $\phi(\gamma g) = \phi(g)$, $\forall \gamma \in \Gamma$, $g \in G'(\mathbb{R})$;

(ii) 右 $\mathbf{K}'_\infty$ 有限;

(iii) $(\mathfrak{Z}(G'(\mathbb{R})) = \mathbb{C}[\Delta])$ 有限、すなわち Δ の固有函数の有限線型結合;

(iv) 緩増加。すなわち $R > 0$, $N \in \mathbb{N}$ があって

$$\left| \phi\left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} k(\theta) \right) \right| \leq R y^N$$

が成り立つ。

を満たすもののこととする。Γ 保型形式の空間を $\mathcal{A}(\Gamma\backslash G'(\mathbb{R}))$ と書く。$\phi \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash G'(\mathbb{R}))$ でさらにカスプ的なものを Γ **カスプ形式**と呼び、それらの空間を $\mathcal{A}_0(\Gamma\backslash G'(\mathbb{R}))$ と書く。言うまでもなくこれらの定義は従来の保型形式、カスプ形式のそれよりはるかに広いものとなっている。これによって新たにレパートリーに加わる正則でない保型形式の例を少し見ておこう。

例 2.3.7 (Maass の波動形式). $\phi \in \mathcal{A}_0(\Gamma\backslash G'(\mathbb{R}))$ でさらに

(ii)$_W$ $\phi(gk(\theta)) = \phi(g)$, $\forall k(\theta) \in \mathbf{K}'_\infty$;

(iii)$_W$ $\Delta\phi = 4^{-1}(1 - s^2)\phi$

を満たすものを *Maass* **の波動形式** *(wave form)* という。これに対応する上半平面上のカスプ形式

$$f(z) := \phi\left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \right), \quad z = x + iy \in \mathfrak{H}$$

は正則ではないが、Hecke 理論においては正則カスプ形式と同様に扱えることが H. Maass によって示されている [Maa49]。なお、Γ が $G'(\mathbb{R})$ の数論的部分群ならば、上に現れるパラメタ s は純虚数か $-1/9 < s < 1/9$ を満たす実数であることが知られている[2](Kim-Shahidi, 1999)。

例 2.3.8 (実解析的 Eisenstein 級数). 簡単のために $\Gamma = \Gamma(1) = G'(\mathbb{Z})$ とする。

$$E(s,g) := \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 \\ (c,d)=1}} \frac{y^{(1+s)/2}}{|cz+d|^{1+s}}, \quad g.i = x + yi$$

は $\Re s > 1$ で絶対収束し、$s = 1$ で一位の極を持ちそれ以外では正則な s の有理型函数に解析接続される。これは $(\mathrm{ii})_W$, $(\mathrm{iii})_W$ を満たすが、カスプ形式ではない Γ 保型形式である[3]。これをパラメタ s の**実解析的** *Eisenstein* **級数**という。

2.4　$SL(2,\mathbb{R})$ から $GL(2,\mathbb{A})$ へ

2.4.1　アデール環

p を素数とする。$x \in \mathbb{Q}^\times$ は $p^m \cdot a/b$, ($m, a, b \in \mathbb{Z}$, a, b は p を素因数に持たない) とただ一通りに書ける。このとき x の p 進絶対値を $|x|_p := p^{-m}$ と定める。これを $|0|_p := 0$ として $\mathbb{Q}$ に延長したものは距離の公理

- $|x|_p = 0$ となるのは $x = 0$ のときのみ。
- $|-x|_p = |x|_p$, $\forall x \in \mathbb{Q}$;
- $|x+y|_p \le |x|_p + |y|_p$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ (**三角不等式**。実はさらに**超距離不等式** *(ultra-metric inequality)*
$$|x+y|_p \le \sup(|x|_p, |y|_p) \tag{2.7}$$
が成り立つ。)

および、

- $|xy|_p = |x|_p|y|_p$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$

を満たす。特に $\mathbb{Q}$ はこの距離の定める位相に関して位相体になるが、その完備化が p **進数体** $\mathbb{Q}_p$ である。これは

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \,|\, |x|_p \le 1\}$$

[2]一般化された Ramanujan 予想によれば純虚数だけでよいはずであるが。

[3]一方で $\mathcal{A}_0(\Gamma, 2k)$ の条件 (ii), (iii) (48 頁参照) を満たす Γ 保型形式はカスプ形式しかないことが知られている。

をただ一つの極大コンパクト部分環とする、局所コンパクト位相体である。$a/b \in \mathbb{Q}^\times$, ($a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は互いに素) が $\mathbb{Z}_p$ に入るためには b が p を素因数に持たないことが必要十分なことに注意しよう。$|\cdot|_p$ はその像が $\mathbb{R}_+^\times$ の離散部分群 $\langle p \rangle$ であるから、例えば

$$p^n\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq p^{-n}\} = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p < p^{1-n}\}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

は 0 の開かつコンパクト (特に閉) な基本近傍系をなす。この意味で $\mathbb{Q}_p$ は (局所コンパクト) **完全不連結** *(totally disconnected)* な位相体である。代数的には $\mathbb{Z}_p$ は $p\mathbb{Z}_p$ をただ一つの極大イデアルとする**局所環** *(local ring)* であり、従って $\mathbb{Q}_p$ は

$$\mathrm{val}_p(x) := \begin{cases} -\log_p |x|_p & x \neq 0 \text{ のとき} \\ \infty & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

を付値とする**完備離散付値体** *(complete discrete valuation field)* でもある。

同様に $x \in \mathbb{Q}$ の実数としての絶対値を $|x|_\infty$ と書けば、$\mathbb{Q}$ は距離 $|\cdot|_\infty$ の定める位相に関しても位相体になり、その完備化が実数体 $\mathbb{R}$ に他ならない。以後、しばしば $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}_\infty$ と書く。素数および ∞ を $\mathbb{Q}$ の**素点**と呼ぶ。

問 2.8. (i) $\mathbb{Z}$ の (p) での**局所化** *(localization)*

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a,\, b \in \mathbb{Z},\, (b, p) = 1 \right\}$$

を思い出す。$\mathbb{Z}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ での $\mathbb{Z}_{(p)}$ の閉包であることを示せ。
(ii) $\mathbb{Z}_p$ の単元群 $\mathbb{Z}_p^\times$ が $\mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Z}_p \mid |x|_p = 1\}$ に一致することを示せ。
(iii) $\mathbb{Q}_p^\times = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} p^n\mathbb{Z}_p^\times$ を示し $x \in \mathbb{Q}_p^\times$ に対して $x\mathbb{Z}_p = p^{-\mathrm{val}_p(x)}\mathbb{Z}_p$ であることを確かめよ。

さて素点の有限集合 S で ∞ を含むものに対して直積環

$$\mathbb{A}(S) := \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p$$

を考える。特に $S = \{\infty\}$ のときにはこれを $\mathbb{A}(\infty)$ と書く。各 $\mathbb{Q}_v$ の位相の直積位相に関してこれは局所コンパクト位相環になる。もちろん $S \subset T$ なら $\mathbb{A}(S) \subset \mathbb{A}(T)$ であるから、これらの位相的帰納極限

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_\mathbb{Q} := \varinjlim_S \mathbb{A}(S)$$

として $\mathbb{Q}$ の**アデール環** *(adele ring)* が定義される。言い換えれば $\mathbb{A}$ は合併 $\bigcup_S \mathbb{A}(S)$ に各 $\mathbb{A}(S)$ が開部分環となるよう位相を入れたものである。$x = a/b \in \mathbb{Q}^\times$, ($a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は互いに素) の分母の素因数の集合を $S_f(x)$ とすれば、自然な単準同型 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_v$ たちの直積 $\mathbb{Q} \to \prod_v \mathbb{Q}_v$ による x の像 $(x)_v$ は $\mathbb{A}(\{\infty\} \cup S_f(x))$ に属するから、単準同型

$$\mathbb{Q} \ni x \longrightarrow (x)_v \in \mathbb{A}$$

は定義可能である。以後、これにより $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{A} = \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ の部分環と見なす。

$$\widehat{\mathbb{Z}} := \prod_{p\,;\,\text{素数}} \mathbb{Z}_p = \varprojlim_N \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

と書く。

補題 2.4.1. (1) $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{A}$ の離散部分環である。
(2) $(0,1)\times\widehat{\mathbb{Z}}\subset\mathbb{A}$ は $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}$ の基本領域 (1.3.3 節参照) である。

証明. (1) 0 が $\mathbb{Q}$ の中で $\mathbb{A}$ の位相に関して孤立していることを見ればよい。$\mathbb{A}$ の開部分集合 $(-1,1)\times\widehat{\mathbb{Z}}$ と $\mathbb{Q}$ の交わりは $(-1,1)$ 内の整数、すなわち 0 のみからなるのでこれは明らか。

(2) $\mathbb{A}$ の部分群 $\mathbb{Q}+\mathbb{A}(\infty)$ を考える。任意の $x=(x_v)_v\in\mathbb{A}$ はある $\mathbb{A}(S)$ に含まれる。

(i) $S=\{\infty\}$ なら $x\in\mathbb{A}(\infty)$ である。

(ii) それ以外のとき。まず $p\in S$ に対して x_p を近似しよう。$x_p\in p^{-n}\mathbb{Z}_p$, $(n\in\mathbb{N})$ だとする。

(a) $x_p\in p^{-n}\mathbb{Z}_p^\times=\coprod_{k=1}^{p-1}kp^{1-n}\mathbb{Z}_p$ だから、ある $1\le k_{1,0}\le p-1$ に対して

$$x_p(1):=x_p-k_{1,0}p^{-n}\in p^{1-n}\mathbb{Z}_p$$

とできる。

(b) 同様に $x_p(j)\in p^{j-n}\mathbb{Z}_p=\coprod_{k=1}^{p-1}kp^{j+1-n}\mathbb{Z}_p$ だから、ある $1\le k_{1,j}\le p-1$ に対して

$$x_p(j+1):=x_p(j)-k_{1,j}p^{j-n}\in p^{j+1-n}\mathbb{Z}_p$$

が成り立つ。

(c) これを $j=n-1$ まで繰り返せば、結局 $\xi(p):=\sum_{j=0}^{n-1}k_{1,j}p^{j-n}\in\mathbb{Q}$ として $x_p\in\xi(p)+\mathbb{Z}_p$ を得る。

$\xi(p)$ の分母は $q\ne p,\in S$ を素因数に持たないので、$\xi(p)\in\mathbb{Z}_q$, $(\forall q\ne p,\in S)$ が成り立つ。そこで $\xi:=\sum_{p\in S}\xi(p)\in\mathbb{Q}$ とおけば

$$x_p\in\xi+\mathbb{Z}_p,\quad \forall p\in S$$

である。

すなわち $\mathbb{Q}+\mathbb{A}(\infty)=\mathbb{A}$ が示された。一方 $\mathbb{A}$ の元が $\xi+x$, $\eta+y$, $(\xi,\eta\in\mathbb{Q},\ x,y\in\mathbb{A}(\infty))$ と二通りに書けるためには、明らかに

$$x-y\in\mathbb{Q}\cap\mathbb{A}(\infty)=\mathbb{Q}\cap\widehat{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}$$

が必要十分である。 □

注意 2.4.2. 上の証明は $\mathbb{A}(\infty)$ を $\mathbb{R}\times\prod_{p\,;\,\text{素数}}N\mathbb{Z}_p$, $(N\in\mathbb{Z},\ne 0)$ で置き換えても成立する。特に $\mathbb{Q}+\mathbb{R}$ **が** $\mathbb{A}$ **の中で稠密**なことがわかる。同様に勝手な素数 p に対して $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}_p$ は $\mathbb{A}$ の中で稠密である。

2.4.2　イデール群、イデアル群、イデアル類群

集合としては $\mathbb{A}$ は $\mathbb{A}(S)$ たちの合併であるから、その単数群も $\mathbb{A}(S)$ の単数群たちの合併

$$\mathbb{A}^\times = \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times := \bigcup_S \mathbb{A}(S)^\times, \quad \mathbb{A}(S)^\times = \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v^\times \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p^\times$$

である。これに $\mathbb{A}(S)^\times$ たちの位相的帰納極限としての位相、すなわち各 $\mathbb{A}(S)^\times$ が $\mathbb{A}^\times$ の開部分群となる位相を入れたものを $\mathbb{Q}$ の**イデール群** *(idele group)* と呼ぶ。**イデールノルム**

$$|\cdot|_\mathbb{A} : \mathbb{A}^\times \ni x = (x_v)_v \longmapsto |x|_\mathbb{A} := \prod_v |x_v|_v \in \mathbb{R}_+^\times$$

は定義可能な連続準同型であることに注意する。ただし、右辺の無限積で v は $\mathbb{Q}$ の全ての素点を走る。これの核を $\mathbb{A}^1 := \{x \in \mathbb{A}^\times \mid |x|_\mathbb{A} = 1\}$ と書く。

補題 2.4.3. (i) $\mathbb{Q}^\times$ は $\mathbb{A}^\times$ の離散部分群。
(ii) $\mathbb{Q}^\times \subset \mathbb{A}^1$ (Artin の積公式)。さらに $\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ で $\mathbb{A} = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{A}^1$。

証明. (i) 1 が $\mathbb{A}^\times$ の位相に関して $\mathbb{Q}^\times$ の中で孤立していることを確かめる。開部分集合 $(-1,1) \times \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ と $\mathbb{Q}^\times$ の交わりが $\{1\}$ だからこれは明らか。

(ii) Artin の積公式は明らか。$x = (x_v)_v \in \mathbb{A}^1$ に対して $\xi := \operatorname{sgn}(x_\infty) \prod_p p^{\mathrm{val}_p(x_p)} \in \mathbb{Q}^\times$ とおけば、任意の素数 p に対して

$$|x_p/\xi|_p = |x_p/p^{\mathrm{val}_p(x_p)}|_p = 1$$

である。$x \in \mathbb{A}^1$ と積公式から $|x_\infty/\xi|_\infty = 1$ ゆえ符号を比較して $x_\infty = \xi$ もわかる。すなわち $\mathbb{A}^1 = \mathbb{Q}^\times \cdot \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ だが、明らかに $\mathbb{Q}^\times \cap \widehat{\mathbb{Z}}^\times = \{1\}$ だから $\mathbb{A}^1 = \mathbb{Q}^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ が従う。イデールノルムの $\mathbb{R}_+^\times \subset \mathbb{A}^\times$ への制限は同型だから、最後の主張は明らか。 □

注意 2.4.4. 一般の代数体 F に対してもアデール環 $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$, イデール群 $\mathbb{A}^\times = \mathbb{A}_F^\times$ が考えられる。離散的でない局所コンパクト位相体を**局所体** *(local field)* と呼ぶ。局所体には $\mathbb{R}$ および $\mathbb{C}$ の**アルキメデス** *(archimedean)* 局所体と $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大や有限体上の一変数 Laurent 級数体である**非アルキメデス** *(non-archimedean)* 局所体がある。非アルキメデス局所体は $\mathbb{Q}_p$ のように、**整数環** *(ring of integers)* と呼ばれる極大コンパクト部分環をもつ完備離散付値体である。F の局所体 F_v への像が稠密な埋め込みの同型類 v のことを F の**素点** *(place)* と呼ぶ。素点 v は F_v がアルキメデス的か否かに応じて、アルキメデス的 (無限) 素点または非アルキメデス的 (有限) 素点と言われる。非アルキメデス素点 v での F_v の整数環を $\mathcal{O}_v$ と書く。全てのアルキメデス素点を含む素点の有限集合 S に対して

$$\mathbb{A}(S) = \mathbb{A}_F(S) := \prod_{v \in S} F_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v$$

とおき、F のアデール環 $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ をそれらの位相的帰納極限と定める。同様にイデール群 $\mathbb{A}^\times = \mathbb{A}_F^\times$ を

$$\mathbb{A}(S)^\times = \mathbb{A}_F(S)^\times := \prod_{v \in S} F_v^\times \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v^\times$$

たちの位相的帰納極限と定義する。上で得られた $\mathbb{Q}$ のアデール環、イデール群についての結果は $\mathbb{A}_F \simeq F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ であることを用いて F のアデール環、イデール群にも拡張される。同様に正標数を持つ大域体、すなわち有限体上の一変数有理函数体のアデール環なども考えることができる。詳しいことは [Wei95, I–V 章] などを参照されたい。

もうしばらく一般の代数体 F を考えよう。F のアルキメデス素点の集合を S_∞ と書き、$F_\infty := \prod_{v\in S_\infty} F_v$ とおく。$\mathbb{A}_f := \{(x_v)_v \in \mathbb{A} \,|\, x_v = 0, \forall v \in S_\infty\}$ を**有限アデール**の環という。さて、部分環 $\mathfrak{O} \subset F$ が F の**整環** *(order)* とは、

- $\mathfrak{O}$ は加法群として有限生成;
- $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\mathfrak{O} = F$

が成り立つことだった。

補題 2.4.5. $\mathfrak{o} := F \cap \prod_{v\nmid\infty} \mathcal{O}_v$ は F の唯一の極大整環で、F での $\mathbb{Z}$ の整閉包に等しい。ただし直積は F の全ての非アルキメデス素点を走る。$\mathfrak{o}$ はしばしば F の**整数環** *(integer ring)* と呼ばれる。

証明. F は $\mathbb{A}$ の離散部分群だから、$\mathfrak{o}$ も $\mathbb{A}(\infty) = F_\infty \times \prod_{v\nmid S} \mathcal{O}_v$ の離散部分群である。特に F_∞ の 0 のコンパクト近傍 U を取れば、$\mathfrak{o} \cap \left(U \times \prod_{v\nmid\infty} \mathcal{O}_v\right) = \mathfrak{o} \cap U$ は有限集合である。つまり F_∞ の位相に関して 0 は $\mathfrak{o}$ の中で孤立しているから、$\mathfrak{o}$ は F_∞ の離散部分群である。$F_\infty \simeq F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は有限次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間だから、これは $\mathfrak{o}$ がアーベル群として有限生成であることを意味する。一方、$F\backslash\mathbb{A}$ はコンパクトだったからその閉部分群 $\mathfrak{o}\backslash\mathbb{A}(\infty)$ およびその商群 $\mathfrak{o}\backslash F_\infty$ もコンパクトである。これは $\mathfrak{o}$ が $\mathbb{R}$ ベクトル空間 F_∞ の基底を含むこと、従って $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 F の基底を含むことを意味する。$\mathfrak{o}$ が F の部分環であることは明らかだから、$\mathfrak{o}$ が整環であることが証明された。

次に $\mathfrak{o}' \subset F$ を加法群としては有限生成な部分環とする。任意の非アルキメデス素点 v において $\mathfrak{o}'$ が生成する $\mathcal{O}_v$ 加群 $\mathfrak{o}'_v$ は

- F_v のコンパクト部分群で、
- 乗法についても閉じている、すなわち F_v の部分環でもある。

よって $\mathfrak{o}'_v \subset \mathcal{O}_v$ だが、$\mathfrak{o}'_v$ は 1 を含む $\mathcal{O}_v$ 加群だから実は $\mathcal{O}_v$ 自身に一致する。すなわち $\mathfrak{o}' \subset \mathcal{O}_v$ が全ての非アルキメデス素点で成り立つので $\mathfrak{o}' \subset \mathfrak{o}$ である。

F での $\mathbb{Z}$ の整閉包が $\mathfrak{o}$ に含まれることは明らか。逆に $\gamma \in \mathfrak{o}$ は Cayley-Hamilton の定理から、線型写像 $F_\infty \ni x \mapsto \gamma \cdot x \in F_\infty$ の特性多項式の根である。ところがこの写像は F_∞ 内の格子 $\mathfrak{o}$ を保つからその特性多項式は整数係数モニック多項式である。 □

$\mathfrak{o}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ を考える。非アルキメデス素点 v において F_v での $\mathfrak{a}$ の閉包 $\mathfrak{a}_v$ は $\mathcal{O}_v$ のイデアルだから

$$\mathfrak{a}_v = \mathfrak{p}_v^{\mathrm{ord}_v \mathfrak{a}}, \quad \exists \mathrm{ord}_v \mathfrak{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

と書ける。$\mathrm{ord}_v\mathfrak{a} > 0$ となる非アルキメデス素点は有限個しかないことに注意しよう。逆に $\{\mathrm{ord}_v\mathfrak{a}\}_{v\nmid\infty}$ から $\mathfrak{a}$ は

$$\mathfrak{a} = F \cap \big(\prod_{v\nmid\infty} \mathfrak{p}_v^{\mathrm{ord}_v\mathfrak{a}}\big)$$

として回復できる。言い換えれば、$\mathfrak{o}$ の 0 でない素イデアルは非アルキメデス素点 v に対する $\mathfrak{p}_v \cap F$ たちに他ならない。

そこでこれを拡張して、非アルキメデス素点に対する整数の族 $\{n_v\}_{v\nmid\infty}$ で 0 でない成分は有限個しかないものに対して定まる

$$\mathfrak{a} := F \cap \big(\prod_{v\nmid\infty} \mathfrak{p}_v^{n_v}\big)$$

の形の F の部分 $\mathfrak{o}$ 加群を F の**分数イデアル** *(fractional ideal)* と呼ぶ。零イデアルは分数イデアルでないことに注意したい。これは F の非自明な有限生成部分 $\mathfrak{o}$ 加群と言っても同じことである。F の分数イデアル全体の集合 $\mathfrak{I}(F)$ は乗法に関して $\mathfrak{o}$ を単位元とする群になる。これを F の**イデアル群** *(ideal group)* という。定義から $\mathfrak{I}(F)$ は

$$\mathbb{A}^\times/\mathbb{A}(\infty)^\times = \mathbb{A}_f^\times\big/\prod_{v\nmid\infty} \mathcal{O}_v^\times$$

と同一視される。一方で $\xi \in F^\times$ は分数イデアル

$$F \cap \big(\prod_{v\nmid\infty} \mathfrak{p}_v^{\mathrm{val}_v(\xi)}\big)$$

を定める。ただし $\mathrm{val}_v(\xi)$ は $\xi \in \mathfrak{p}_v^{\mathrm{val}_v(\xi)} \smallsetminus \mathfrak{p}_v^{\mathrm{val}_v(\xi)+1}$ となる整数を表す。この形の分数イデアルを**主分数イデアル** *(principal fractional ideal)* と呼び、それらのなす $\mathfrak{I}(F)$ の部分群を $\mathfrak{P}(F)$ と書く。商群

$$\mathfrak{P}(F)\backslash\mathfrak{I}(F) \simeq F^\times\backslash\mathbb{A}^\times/\mathbb{A}(\infty)^\times = F^\times\backslash\mathbb{A}_f^\times\big/\prod_{v\nmid\infty} \mathcal{O}_v^\times$$

を F の**イデアル類群** *(ideal class group)* と呼び、その位数 h_F を F の**類数** *(class number)* という[4]。

2.4.3　$GL(2)$ のアデール群

まずは $G := GL(2)$ を $\mathbb{Q}$ 上の代数群と見よう。$(\mathrm{Alg}/\mathbb{Q})$ で可換 $\mathbb{Q}$ 代数の圏を表す。すなわちその対象は $\mathbb{Q}$ を部分環に持つ可換環たちであり、$\mathbb{Q}$ 代数 $A,\ B$ の間の射はそれら

---

[4] 類数の計算には有名な *Kronecker* **の極限公式**

$$\lim_{s\downarrow 1}(s-1)\zeta_F(s) = \frac{2^{|S_\infty|}\pi^{r_2}R_F}{|\boldsymbol{\mu}_\infty(F)|\sqrt{|D_F|}}h_F$$

が使われる。類数が 1 の虚二次体が 9 個しかないことはよく知られている [Hee52], [Sta67], [Deu68]。さらに類数が 2 の虚二次体も 18 個しかないことが知られている。

の間の $\mathbb{Q}$ (線型) 準同型である。同様に (Grp) で群の圏を表す。(圏に関する基本的な定義についてはホモロジー代数の教科書を参照されたい。) $\mathbb{Q}$ 代数群としての $GL(2)$ とは、$R \in (\mathrm{Alg}/\mathbb{Q})$ に R 係数の二次正方行列環の単元群 $G(R) := \mathbb{M}_2(R)^\times \in (\mathrm{Grp})$ を対応させる「マシン」G のことである。R の行き先 $G(R)$ の元を G の R **有理点** *(R-valued points)* という。これは $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(R, R')$, $(R, R' \in (\mathrm{Alg}/\mathbb{Q}))$ に対して、

$$f : G(R) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix} \in G(R') \in \mathrm{Hom}(G(R), G(R'))$$

を対応させるから、いわゆる**共変函手** *(covariant functor)* である[5]。特に $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ 代数であるから、G の $\mathbb{A}$ 有理点の群

$$G(\mathbb{A}) = \mathbb{M}_2(\mathbb{A})^\times = \{g \in \mathbb{M}_2(\mathbb{A}) \mid \det g \in \mathbb{A}^\times\}$$

が定義できる。

この方法は $\mathbb{Q}$ 上定義された線型代数群に一般に適用できるが、$G = GL(2)$ はさらに $\mathbb{Z}$ 上定義されている。すなわち可換環の圏 (Ring) から (Grp) への共変函手 $R \rightsquigarrow G(R) = \mathbb{M}_2(R)^\times$ と見なすこともできる。こうすると $\mathbb{Q}$ 代数でない環、例えば $\mathbb{A}(S)$ に対しても

$$G(\mathbb{A}(S)) = G\big(\prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p\big) = \prod_{v \in S} G(\mathbb{Q}_v) \times \prod_{p \notin S} G(\mathbb{Z}_p)$$

が考えられ、さらに G は (位相可換環の圏から位相群の圏への) 共変函手だから

$$G(\mathbb{A}) = \varinjlim_{S} G(\mathbb{A}(S))$$

が成り立っている。以下 $\mathbf{K}_p := G(\mathbb{Z}_p)$ と書き、$\mathbf{K}_f := \prod_{p\,;\,\text{素数}} \mathbf{K}_p$ とおく。また G の中心を Z と書く。

$$Z(R) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in R^\times \right\}.$$

最後に Borel 部分群 $B = TU$ を

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}$$

と選んでおく。

2.4.4 $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式

$\mathbb{R} + \mathbb{Q}$ は $\mathbb{A}$ で稠密であったが、$G(\mathbb{R})G(\mathbb{Q})$ は $G(\mathbb{A})$ 内では稠密だろうか。これを考えるために [Eic38] から次の定理を引用しよう。

[5] 通常はこれを $\mathbb{Q}$ スキームの圏から (Grp) への反変函手と見る。$A \mapsto \mathrm{Spec} A$ は反変函手だから射の向きが逆転するのである。

定理 2.4.6 (Eichler). F を代数体とする。$G' = SL(2)$ に対しては、$G'(F_\infty)G'(F)$ は $G(\mathbb{A}_F)$ で稠密である。

これの証明は長いので省略する。興味のある人は [清水 68] が原論文に比べればずいぶん整理されているので参照されるとよい。実は現在ではさらに強く次の結果が知られている [PR94]。

定理 2.4.7 (強近似定理). G を代数体 F 上定義された連結半単純単連結な線型代数群[6]とする。F の素点 v で $G(F_v)$ がコンパクトでなければ、$G(F)G(F_v)$ は $G(\mathbb{A}_F)$ で稠密である。

さて $K = \prod_{p\,;\,\text{素数}} K_p \subset G(\mathbb{A}_f)$ が

(i) $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ は開コンパクト部分群。

(ii) 有限個を除く全ての素数 p で $K_p = \mathbf{K}_p$.

(iii) $\det(K) = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$.

を満たすとする。例えば $N \in \mathbb{N}$ (積は実際には有限) に対する *Hecke* **部分群**

$$K_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\widehat{\mathbb{Z}}) \,\middle|\, c \in N\widehat{\mathbb{Z}} \right\}$$

はこれを満たすが、**主合同部分群**

$$K(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\widehat{\mathbb{Z}}) \,\middle|\, \begin{matrix} a, d \in 1 + N\widehat{\mathbb{Z}} \\ b, c \in N\widehat{\mathbb{Z}} \end{matrix} \right\}$$

は満たさない。$G(\mathbb{A})/K = G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_f)/K$ で $G(\mathbb{A}_f)/K$ は離散的だから、$G(\mathbb{A})/K$ は自然な (実解析的) 多様体の構造を持つ。$G(\mathbb{Q})$ の $G(\mathbb{A})/K$ への左移動作用は完全不連続で、$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K$ にも多様体の構造が入る。

命題 2.4.8. $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ を上の (i), (ii), (iii) を満たす開コンパクト部分群とする。
(a) $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{Q})\big(G(\mathbb{R}) \times K\big)$。
(b) 特に $\Gamma := K \cap G'(\mathbb{Q})$ とおけばこれは第1種 Fuchs 群で、さらに $\det(K \cap G(\mathbb{Q})) = \{\pm 1\}$ なら

$$\Gamma\backslash G'(\mathbb{R}) \ni \Gamma \cdot g' \longmapsto G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times g' K \in G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})/K$$

は解析同相。ただし、$\mathbb{R}_+^\times$ を部分群

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in Z(\mathbb{R}) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}_+^\times \right\}$$

と同一視している。

[6]証明の鍵は G の一次の Galois コホモロジーに対する Hasse 原理で、それが知られていなかった E_8 型の場合は永くこの定理から除外されていた。しかし 1990 年頃になって Cernousov によって E_8 型の Hasse 原理も証明され、現在では例外なくこの形の強近似が成立することが知られている。

証明. (a) 勝手な $g\in G(\mathbb{A})$ を取る。$\det g\in\mathbb{A}^\times$ は $\mathbb{Q}$ の類数 $h_{\mathbb{Q}}$ が 1 であることから、

$$\det g=\xi\cdot(r,u),\quad \exists\xi\in\mathbb{Q}^\times,\, r\in\mathbb{R}^\times,\, u\in\widehat{\mathbb{Z}}^\times$$

と書ける。条件 (iii) から $k_1\in K$ で $\det k_1=u$ となるものが取れ、従って

$$g=\begin{pmatrix}\xi&0\\0&1\end{pmatrix}g'\Bigl(\begin{pmatrix}r&0\\0&1\end{pmatrix},k_1\Bigr),\quad \xi\in\mathbb{Q}^\times,\, g'\in G'(\mathbb{A}),\, k_1\in K$$

と書ける。一方 $K':=K\cap G'(\mathbb{A}_f)$ とおけば定理 2.4.6 から $G'(\mathbb{A})=G'(\mathbb{Q})\cdot\bigl(G'(\mathbb{R})\times K'\bigr)$ であるから、$g'=\gamma'(g'_\infty,k')$, $(\gamma'\in G'(\mathbb{Q}),g'_\infty\in G'(\mathbb{R}),k'\in K')$ と書けば、結局

$$g=\begin{pmatrix}\xi&0\\0&1\end{pmatrix}\gamma'(g'_\infty,k')\Bigl(\begin{pmatrix}r&0\\0&1\end{pmatrix},k_1\Bigr)=\gamma(g_\infty,k)$$

となる。ただし、

$$\gamma=\begin{pmatrix}\xi&0\\0&1\end{pmatrix}\gamma'\in G(\mathbb{Q}),\ g_\infty:=g'_\infty\begin{pmatrix}r&0\\0&1\end{pmatrix}\in G(\mathbb{R}),\ k:=k'k_1\in K$$

と書いた。

(b) 仮定から $\epsilon\in G(\mathbb{Q})\cap K$ で $\det\epsilon=-1$ となるものが取れる。上から任意の $g\in G(\mathbb{A})$ は

$$\begin{aligned}g=&\gamma\cdot\Bigl(g'_\infty\begin{pmatrix}r&0\\0&1\end{pmatrix},k\Bigr),\qquad \begin{gathered}\gamma\in G(\mathbb{Q}),\ g'_\infty\in G'(\mathbb{R})\\ r\in\mathbb{R}^\times,\ k\in K\end{gathered}\\ =&\begin{pmatrix}|r|_\infty^{1/2}&0\\0&|r|_\infty^{1/2}\end{pmatrix}\gamma\cdot\Bigl(\epsilon^d\cdot\mathrm{Ad}(\epsilon^{-d})g'_\infty\begin{pmatrix}|r|_\infty^{1/2}&0\\0&|r|_\infty^{-1/2}\end{pmatrix},k\Bigr)\end{aligned}$$

$g':=\mathrm{Ad}(\epsilon^{-d})g'_\infty\left(\begin{smallmatrix}|r|_\infty^{1/2}&0\\0&|r|_\infty^{-1/2}\end{smallmatrix}\right)\in G'(\mathbb{R})$ として、

$$=\begin{pmatrix}|r|_\infty^{1/2}&0\\0&|r|_\infty^{1/2}\end{pmatrix}\gamma\epsilon^d(g',\epsilon^{-d}k)$$

と書ける。ただし

$$d=\begin{cases}0&r>0\text{ のとき}\\1&r<0\text{ のとき}\end{cases}$$

とおいた。すなわち $G(\mathbb{A})=G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times G'(\mathbb{R})K$ である。次に $g',h'\in G'(\mathbb{R})$ が

$$G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times g'K=G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times h'K$$

を満たせば、$h'=\gamma(ag',k)$, $(\exists\gamma\in G(\mathbb{Q}),a\in\mathbb{R}_+^\times,k\in K)$ と書ける。$G(\mathbb{A}_f)$ 成分を見て $\gamma=k^{-1}\in G(\mathbb{Q})\cap K$ を得る。特に K がコンパクトなことから $|\det\gamma|_\infty=1$ であるが、これ

と $G(\mathbb{R})$ 成分の等式 $h' = \gamma a g'$ から $a = 1$ がわかる。これからさらに $\det\gamma = \det h' g'^{-1} = 1$ となって

$$h' = \gamma g', \quad \gamma \in \Gamma$$

を得る。解析同相であることは $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K$ の実解析構造の入れ方から従う。 □

例 2.4.9. $K = K_0(N)$, $(N \in \mathbb{N})$ の場合には

$$\Gamma_0(N) := G'(\mathbb{Q}) \cap K_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G'(\mathbb{Z}) \;\middle|\; n \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

は 1.3.4 節の N 段の Hecke 部分群に他ならない。

依然、$K \subset G(\mathbb{A}_f)$ を 58 頁の条件 (i), (ii), (iii) を満たす開コンパクト部分群とし、$\Gamma = G'(\mathbb{Q}) \cap K$ を対応する $G'(\mathbb{R})$ の数論的部分群とする。函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ で条件

(i) $\phi(\gamma g) = \phi(g)$, $\forall\gamma \in G(\mathbb{Q}), g \in G(\mathbb{A})$.

(ii) ϕ は $G(\mathbb{R})$ の函数として C^∞ 級で

$$\phi(gk(\theta)) = e^{-2ki\theta}\phi(g), \quad \forall k(\theta) \in \mathbf{K}'_\infty,\ g \in G(\mathbb{A})$$

を満たす。

(iii) $\phi(gk) = \phi(g)$, $\forall k \in K$.

(iv) $\Delta\phi = -k(k-1)\phi$. $\phi(zg) = \phi(g)$, $\forall z \in \mathbb{R}_+^\times$.

(v) ϕ は $G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})$ 上の函数として**緩増加** *(slowly increasing)*。すなわち任意の $c > 0$ とコンパクト集合 $\Omega \subset G(\mathbb{A})$ に対して、$C > 0$, $N \in \mathbb{N}$ があって

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \le C|a|_\infty^N, \quad \forall g \in \Omega,\ a \in \mathbb{R}_+^\times,\ |a| > c.$$

(vi) ϕ は**カスプ的** *(cuspidal)*:

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dx = 0, \quad \forall g \in G(\mathbb{A}). \tag{2.8}$$

を満たすものたちのなす空間を $\mathcal{A}_0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))_{2k}^K$ と書く。命題 2.3.6 と命題 2.4.8 から、次は今や明らかである。

系 2.4.10. $G(\mathbb{A}_f)$ の開コンパクト部分群 K と Γ を上の通りとするとき、

$$S_{2k}(\Gamma) \ni f \longmapsto \phi_f \in \mathcal{A}_0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))_{2k}^K$$

は線型同型。ただし ϕ_f は命題 2.4.8 (ii) の解析同相によって $G(\mathbb{A})$ 上の函数と見ている。

証明. ϕ_f のカスプ性の二つの定義、48 頁の条件 (v) と上の条件 (vi) が同値なことを示す。まず Γ のカスプの集合を特定しよう。

主張 2.4.10.1. $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ が開コンパクト部分群で $\Gamma = G'(\mathbb{Q}) \cap K$ ならば、Γ のカスプの集合は $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

証明. $z = g.\infty$, $(g \in G'(\mathbb{R}))$ が Γ のカスプであるためには、$\mathrm{Ad}(g)U(\mathbb{R}) \cap \Gamma$ が非自明なことが必要十分。$\Gamma = G'(\mathbb{Q}) \cap K$ だから、特に

$$\mathrm{Ad}(g)U(\mathbb{R}) \cap G'(\mathbb{Q}) \supsetneq \{1\} \tag{2.9}$$

が必要である。$g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ と書けば、

$$\mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-acx & a^2x \\ -c^2x & 1+acx \end{pmatrix}$$

だから、(2.9) は $a, c \in \mathbb{Q}$, すなわち $z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ に同値である。ここで

$$\mathbb{Q} \cup \{\infty\} = G'(\mathbb{Q}).\infty = \{\gamma.\infty \mid \gamma \in G'(\mathbb{Q})\}$$

に注意する。

さて $\gamma \in G'(\mathbb{Q})$ に対して ${}^{\gamma}U := \mathrm{Ad}(\gamma)U$ と略記する。今一度 $\Gamma = G'(\mathbb{Q}) \cap K$ に注意すれば、$\gamma.\infty$, $(\gamma \in G'(\mathbb{Q}))$ が Γ のカスプであるためには

$$\Gamma_{\gamma.\infty} = {}^{\gamma}U(\mathbb{Q}) \cap \Gamma = {}^{\gamma}U(\mathbb{Q}) \cap K \neq \{1\}$$

が必要十分である。ところが $K^{\gamma U} := K \cap {}^{\gamma}U(\mathbb{A}_f)$ は ${}^{\gamma}U(\mathbb{A}_f) \simeq \mathbb{A}_f$ の開部分群で、${}^{\gamma}U(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$ は ${}^{\gamma}U(\mathbb{A}_f)$ 内で稠密である (注意 2.4.2) から ${}^{\gamma}U(\mathbb{Q}) \cap K$ は常に非自明である。 □

主張から Γ のカスプは $\gamma.\infty$, $(\gamma \in G'(\mathbb{Q}))$ と書ける。ϕ_f は $G(\mathbb{Q})$ 不変だから、(2.8) の左辺で $g = \gamma^{-1}g'$, $g' \in G'(\mathbb{R})$ とすれば

$$\begin{aligned}\int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} \phi_f(u\gamma^{-1}g')\,du &= \int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} \phi_f(\gamma u\gamma^{-1}g')\,du = \int_{{}^{\gamma}U(\mathbb{Q})\backslash {}^{\gamma}U(\mathbb{A})} \phi_f(vg')\,dv \\ &= \int_{{}^{\gamma}U(\mathbb{Q})\backslash {}^{\gamma}U(\mathbb{A})/K^{\gamma U}} \int_{K^{\gamma U}} \phi_f(vkg')\,dk\,dv\end{aligned}$$

$K \subset G(\mathbb{A}_f)$ と $g' \in G'(\mathbb{R})$ は可換で ϕ_f は右 K 不変ゆえ

$$= \mathrm{meas}(K^{\gamma U}) \int_{{}^{\gamma}U(\mathbb{Q})\backslash {}^{\gamma}U(\mathbb{A})/K^{\gamma U}} \phi_f(vg')\,dv \tag{2.10}$$

に等しい。ここで $K^{\gamma U}$ は ${}^{\gamma}U(\mathbb{A}_f)$ の開コンパクト部分群だから、ある $h \in \mathbb{Q}$ があって

$$K^{\gamma U} = \left\{ \mathrm{Ad}(\gamma)\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in h\widehat{\mathbb{Z}} \right\},$$

従って $\{\pm 1\}$ を除いて

$$\Gamma_{\gamma.\infty} = K^{\gamma U} \cap G'(\mathbb{Q}) = \left\{ \mathrm{Ad}(\gamma)\begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

と書ける。一方で注意 2.4.2 から

$$\mathbb{R}/h\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_f/h\widehat{\mathbb{Z}} \ni x \xmapsto{\sim} \mathrm{Ad}(\gamma)\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in {}^{\gamma}U(\mathbb{Q})\backslash{}^{\gamma}U(\mathbb{A})/K^{\gamma U}$$

は同相ゆえ、結局 (2.10) は

$$\mathrm{meas}({}^{\gamma}U(\mathbb{Q})\backslash{}^{\gamma}U(\mathbb{A})) \int_0^1 \phi_f\Big(\gamma \begin{pmatrix} 1 & xh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g'\Big)\, dx$$

に等しい。よって二つのカスプ性条件は同値である。 □

$\Gamma\backslash G'(\mathbb{R})$ の状況と同様、これを参考に保型形式の定義を次のように拡張しよう。

$$\mathbf{K}_\infty := O(2,\mathbb{R}) = \{g \in G(\mathbb{R}) \mid g^t g = \mathbf{1}_2\}$$

とし、$\mathbf{K} = \mathbf{K}_\infty \times \mathbf{K}_f$ とおく。$\mathbf{K}_\infty = \mathbf{K}'_\infty \cup \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathbf{K}'_\infty$ である。$G(\mathbb{A})$ 上の**保型形式** *(automorphic form)* とは、函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ であって

(i) $\phi(\gamma g) = \phi(g)$, $\forall\gamma \in G(\mathbb{Q}), g \in G(\mathbb{A})$.

(ii) $\phi(g)$ は g の $G(\mathbb{R})$ 成分の函数として滑らかで、右 $\mathbf{K}$ 有限。

(iii) ϕ は $\mathfrak{Z}(G(\mathbb{R}))$ 有限。

(iv) ϕ は 60 頁の意味で緩増加。

なるもののこととする。$G(\mathbb{A})$ 上の保型形式の空間を $\mathcal{A}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ と書く。さらに ϕ が 60 頁の意味でカスプ的なときそれを**カスプ形式** *(cusp form)* と呼ぶ。$G(\mathbb{A})$ 上のカスプ形式の空間は $\mathcal{A}_0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ と書かれる。

注意 2.4.11. G の Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2)$ は G' の Lie 環 $\mathfrak{g}' = \mathfrak{sl}(2)$ と中心 $Z(\mathfrak{g})$ の直和だから、$\mathfrak{Z}(G(\mathbb{R})) = \mathfrak{Z}(G'(\mathbb{R})) \oplus U(Z(\mathfrak{g}))$ である。

さて、以上で我々は上半平面ないしは Riemann 面から $GL(2)$ のアデール群上に舞台を移したことになる。$\mathcal{A}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ の利点はこれが、$G(\mathbb{A})$ の (正確には $(U(\mathfrak{g}(\mathbb{C})), \mathbf{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_f)$ の) 右移動作用を備えている、すなわち $G(\mathbb{A})$ の「表現」になっていることである。定義から $G(\mathbb{A})$ は $G(\mathbb{Q}_v)$ たちの「制限直積」であったから、$G(\mathbb{A})$ の既約表現も $G(\mathbb{Q}_v)$ の既約表現たちの「制限テンソル積」に分解するであろう。かくして Weil が Hecke の量指標をイデール類群の指標と見てそれを局所体の乗法指標の積に分解したように、保型形式が $G(\mathbb{Q}_v)$ の表現たちのテンソル積に分解できる。これと 20 世紀後半に飛躍的に進展した局所体上の簡約群の表現論を組み合わせることにより、保型形式の精密な記述が可能になる。次章ではそのために必要な局所体上の $GL(2)$ の表現を考察していこう。

2.4.5 補足:一般の数体上の保型形式と G の類数

上の $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式の定義は全くそのまま任意の代数体 F に拡張される。F のアデール環を $\mathbb{A}_F$ として、F の素点 v での $G(F_v)$ の極大コンパクト部分群を

$$\mathbf{K}_v = \begin{cases} O(2,\mathbb{R}) & F_v \simeq \mathbb{R} \text{ のとき} \\ U(2,\mathbb{R}) & F_v \simeq \mathbb{C} \text{ のとき} \\ G(\mathcal{O}_v) & v \text{ が非アルキメデス的なとき} \end{cases}$$

と取る。ただし $U(2,\mathbb{R}) := \{g \in GL(2,\mathbb{C}) \mid g^t\bar{g} = \mathbf{1}_2\}$ である。$\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{K}_v$ は $G(\mathbb{A}_F)$ の極大コンパクト部分群になる。$G(\mathbb{A}_F)$ 上の函数 ϕ で

(i) $\phi(\gamma g) = \phi(g), \forall\gamma \in G(F), g \in G(\mathbb{A})$.

(ii) $\phi(g)$ は g の $G(F_\infty)$ 成分の函数として滑らかで、右 $\mathbf{K}$ 有限。

(iii) ϕ は $\mathfrak{Z}(G(F_\infty))$ 有限。

(iv) ϕ は 60 頁の意味で緩増加。

なるものを $G(\mathbb{A}_F)$ 上の保型形式と呼び、その空間を $\mathcal{A}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))$ と書くのである。例えば F が総実代数体 (すなわち S_∞ が実素点のみからなる) の場合には、$\mathcal{A}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F))$ は古典的な *Hilbert* **保型形式**を含んでいる。

一方で、$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ ないしは $\Gamma\backslash G'(\mathbb{R})$ 上の保型形式を $G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K$ に持ち上げる際には、強近似定理 $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{Q})(G(\mathbb{R}) \times K)$ が主要な役割を果たした。$\mathbb{Q}$ を代数体 F で取り替えると、これはもはや成り立たない。例えば、特に K を $G(\mathbb{A}_f)$ の極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}_f = \prod_v G(\mathcal{O}_v)$ としたときの、

$$h(G/F) := |G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)/(G(F_\infty) \times \mathbf{K}_f)| = |G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{F,f})/\mathbf{K}_f|$$

を G の F 上の**類数**と呼ぶが、これは一般に 1 ではない。実際、$\det : G(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{A}_F^\times$ は全単射

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A}_{F,f})/\mathbf{K}_f \xrightarrow{\sim} F^\times\backslash\mathbb{A}_{F,f}^\times \Big/ \prod_{v\notin S_\infty} \mathcal{O}_v^\times$$

を与えるから、$G = GL(2)$ に対しては $h(G/F) = h_F$ である。こうした場合には例えば F が総実ならば、$G(F)Z(F_\infty)\backslash G(\mathbb{A}_F)/\mathbf{K}$ は上下半平面の数論的部分群による商の直積

$$\prod_v \Gamma_v\backslash\mathfrak{H}^\pm$$

の形の空間たちの複数個の合併になり、古典的な Hilbert 保型形式などと対応する $G(\mathbb{A}_F)$ 上の保型形式は必ずしも見やすいものではない。

第3章　非アルキメデス局所理論

この節ではアデール群の表現として $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式を捉えるために必要な、局所体上の $GL(2)$ の表現論を解説する。

3.1　$GL(2,F)$ の構造

3.1.1　非アルキメデス局所体

ここでは F を非アルキメデス局所体、すなわちある素数 p に対する $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大か有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の Laurent 級数体 $\mathbb{F}_q((T))$ のいずれかとする。F は**整数環** *(ring of integers)* と呼ばれる極大コンパクト部分環 $\mathcal{O}$ を持ち、$\mathcal{O}$ は唯一の極大イデアル $\mathfrak{p}$ を持つ局所環であった。$\mathfrak{p}$ の生成元 ϖ を一つ固定しておこう。$\{\mathfrak{p}^n = \varpi^n\mathcal{O}\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコンパクト開部分群からなる 0 の基本近傍系だから、F は完全不連結位相 (52 頁) を持つ。特に剰余体 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ は (コンパクト群の開部分群による商ゆえ) ある有限体 $\mathbb{F}_q$ に同型である。また F 上の任意の (複素数値) 連続函数 f は、各 $x \in F$ のある近傍 $U_f(x)$ 上で定数である、いわゆる**局所定数** *(locally constant)* 函数になる。それらの空間を $C^\infty(F)$, コンパクト台付きの元からなるその部分空間を $C_c^\infty(F)$ と書こう。局所コンパクト位相アーベル群 F の上には**不変** *(Haar)* **測度**、すなわち線型形式 $\mu : C_c^\infty(F) \ni f \mapsto \mu(f) \in \mathbb{C}$ で

- 正値: $f \neq 0, \in C_c^\infty(F)$ が $f(x) \geq 0, \forall x \in F$ を満たせば、$\mu(f) > 0$.
- 不変: $\forall a \in F$ に対して $\mu(f(\cdot + a)) = \mu(f(\cdot))$.

を満たすものが正実数倍を除いてただ一つある [Hal]。習慣に倣ってこれを

$$\mu(f) = \int_F f(x)\,dx, \quad f \in C_c^\infty(F)$$

と書く。特に $a \in F^\times$ に対しては $|a|_F \in \mathbb{R}_+^\times$ であって

$$\int_F f(a^{-1}x)\,dx = |a|_F \int_F f(x)\,dx, \quad \forall f \in C_c^\infty(F)$$

となるものがただ一つある (左辺も不変測度だから)。すぐわかるように $|\cdot|_F : F^\times \to \mathbb{R}_+^\times$ は連続準同型である。これを $|0|_F := 0$ として $|\cdot|_F : F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に延ばしたものを F の**モヂュラス** *(module)* と呼ぶ。

$$\mathcal{O} = \{x \in F \mid |x|_F \leq 1\}, \quad \mathfrak{p} = \{x \in F \mid |x|_F < 1\}$$

である。$x \in F^\times$ に対して $|x|_F = q^{-n}$ となる整数 n を x の**付値** *(valuation)* と呼び、$\mathrm{val}_F(x)$ と書く。これらについては [Wei95] などを参照されたい。

3.1.2 高さ函数と岩澤分解

行列環 $\mathbb{M}_2(F)$ は F 上の 4 次元線型空間としての位相を持つ。$G(F) = GL(2, F) = \{g \in \mathbb{M}_2(F) \mid \det g \neq 0\}$ はその開部分集合としての位相に関して局所コンパクト位相群である。さらに

$$K(\mathfrak{p}^n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a, d \in 1 + \mathfrak{p}^n \\ b, c \in \mathfrak{p}^n \end{array} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

はコンパクト開部分群からなる $\mathbf{1}_2$ の基本近傍系であるから、$G(F)$ も完全不連結位相群である。特に $\mathbf{K} := K(\mathcal{O}) = G(\mathcal{O})$ は $G(F)$ の極大コンパクト部分群である。

F 上の有限次元ベクトル空間 V 上の**高さ函数** *(height)* とは、函数 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で

(i) $\|v\| = 0$ となるためには $v = 0$ が必要十分。

(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda|_F \cdot \|v\|, (\forall \lambda \in F, v \in V)$.

(iii) 超距離不等式 $\|v + w\| \leq \sup(\|v\|, \|w\|), (\forall v, w \in V)$.

を満たすもののこととする。高さ函数は V の位相ベクトル空間としての位相に関して連続になることが知られている。

高さ函数を固定すれば直交の概念が定まる。$\mathbb{R}^n$ では 0 でないベクトル $\vec{v}$ が超平面 $H = \{w \in \mathbb{R}^n \mid v^* \cdot w = 0\}$ と直交するためには、 $\vec{v}$ と H の法線ベクトル v^* のなす角の余弦

$$\frac{|v^* \cdot v|_\infty}{\|v^*\| \cdot \|v\|}$$

が最大になることが必要十分だった。同様に V 上の高さ函数 $\|\cdot\|$ が与えられたとき、V 上の線型形式 f が定める超平面 $H = \{w \in V \mid f(w) = 0\}$ と $v \neq 0, \in V$ が $\|\cdot\|$ **直交** *($\|\cdot\|$-orthogonal)* とは、

$$\frac{|f(v)|_F}{\|v\|} \geq \frac{|f(x)|_F}{\|x\|}, \quad \forall x \in V \setminus \{0\}$$

となることと定義する。$|f(\cdot)|_F / \|\cdot\|$ はコンパクト集合 $\mathbf{P}(V) := (V \setminus \{0\})/F^\times$ 上の連続函数に落ちるから、このような $v \neq 0$ は必ず存在する。すなわち H の $\|\cdot\|$ 直交補空間 $L = F \cdot v$ が存在する。(一意とは限らない！)

補題 3.1.1. V 内の超平面 $H = \{w \in V \mid f(w) = 0\}$ と直線 $L = F \cdot v_1$, $(v_1 \neq 0, \in V)$ が $\|\cdot\|$ 直交であるためには、(i) $V = H \oplus L$ かつ (ii) $\forall v \oplus w \in V$, $(v \in H, w \in L)$ に対して $\|v + w\| = \sup(\|v\|, \|w\|)$ が成り立つことが必要十分である。

証明. 必要性。$H=\{w\in V\mid f(w)=0\}$ と L が $\|\cdot\|$ 直交しているとする。(i) は明らか。$v+w\in V$, $(v\in H, w\neq 0,\in L)$ を取れば定義から

$$\frac{|f(w)|_F}{\|w\|}\geq\frac{|f(v+w)|_F}{\|v+w\|}=\frac{|f(w)|_F}{\|v+w\|},\quad f(w)\neq 0$$

ゆえ $\|w\|\leq\|v+w\|$ を得る。一方で超距離不等式を $v=(v+w)-w$ に使えば、これと併せて

$$\|v\|\leq\sup(\|v+w\|,\|w\|)=\|v+w\|$$

でもあるから、

$$\sup(\|v\|,\|w\|)\leq\|v+w\|\leq\sup(\|v\|,\|w\|)$$

となって (ii) も従う ($w\neq 0$ としていたが $w=0$ の場合は明らかである)。

十分性。逆に (i), (ii) が成り立つとする。任意の $x\neq 0,\in V$ は (i) から $x=v+w$, $(v\in H, w\in L)$ と書ける。$w=0$ なら $|f(x)|_F/\|x\|=0\leq|f(v_1)|/\|v_1\|$ である。そうでなければ (ii) から $\|x\|=\sup(\|v\|,\|w\|)\geq\|w\|$ ゆえ、$f(w)\neq 0$ からやはり

$$\frac{|f(w)|_F}{\|w\|}\geq\frac{|f(w)|_F}{\|v+w\|}=\frac{|f(x)|_F}{\|x\|}$$

が従う。すなわち L は H と $\|\cdot\|$ 直交する。 □

これを受けて、V の部分空間 W, W' が $\|\cdot\|$ **直交**するとは $W\cap W'=\{0\}$ かつ、任意の $w\in W$, $w'\in W'$ に対して $\|w+w'\|=\sup(\|w\|,\|w'\|)$ が成り立つことと定義する。次は明らかである。

系 3.1.2 (Schmid の直交化法の類似). V 内の**旗** *(flag)*、すなわち部分空間の減少列 $V=W_n\supset W_{n-1}\supset\cdots\supset W_1\supset\{0\}$ で $\dim_F W_k=k$, $(1\leq k\leq n)$ となるものに対して、V の基底 $\{v_1,\ldots,v_n\}$ で

- $W_k=\mathrm{span}_F\{v_1,\ldots,v_k\}$;
- v_i たちは互いに $\|\cdot\|$ 直交、すなわち $\|\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i\|=\sup_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|_F\|v_i\|$ が成り立つ。

となるものが取れる。

ここで $|\lambda_i|_F$ は q の整数巾を動くから、$\|v_i\|$ の値如何によっては v_i を定数倍しても $\|v_i\|=1$ と「正規化」できるとは限らないことに注意しておく。

V 内の $\mathcal{O}$ **格子** *($\mathcal{O}$-lattice)* とは、V の開コンパクトな部分 $\mathcal{O}$ 加群のことである。$\mathcal{O}_F$ 格子 $L\subset V$ と $r>0$ に対しては、高さ函数

$$\|v\|:=\inf\{|\lambda|_F\mid\lambda\in F^\times,\ \lambda^{-1}v\in L\},\tag{3.1}$$

が定まる。さらにこの高さ函数から $L:=\{v\in V\mid\|v\|\leq r\}$ として $\mathcal{O}$ 格子 L が回復できる。こうして得られる高さ函数は像が $|\cdot|_F$ の像 $q^{\mathbb{Z}}\cup\{0\}$ に含まれるから、系 3.1.2 の基底元 v_i を適当に定数倍して $\|v_i\|=1$ と正規化できる。

問 3.1. V を上の通り非アルキメデス局所体 F 上の有限次元ベクトル空間とする。
(i) V の基底 $\{v_1,\dots,v_n\}$ に対して $L := \mathcal{O}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}v_n$ は V 内の $\mathcal{O}$ 格子であることを確かめよ。
(ii) $\left\|\sum_{i=1}^n x_i v_i\right\| := \sup_{1\le i\le n} |x_i|_F$ は V 上の高さ函数であることを確かめよ。
(iii) L と $\|\cdot\|$ が上の対応で対応していることを確かめよ。

補題 3.1.3. $G(F)$ は次の分解を持つ。
(1) **岩澤分解** $G(F) = B(F)\mathbf{K} = U(F)T(F)\mathbf{K}$.
(2) *Cartan* **分解**

$$G(F) = \coprod_{\substack{n,m\in\mathbb{Z}\\ n\le m}} \mathbf{K}\begin{pmatrix}\varpi^n & 0\\ 0 & \varpi^m\end{pmatrix}\mathbf{K}.$$

(3) *Bruhat* **分解**

$$G(F) = B(F) \sqcup U(F)wB(F), \quad w := \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

証明. (1) 縦ベクトルの空間 $V = F^2$ に $G(F)$ は左から線型変換の群として作用している。$\mathcal{O}$ 格子 $L \subset V$ に (3.1) で対応する高さ函数 $\|\cdot\|$ に関して直交する V の基底 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ を取れば、

$$L = \{\vec{v}\in V \mid \|\vec{v}\| \le 1\} = \mathcal{O}\vec{v}_1 \oplus \mathcal{O}\vec{v}_2$$

である。$G(F)$ は V の基底の集合に推移的に作用しているから、$L_0 := \mathcal{O}^2 = \mathcal{O}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \oplus \mathcal{O}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ として、

$$G(F) \ni g = (\vec{v}_1\, \vec{v}_2) \longmapsto gL_0 = \mathcal{O}\vec{v}_1 \oplus \mathcal{O}\vec{v}_2 \in \{V \text{ 内の } \mathcal{O} \text{ 格子 }\}$$

は全射。さらに L_0 の固定化群は $\mathbf{K}$ であるから、

$$G(F)/\mathbf{K} \ni g\mathbf{K} \longmapsto gL_0 \in \{V \text{ 内の } \mathcal{O} \text{ 格子 }\} \tag{3.2}$$

は全単射である。さて $g \in G(F)$ を取り、$L := gL_0$ に対応する V 上の高さ函数を $\|\cdot\|$ と書く。V 内の旗 $V = W_2 \supset W_1 = \{\left(\begin{smallmatrix}*\\0\end{smallmatrix}\right) \in V\} \supset \{0\}$ に系 3.1.2 を使って、$\|\cdot\|$ 直交基底 $\{\left(\begin{smallmatrix}a\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}b\\d\end{smallmatrix}\right)\}$ が取れる。さらにこれを $\|\left(\begin{smallmatrix}a\\0\end{smallmatrix}\right)\| = \|\left(\begin{smallmatrix}b\\d\end{smallmatrix}\right)\| = 1$ と正規化しておけば、

$$L = \{\vec{v} = \lambda_1\left(\begin{smallmatrix}a\\0\end{smallmatrix}\right) + \lambda_2\left(\begin{smallmatrix}b\\d\end{smallmatrix}\right) \mid \|\vec{v}\| = \sup(|\lambda_1|_F, |\lambda_2|_F) \le 1\} = \begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} L_0$$

が成り立つ。(3.2) と併せて、$g \in \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)\mathbf{K}$ を得る。

(2) $\mathbb{M}_2(F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varpi^{-n}\mathbb{M}_2(\mathcal{O})$ だから、勝手な $g = \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in G(F)$ は $g = \varpi^{-r}\cdot h$, $r\in\mathbb{N}$, $h \in \mathbb{M}_2(\mathcal{O}) \cap G(F)$ と書ける。一方 $\mathcal{O}$ は任意のイデアルが (ϖ^n), $(n\in\mathbb{N})$ と書ける主イデアル整域なので単因子論が適用できる。すなわち $n' \le m' \in \mathbb{N}$ がただ一組決まって

$$h = k\begin{pmatrix}\varpi^{n'} & 0\\ 0 & \varpi^{m'}\end{pmatrix}k', \quad k,\, k' \in G(\mathcal{O})$$

と書ける。$n=n'-r$, $m=m'-r$ とすれば、$g\in\mathbf{K}\left(\begin{smallmatrix}\varpi^n & 0\\ 0 & \varpi^m\end{smallmatrix}\right)\mathbf{K}$ が従う。

(3) 行列の基本変形を思い出そう。

$$\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{v}_1+b\vec{v}_2\\ \vec{v}_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b'\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{v}_1 & b'\vec{v}_1+\vec{v}_2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\vec{v}_1 & d\vec{v}_2\end{pmatrix}.$$

これらを組み合わせれば行および列の置換以外の全ての基本変形を作れるから、勝手な $g\in G(F)$ を $\mathbf{1}_2$ または $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ に持っていける。 □

問 3.2. 補題 3.1.3 の証明を拡張して $G_n(F):=GL(n,F)$ に対して次の分解を証明せよ。

(i) $G_n(F)$ 内の上三角な元からなる部分群を $B_n(F)$ とするとき、岩澤分解 $G_n(F)=B_n(F)G_n(\mathcal{O})$。

(ii) Cartan 分解

$$G_n(F)=\coprod_{d_1\le d_2\le\cdots\le d_n\in\mathbb{Z}}G_n(\mathcal{O})\begin{pmatrix}\varpi^{d_1} & & & \\ & \varpi^{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varpi^{d_n}\end{pmatrix}G_n(\mathcal{O}).$$

(iii) W_n で $G_n(F)$ 内の**置換行列**、すなわち各行および各列の成分が一つの 1 を除いて全て 0 であるような行列全体の集合とするとき、Bruhat 分解 $G_n(F)=\coprod_{w\in W_n}B_n(F)wB_n(F)$.

3.1.3　測度と Hecke 環

$\mathbf{G}$ を完全不連結局所コンパクト位相群とする。$\mathbf{G}$ 上の局所定数函数 (65 頁参照) の空間を $C^\infty(\mathbf{G})$, そのコンパクト台を持つ元たちのなす部分空間を $C_c^\infty(\mathbf{G})$ と書く。$\mathbf{G}$ 上には左不変測度 $\mu_{\mathbf{G}}$, すなわち 65 頁の不変測度の二つ目の条件を

(ii) 左不変: $\forall g\in\mathbf{G}$ に対して $L(g)\mu_{\mathbf{G}}(f):=\mu_{\mathbf{G}}(L(g^{-1})f)=\mu_{\mathbf{G}}(f)$. ただし $(L(g)f)(x):=f(g^{-1}x)$ (左移動作用) と書いた。

で置き換えたものが $\mathbb{R}_+^\times$ 倍を除いてただ一つある。これをやはり習慣に倣って

$$\mu_{\mathbf{G}}(f)=\int_{\mathbf{G}}f(g)\,d\mu_{\mathbf{G}}(g),\quad f\in C_c^\infty(\mathbf{G})$$

などと書く。同様に $\mathbf{G}$ 上の右不変測度も正実数倍を除いて一意に存在する。しかし $\mathbf{G}$ が非可換ならば左および右不変測度は必ずしも一致しない。そこで

$$C_c^\infty(H(F))\ni f\longmapsto\int_{\mathbf{G}}f(g)\delta_{\mathbf{G}}(g)\,d\mu_{\mathbf{G}}(g)\in\mathbb{C}$$

が $\mathbf{G}$ 上の右不変測度になるような函数 $\delta_{\mathbf{G}}:\mathbf{G}\to\mathbb{R}_{+}^{\times}$ で $\delta_{\mathbf{G}}(1)=1$ となるものを $\mathbf{G}$ の**モヂュラス指標** *(modular character)* と呼ぶ。これはその名の通り連続準同型、つまり Weil の言うところの擬指標 (quasi-character) になる。特に $\delta_{\mathbf{G}}=1$ のとき $\mathbf{G}$ は**ユニモヂュラ** *(unimodular)* であるという。

問 3.3. $\mathbf{G}$ がコンパクト、または離散的なら $\mathbf{G}$ はユニモヂュラであることを確かめよ。

次に $\mathbf{H}\subset\mathbf{G}$ を閉部分群とすれば、これは誘導位相に関して完全不連結局所コンパクト位相群になる。$\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}:=(\delta_{\mathbf{G}}|_{\mathbf{H}})\delta_{\mathbf{H}}^{-1}$ と略記する。$\mathbf{G}$ 上の局所定数函数 f で

- $f(hg)=\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}(h)^{-1}f(g)$, $(h\in\mathbf{H},\ g\in\mathbf{G})$;
- コンパクト集合 $C_f\in\mathbf{G}$ があって $\mathrm{supp}f\subset\mathbf{H}C_f$

を満たすものたちの空間を $C_c^\infty(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1})$ と書く。$\mathbf{G}$ 等質空間 $\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}$ は再び完全不連結局所コンパクト空間になる (103 を見よ) が、この上の「右不変測度」も定数倍を除いて一意に存在する。すなわち次が成り立つ。

補題 3.1.4. $\mathbf{G}$ を完全不連結局所コンパクト位相群、$\mathbf{H}\subset\mathbf{G}$ を閉部分群とする。線型汎函数 $\nu_{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}:C_c^\infty(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1})\to\mathbb{C}$ で右 $\mathbf{G}$ 不変

$$\int_{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}f(xg)\,d\nu_{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}(x)=\int_{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}f(x)\,d\nu_{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}(x),\quad\forall g\in\mathbf{G},\ f\in C_c^\infty(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1}).$$

なものが定数倍を除いてただ一つある。さらに $\mathbf{G},\mathbf{H}$ それぞれの上の左不変測度 $\mu_{\mathbf{G}},\mu_{\mathbf{H}}$ を止めるごとに、$\nu_{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}$ で積分公式

$$\int_{\mathbf{G}}f(g)\delta_{\mathbf{G}}(g)\,d\mu_{\mathbf{G}}(g)=\int_{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}\int_{\mathbf{H}}f(hg)\delta_{\mathbf{G}}(h)\,d\mu_{\mathbf{H}}(h)\,d\nu_{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}(g),\quad f\in C_c^\infty(\mathbf{G})$$

を満たすものがただ一つある。

証明. まず次を示す。

(i) $p:C_c^\infty(\mathbf{G})\to C_c^\infty(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1})$ を

$$p(f)(g):=\int_{\mathbf{H}}f(hg)\delta_{\mathbf{G}}(h)\,d\mu_{\mathbf{H}}(h)$$

と定めれば、これは定義可能な全射。

(ii) $p(f)=0$ ならば $\int_{\mathbf{G}}f(g)\delta_{\mathbf{G}}(g)\,d\mu_{\mathbf{G}}(g)=0$.

(i) $h_1\in\mathbf{H}$, $f\in C_c^\infty(\mathbf{G})$ として

$$\int_{\mathbf{H}}f(hh_1g)\delta_{\mathbf{G}}(h)\,d\mu_{\mathbf{H}}(h)=\int_{\mathbf{H}}f(hh_1g)\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}(h)\delta_{\mathbf{H}}(h)\,d\mu_{\mathbf{H}}(h)$$

hh_1 を h とおきなおして

$$=\int_{\mathbf{H}} f(hg)\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}(hh_1^{-1})\delta_{\mathbf{H}}(hh_1^{-1})\,d\mu_{\mathbf{H}}(hh_1^{-1})$$

$\delta_{\mathbf{H}}(h)d\mu_{\mathbf{H}}(h)$ は右不変ゆえ

$$=\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}(h_1)^{-1}\int_{\mathbf{H}} f(hg)\delta_{\mathbf{G}}(h)\,d\mu_{\mathbf{H}}(h).$$

だから p は定義可能な線型写像。

$\mathbf{G}$ の開コンパクト部分群 K に対して $C_c^\infty(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1})$ 内の右 K 不変な元たちのなす部分空間を $C_c^\infty(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1})^K$ と書けば、

$$C_c^\infty(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1}) = \bigcup_{\substack{K\subset G(F)\\ \text{開コンパクト部分群}}} C_c^\infty(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1})^K \tag{3.3}$$

である。$\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}/K$ の完全代表系 $\{g_i\}_{i\in I}$ を固定すれば、$C_c^\infty(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1})^K$ は

$$f_i(x) := \begin{cases}\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}(h)^{-1} & x = hg_ik \in \mathbf{H}g_iK \text{ のとき}\\ 0 & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

$(i\in I)$ たちで張られる。今、Ch_{g_iK} を g_iK の特性函数として

$$\widetilde{f_i}(g) := \left(\int_{\mathbf{H}} \mathrm{Ch}_{g_iK}(hg_i)\delta_{\mathbf{G}}(h)\,d\mu_{\mathbf{H}}(h)\right)^{-1}\mathrm{Ch}_{g_iK}(g)$$

とおけば、明らかに $p(\widetilde{f_i}) = f_i$ だから (3.3) と併せて p は全射であることがわかる。

(ii) 離散集合の場合に帰着すればよい。(i) の証明から明らかに p は

$$p_i^K : C_c^\infty(\mathbf{H}g_iK)^K \xrightarrow{\text{射影}} C_c(\mathbf{H}g_iK/K) \longrightarrow C_c(\mathbf{H}\backslash\mathbf{H}g_iK/K,\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1})$$

$(i\in I,\ K\subset\mathbf{G}$ は開コンパクト部分群$)$ たちの合併である。離散集合 $\mathbf{H}g_iK/K$ には $\mathbf{H}$ が左移動で推移的に作用しているから、その上の「分布」($C_c(\mathbf{H}g_iK/K)$ 上の線型形式) T で

$$L(h)T(f) = T(L(h^{-1})f) = \delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}(h)^{-1}T(f),\quad h\in\mathbf{H}$$

を満たすものは定数倍を除いて一意である。$\delta_{\mathbf{G}}\mu_{\mathbf{G}}$ も $f\mapsto p_i^K(f)(g_i)$ もこの条件を満たすから (ii) が従う。

以上 (i), (ii) から

$$\nu_{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}} : C_c^\infty(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1}) \ni p(f) \longmapsto \int_{\mathbf{G}} f(g)\delta_{\mathbf{G}}(g)\,d\mu_{\mathbf{G}}(g) \in \mathbb{C}$$

は定義可能である。これが補題の条件を満たすことは明らかであろう。 □

$\mathbf{G}$ を上の通りとして、$f, f' \in C_c^\infty(\mathbf{G})$ の**畳み込み積** *(convolution)*

$$f * f'(g) := \int_{\mathbf{G}} f(h) f'(h^{-1}g)\, d\mu_{\mathbf{G}}(h)$$

は再び $C_c^\infty(\mathbf{G})$ に属する。$C_c^\infty(\mathbf{G})$ にはこれを積とする $\mathbb{C}$ 代数の構造が定まるが、これを $\mathbf{G}$ の *Hecke* **環** *(Hecke algebra)* と呼び、$\mathcal{H}(\mathbf{G})$ と書く。開コンパクト群 $K \subset \mathbf{G}$ に対して両側 K 不変な $\mathcal{H}(\mathbf{G})$ の元たちのなす部分 $\mathbb{C}$ 代数を $\mathcal{H}_K(\mathbf{G}) = C_c(K\backslash\mathbf{G}/K)$ と書けば ($\mathbf{G}$ の *K-Hecke* **環**)、

$$\mathcal{H}(\mathbf{G}) = \bigcup_{\substack{K \subset \mathbf{G} \\ \text{開コンパクト部分群}}} \mathcal{H}_K(\mathbf{G}) \tag{3.4}$$

である。

さて、これらの結果を $\mathbf{G} = G(F)$ に適用しよう。$\mathbf{K}$ は $G(F)$ の開部分群であるから、閉部分群 $H \subset G$ に対して $\mathbf{K}^H := H(F) \cap \mathbf{K}$ も $H(F)$ の開コンパクト部分群である。そこで特に断らない限り $\mu_H(\mathbf{K}^H) = 1$ となるよう $\mu_H = \mu_{H(F)}$ を正規化しておく。以下でよく登場する H に対する μ_H を列挙しておこう。F 上の $\mathcal{O}$ に 1 を対応させる不変測度を単に dx と書く。F のモヂュラスの定義から $dx^\times := \zeta_F(1)dx/|x|_F$ は $\mathrm{meas}(\mathcal{O}^\times) = 1$ となる $F^\times$ 上の不変測度である。ここで

$$\zeta_F(s) := \frac{1}{1 - q^{-s}}$$

は F の *Dedekind* **ゼータ因子**である。

(i) $U(F)$ 上には、同型 $F \ni x \xrightarrow{\sim} \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in U(F)$ で dx を持っていった測度。

(ii) $T(F)$ 上には、同型 $(F^\times)^2 \ni (t_1, t_2) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{smallmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{smallmatrix}\right) \in T(F)$ で $dt_1^\times\, dt_2^\times$ を持っていった測度。

(iii) $G(F)$ 上では $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ として

$$dg = \frac{\zeta_F(1) da\, db\, dc\, dd}{|\det g|_F^2}.$$

これらの形から明らかに $T(F), U(F), G(F)$ はユニモヂュラである。

問 3.4.

$$\mu_B : C_c^\infty(B(F)) \ni f \longmapsto \int_{(F^\times)^2} \int_F f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\right) \left|\frac{t_1}{t_2}\right|^{-1} dx\, dt_1^\times\, dt_2^\times \in \mathbb{C}$$

$$\nu_B : C_c^\infty(B(F)) \ni f \longmapsto \int_{(F^\times)^2} \int_F f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\right) dx\, dt_1^\times\, dt_2^\times \in \mathbb{C}$$

はそれぞれ、$B(F)$ 上の左および右不変測度であることを確かめよ。これから

$$\delta_B\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \left|\frac{a}{d}\right|_F$$

がわかる。

系 3.1.5. $f \in C_c^\infty(G(F))$ に対して積分公式

$$\int_{G(F)} f(g)\,dg = \int_{\mathbf{K}} \int_{(F^\times)^2} \int_F f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} k\right) \left|\frac{t_1}{t_2}\right|_F^{-1} dx\,dt_1^\times\,dt_2^\times\,dk$$

が成り立つ。

証明. 補題 3.1.4 から問題 3.4 の μ_B に対して

$$\int_{G(F)} f(g)\,dg = \int_{B(F)\backslash G(F)} \int_{B(F)} f(bg)\,d\mu_B(b)\,d\nu_{B\backslash G}(g), \quad f \in C_c^\infty(G(F)) \tag{3.5}$$

をみたす $C_c^\infty(B(F)\backslash G(F), \delta_B)$ 上の右 $G(F)$ 不変線型汎函数 $\nu_{B\backslash G}$ が唯一つある。

一方、岩澤分解から制限射 $\mathrm{res}_{\mathbf{K}} : C_c^\infty(B(F)\backslash G(F), \delta_B) \ni f \mapsto f|_{\mathbf{K}} \in C^\infty(\mathbf{K}^B\backslash\mathbf{K})$ は線型同型ゆえ、線型汎函数

$$\nu_{B,\mathbf{K}} : C^\infty(\mathbf{K}^B\backslash\mathbf{K}) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{res}_{\mathbf{K}}^{-1}} C_c^\infty(B(F)\backslash G(F), \delta_B) \xrightarrow{\nu_{B\backslash G}} \mathbb{C}$$

は定義可能で、$\nu_{B\backslash G}$ は右 $G(F)$ 不変だったからこれは右 $\mathbf{K}$ 不変である。補題 3.1.4 を $\mathbf{K}^B\backslash\mathbf{K}$ に適用すれば、ある $c \in \mathbb{R}_+^\times$ があって

$$\int_{\mathbf{K}^B\backslash\mathbf{K}} \int_{\mathbf{K}^B} f(bk)\,d\mu_B(b)\,d\nu_{B,\mathbf{K}}(k) = c\int_{\mathbf{K}} f(k)\,dk, \quad \forall f \in C^\infty(\mathbf{K})$$

が成り立つ。これを (3.5) に代入すれば

$$\int_{G(F)} f(g)\,dg = c\int_{\mathbf{K}} \int_{B(F)} f(bk)\,d\mu_B(b)\,dk, \quad \forall f \in C_c^\infty(G(F))$$

が得られる。ここで f として $\mathbf{K}$ の特性函数を取れば $c = 1$ がわかり、系が従う。 $\square$

3.2 完全不連結群の表現

まずは一般に完全不連結な局所コンパクト位相群 $\mathbf{G}$ の表現を考えよう。詳細については [BZ76, I 章], [高橋, 1 章] などを参照されたい。

3.2.1 滑らかな表現

Bernstein-Zelevinsky に倣って、完全不連結局所コンパクト位相空間を簡略のため ℓ **空間**、同様に完全不連結局所コンパクト位相群を ℓ **群**と呼ぶ。局所コンパクトといったときには Hausdorff 性も要求していることを強調しておく[1]。$\mathbb{C}$ ベクトル空間 V 上の線型自己

[1] Bourbaki に倣ってコンパクトな空間は Hausdorff であるとしている。単に任意の被覆が有限部分被覆を持つ空間は**準コンパクト** *(quasi-compact)* であると言われる。

同型の集合を $GL_{\mathbb{C}}(V)$ と書く。これは合成を積として群をなす。$\mathbf{G}$ の抽象群としての表現 (π, V), すなわち $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V と群準同型 $\pi : \mathbf{G} \to GL_{\mathbb{C}}(V)$ の対が**滑らか** *(smooth)* とは、任意の $v \in V$ の固定化群 $\mathrm{Stab}(v, \mathbf{G}) := \{g \in \mathbf{G} \mid \pi(g)v = v\}$ が $\mathbf{G}$ の開部分群であることとする。V は有限次元とは限らないのだが、この定義は V 上の位相に依存していないことに注意されたい。$\mathbf{G}$ の滑らかな表現 (π, V) の元 $v \in V$ と $f \in \mathcal{H}(\mathbf{G})$ に対して、開コンパクト部分群 $K \subset \mathbf{G}$ で

- $K \subset \mathrm{Stab}(v, \mathbf{G})$;
- $f \in \mathcal{H}_K(\mathbf{G})$

なるものを取れば、

$$\pi(f)v = \int_{\mathbf{G}} f(g)\pi(g)v \, d\mu_{\mathbf{G}}(g) := \mu_{\mathbf{G}}(K) \sum_{\gamma \in \mathrm{supp} f/K} f(\gamma)\pi(\gamma)v, \quad v \in V$$

は定義可能である。これと (3.4) から (π, V) は**非退化**な、すなわち $\mathcal{H}(\mathbf{G})V = V$ なる $\mathcal{H}(\mathbf{G})$ 加群になることが示せる。特に K-Hecke 環 $\mathcal{H}_K(\mathbf{G})$ の単位元を

$$1_K(g) := \begin{cases} \mathrm{meas}(K)^{-1} & g \in K \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

と書けば、$\pi(1_K)$ は V 内の K 不変ベクトルのなす部分空間 V^K への射影子になる。$\mathbf{G}$ の二つの滑らかな表現 (π, V), (π', V') の間の $\mathbf{G}$ **準同型** *($\mathbf{G}$-homomorphism, $\mathbf{G}$-intertwining map)* とは、線型写像 $\phi : V \to V'$ で任意の $g \in \mathbf{G}$ に対して可換図式

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & V' \\ {\scriptstyle \pi(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'(g)} \\ V & \xrightarrow{\phi} & V' \end{array}$$

を満たすものである。さらに ϕ が可逆なとき、これを $\mathbf{G}$ **同型** *($\mathbf{G}$-isomorphism)* という。明らかに $\mathbf{G}$ 同型は滑らかな表現の間の同値関係である。(π, V) と (π', V') が $\mathbf{G}$ 同型なことを $\pi \simeq \pi'$ と書く。

約束：以下 $\mathbf{G}$ の滑らかな表現 (π, V) の同型類を π で表す。

(π, V) から (π', V') への $\mathbf{G}$ 準同型全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V, V')$ と書く。特に $\mathrm{End}_{\mathbf{G}}(V) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(V, V)$ は合成を積とする $\mathbb{C}$ 代数であり、その単元群は (π, V) の $\mathbf{G}$ 自己同型の集合 $\mathrm{Aut}_{\mathbf{G}}(V)$ である。$\mathrm{Alg}(\mathbf{G})$ で $\mathbf{G}$ の滑らかな表現を対象とし、それらの間の $\mathbf{G}$ 準同型を射とする加法圏を表す。これは $\mathcal{H}(\mathbf{G})V = V$ という意味で非退化な $\mathcal{H}(\mathbf{G})$ 加群の圏 $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}(\mathbf{G}))$ に他ならない。

(π, V) を $\mathbf{G}$ の滑らかな表現とする。部分空間 $V_1 \subset V$ が $\mathbf{G}$ **不変**、すなわち $\pi(g)v_1 \in V_1$, $(\forall g \in \mathbf{G},\ v_1 \in V_1)$ を満たすとする。このとき $\pi(g^{-1})|_{V_1}$ は $\pi(g)|_{V_1}$ の逆写像ゆえ、

$$\pi_1 : \mathbf{G} \ni g \longmapsto (\pi(g)|_{V_1}) \in GL_{\mathbb{C}}(V_1)$$

は $\mathbf{G}$ の滑らかな表現 (π_1, V_1) を与える。このとき (π_1, V_1) は (π, V) の**部分表現** *(subrepresentation)* であるという。さらに $\pi(g)$ は可逆な線型写像

$$\pi/\pi_1(g) : V/V_1 \ni v + V_1 \longmapsto \pi(g)v + V_1 \in V/V_1$$

を与えるから、滑らかな表現 $(\pi/\pi_1, V/V_1)$ も定まる。これを部分表現 (π_1, V_1) による (π, V) の**商表現** *(quotient representation)* という。もっと一般に (π, V) の部分表現の商表現のことをその**部分商表現** *(subquotient)* と呼ぶ。(π, V) は自分自身と $\{0\}$ 以外に部分表現、つまり $\mathbf{G}$ 不変部分空間を持たないとき**既約** *(irreducible)*、そうでないとき**可約** *(reducible)* であると言われる。$\Pi(\mathbf{G})$ で $\mathbf{G}$ の既約で滑らかな表現の同型類の集合を表す。

補題 3.2.1. (i) $\mathbf{G}$ の滑らかな表現 (π, V) が既約であるためには、任意の開コンパクト部分群 $K \subset \mathbf{G}$ に対して、V^K が $\{0\}$ ないしは単純 $\mathcal{H}_K(\mathbf{G})$ 加群であることが必要十分。
(ii) $K \subset \mathbf{G}$ を開コンパクト部分群とし、$\mathbf{G}$ の既約表現 (π_i, V_i), $(i = 1, 2)$ が $V_i^K \neq \{0\}$ を満たすとする。$\pi_1 \simeq \pi_2$ であるためには $\mathcal{H}_K(\mathbf{G})$ 加群 V_1^K と V_2^K が同型なことが必要十分である。

証明. (i) $(\pi, V) \in \mathrm{Alg}(\mathbf{G})$ と開コンパクト部分群 $K \subset \mathbf{G}$ を取る。V^K の部分 $\mathcal{H}_K(\mathbf{G})$ 加群 M に対して、

$$\begin{aligned}(\mathrm{span}\pi(\mathbf{G})M)^K =&\pi(1_K)\pi(\mathcal{H}(\mathbf{G}))M = \pi(1_K)\pi(\mathcal{H}(\mathbf{G}))\pi(1_K)M \\ =&\pi(\mathcal{H}_K(\mathbf{G}))M = M\end{aligned} \tag{3.6}$$

である。これから条件の必要性は直ちに従う。逆に (π, V) が非自明な部分表現 (π', V') を含めば、ある $v \neq 0, \in V \setminus V'$ を固定する開コンパクト部分群 K で $(V')^K \neq \{0\}$ なるものに対して、$(V')^K$ は V^K の非自明な部分 $\mathcal{H}_K(\mathbf{G})$ 加群である。

(ii) 必要性は明らか。逆に $\mathcal{H}_K(\mathbf{G})$ 同型 $\varphi : V_1^K \xrightarrow{\sim} V_2^K$ があったとする。$(\pi, V) := (\pi_1 \oplus \pi_2, V_1 \oplus V_2)$ として $M := \{(v, \varphi(v)) \,|\, v \in V_1^K\} \subset V^K$ は部分 $\mathcal{H}_K(\mathbf{G})$ 加群だから、(3.6) から

$$(\mathrm{span}\pi(\mathbf{G})M)^K = M \not\subset V_1 \oplus \{0\},\ \{0\} \oplus V_2.$$

よって M の生成する $\mathbf{G}$ の滑らかな表現 $W := \mathrm{span}\pi(\mathbf{G})M$ への射影 $\mathrm{pr}_i : V \twoheadrightarrow V_i$ の制限は、非自明な $\mathbf{G}$ 準同型 $V_1 \leftarrow W \rightarrow V_2$ を与える。(π_i, V_i) は既約であったから、これらはいずれも同型でなくてはならない。$(\pi_1, V_1) \simeq W \simeq (\pi_2, V_2)$. □

V の双対空間 $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ への $\mathbf{G}$ の作用を

$$\langle \pi^*(g)v^*, v\rangle := \langle v^*, \pi(g^{-1})v\rangle, \quad g \in \mathbf{G}, v^* \in V^*, v \in V$$

と定めると、(π^*, V^*) は再び $\mathbf{G}$ の表現 ((π, V) の**双対表現** *(dual representation)* と呼ばれる) になるがこれは滑らかとは限らない。一方で V^* の滑らかなベクトルからなる部分空間

$$V^\vee := \{v^* \in V^* \,|\, \mathrm{Stab}(v^*, \mathbf{G}) \text{ は開部分群 }\}$$

は明らかに $\mathbf{G}$ 不変である。そこで (π^*, V^*) の最大の滑らかな部分表現である $(\pi^\vee, V^\vee)$ を (π, V) の**反傾表現** *(contragredient representation)* と呼ぶ。$v \in V$, $v^\vee \in V^\vee$ に対して定まる $\mathbf{G}$ 上の局所定数函数

$$f_{v,v^\vee}(g) := \langle \pi(g)v, v^\vee \rangle, \quad g \in \mathbf{G}$$

を (π, V) の**行列成分** *(matrix coefficient)* という。

問 3.5. (π, V) が $\mathbf{G}$ の既約で滑らかな表現とするとき、その反傾表現 $(\pi^\vee, V^\vee)$ は再び既約であることを確かめよ。

問 3.6. (i) $C_c^\infty(\mathbf{G})$ 上の右正則表現 $(R, C_c^\infty(\mathbf{G}))$:

$$[R(g)\phi](x) = \phi(xg), \quad g \in \mathbf{G},\, \phi \in C_c^\infty(\mathbf{G})$$

は滑らかであることを示せ。
(ii) その双対表現は滑らかでないことを示し、$(R, C_c^\infty(\mathbf{G}))$ の反傾表現を求めよ。

補題 3.2.2 (Schur の補題). $\mathbf{G}$ が可算コンパクトならば、その既約で滑らかな表現 (π, V) の自己準同型は定数倍のみ: $\mathrm{End}_{\mathbf{G}}(V) = \mathbb{C}$.

証明. まず、$A \neq 0, \in \mathrm{End}_{\mathbf{G}}(V)$ に対して、$\ker A$, $\mathrm{im} A$ はともに V の $\mathbf{G}$ 不変部分空間だから、(π, V) の既約性より $\ker A = \{0\}$, $\mathrm{im} A = V$, すなわち $A \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{G}}(V)$ である。

V **が有限次元のときの証明:** 上の A が $\mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_V$ に属さないとすると、任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $A - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ も上から $\mathrm{Aut}_{\mathbf{G}}(V)$ に属する。$\mathbb{C}$ は代数閉体だから A の特性多項式は $\Phi_A(T) := \det(T \cdot \mathrm{id}_V - A) = \prod_{i=1}^r (T - \lambda_i)$ と一次式の積に分解する。このとき各 $A - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V$ が可逆なことは、Cayley-Hamilton の定理

$$0 = \Phi_A(A) = \prod_{i=1}^r (A - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V)$$

に矛盾する。

一般の場合の証明: $v \neq 0, \in V$ に対して $K := \mathrm{Stab}(v, \mathbf{G})$ は開部分群で $\mathbf{G}$ は可算コンパクトゆえ、可算剰余類分解

$$\mathbf{G} = \coprod_{n \in \mathbb{N}} g_n K$$

がある。特に v の生成する (π, V) の部分表現は

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\pi(g)v \,|\, g \in \mathbf{G}\} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\pi(g_n)v \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

で与えられるが、π は既約だからこれは V 自身に一致する。特に V は可算基底を持つ。

やはり A が $\mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_V$ に属さなければ、$A - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$, $(\lambda \in \mathbb{C})$ は可逆だから逆写像 $(A - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{-1}$ がある。このとき、

$$\boxed{v \neq 0, \in V \text{ に対して } \{(A - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{-1}(v) \,|\, \lambda \in \mathbb{C}\} \text{ は一次独立である。}} \tag{3.7}$$

実際、一次関係 $\sum_{i=1}^{r} \mu_i(A-\lambda_i\cdot \mathrm{id}_V)^{-1}(v)=0$ があれば、

$$\prod_{i=1}^{r}(T-\lambda_i)\cdot\sum_{i=1}^{r}\mu_i(T-\lambda_i)^{-1}=\prod_{i=1}^{r-1}(T-\nu_i)$$

と展開して

$$0=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(A-\lambda_i\cdot\mathrm{id}_V)^{-1}(v)=\prod_{i=1}^{r}(A-\lambda_i\cdot\mathrm{id}_V)^{-1}\prod_{i=1}^{r-1}(A-\nu_i\cdot\mathrm{id}_V)(v)$$

でなくてはならない。これは $A-\lambda\cdot\mathrm{id}_V$, $(\lambda\in\mathbb{C})$ の可逆性に反する。ところが (3.7) は V が可算基底を持つことに矛盾する。 □

3.2.2　誘導表現

$\mathbf{G}$ の滑らかな表現 (π,V) の閉部分群 $\mathbf{H}$ への制限 $(\pi|_{\mathbf{H}},V)$ が再び滑らかな表現になることは明らかである。逆に $\mathbf{H}$ の滑らかな表現 (π,V) から $\mathbf{G}$ の滑らかな表現を作るには次の二つの方法がある。

$$\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(V):=\left\{\phi:\mathbf{G}\to V\;\middle|\;\begin{array}{ll}\text{(i)} & \text{ある開部分群 } K_\phi\subset\mathbf{G}\text{ があって}\\ & \phi(gk)=\phi(g),\ \forall g\in\mathbf{G},\, k\in K_\phi\\ \text{(ii)} & \phi(hg)=\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}(h)^{-1/2}\pi(h)\phi(g),\ h\in\mathbf{H},\, g\in\mathbf{G}\end{array}\right\}$$

への $\mathbf{G}$ の作用を

$$[\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\pi,g)\phi](x)=\phi(xg),\quad (g\in\mathbf{G},\,\phi\in\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(V))$$

と定めると、$(\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\pi),\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(V))$ は $\mathbf{G}$ の滑らかな表現になる。ただし $\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}$ は 70 頁の通りである。これを (π,V) の $\mathbf{G}$ への**誘導表現** *(induced representation)* という。さらに

$$\mathrm{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(V):=\left\{\phi\in\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(V)\;\middle|\;\begin{array}{c}\text{コンパクト集合 } C_\phi\subset\mathbf{G}\text{ があって}\\ \mathrm{supp}\phi\subset\mathbf{H}C_\phi\end{array}\right\}$$

は $\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(V)$ の $\mathbf{G}$ 不変部分空間となるが、こうして得られる部分表現 $(\mathrm{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\pi),\mathrm{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(V))$ を (π,V) の $\mathbf{G}$ への**コンパクト**または**有限誘導表現** *(finitely inducued reprensentation)* という。

補題 3.2.3. (π,V) を $\mathbf{G}$ の閉部分群 $\mathbf{H}$ の滑らかな表現とするとき、$\mathrm{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\pi)^\vee\simeq\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\pi^\vee)$ である。

証明. $\mathrm{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(V)$ と $\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(V^\vee)$ の間の双線型形式を

$$\langle\phi,\phi^\vee\rangle:=\int_{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}\langle\phi(g),\phi^\vee(g)\rangle\,d\nu_{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}(g),\quad \phi\in\mathrm{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(V),\ \phi^\vee\in\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(V^\vee)$$

と定める。ここで被積分函数の $\langle\cdot,\cdot\rangle$ はもちろん $V\times V^\vee$ 上の標準 $\mathbf{H}$ 不変双線型形式 (双対性) である。ϕ は $\mathbf{H}$ を法としてコンパクトな台を持つから右辺の被積分函数は $C_c^\infty(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1})$ に属し、積分は定義可能である。これは明らかに非退化であり、$\nu_{\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}}$ が右 $\mathbf{G}$ 不変なことから

$$\langle \mathrm{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\pi,g)\phi,\phi^\vee\rangle=\langle\phi,\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\pi^\vee,g^{-1})\phi^\vee\rangle,\quad \forall g\in\mathbf{G}$$

を満たす。 □

命題 3.2.4 (Frobenius 相互律). $\mathbf{G}\supset\mathbf{H}$ を上の通りとする。(π,V) を $\mathbf{G}$ の、(τ,W) を $\mathbf{H}$ のそれぞれ滑らかな表現とするとき、

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(\pi,\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\tau))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{1/2}(\pi|_{\mathbf{H}}),\tau)$$

が成り立つ。

証明. $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(\pi,\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\tau))\ni\Phi$ に対して

$$\phi:V\ni v\longmapsto\Phi(v)(1)\in W$$

とおけば、

$$\phi(\pi(h)v)=\Phi(\pi(h)v)(1)=[\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\tau,h)\Phi(v)](1)=\Phi(v)(h)=\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1/2}(h)\tau(h)\phi(v)$$

だから $\phi\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{1/2}(\pi|_{\mathbf{H}}),\tau)$ である。逆に $\phi\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{1/2}(\pi|_{\mathbf{H}}),\tau)$ に対して

$$\Phi:V\ni v\longmapsto[\Phi(v)(g):=\phi(\pi(g)v)]\in\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(W)$$

とおけば、

$$\Phi(v)(hg)=\phi(\pi(h)\pi(g)v)=\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}(h)^{-1/2}\tau(h)\phi(\pi(g)v)=\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}(h)^{-1/2}\tau(h)\Phi(v)(g)$$

からこれは定義可能で、$\Phi\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(\pi,\mathrm{Ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\tau))$ も容易にわかる。これらが互いに逆写像になっていることは容易に確かめられるから読者に委ねることにしよう。 □

ℓ ベクトル束と誘導表現　実 Lie 群の誘導表現がしばしばベクトル束の切断の空間に実現できるように、ℓ 群の有限誘導表現もある種のベクトル束の切断の空間と見なせる。ℓ 空間 X 上の ℓ **ベクトル束** $\mathcal{V}$ とは、その**茎** *(stalk)* と呼ばれる $\mathbb{C}$ ベクトル空間の族 $\{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$ と X 上の**切断** *(section)* と呼ばれる函数の族 $\Gamma(X,\mathcal{V})=\{\varphi:X\ni x\mapsto\varphi(x)\in\mathcal{V}_x\}$ であって、

(i) $\Gamma(X,\mathcal{V})$ は $C^\infty(X)$ 上の加群。

(ii) 開部分集合 $V\subset X$ に対して $\Gamma(V,\mathcal{V}):=\{\varphi|_V\mid\varphi\in\Gamma(X,\mathcal{V})\}$ と書く。被覆 $X=\bigcup_{i\in I}U_i$ とその上の切断の族 $\{\varphi_i\in\Gamma(U_i,\mathcal{V})\}_{i\in I}$ が $\varphi_i|_{U_i\cap U_j}=\varphi_j|_{U_i\cap U_j}$ を満たせば、ある $\varphi\in\Gamma(X,\mathcal{V})$ があって $\varphi_i=\varphi|_{U_i},\ \forall i\in I$ である (局所性)。

(iii) $\varphi \in \Gamma(X,\mathcal{V})$ が点 $x \in X$ で $\varphi(x)=0$ なら、x のある近傍 V 上でも $\varphi|_V = 0$ (局所定数性)。

(iv) 任意の $\xi \in \mathcal{V}_x$ に対して $\varphi \in \Gamma(X,\mathcal{V})$ で $\varphi(x)=\xi$ となるものがある。

を満たすもののこととする。$\Gamma(X,\mathcal{V})$ のコンパクト台を持つ元の空間を $\Gamma_c(X,\mathcal{V})$ と書く。これは (i) から $C_c^\infty(X)$ 加群になる。X 上の ℓ ベクトル束の圏 ℓ-$\mathrm{Bdl}(X)$ は、$C_c^\infty(X)M=M$ なる (非退化という) $C_c^\infty(X)$ 加群の圏 $\mathrm{Mod}(C_c^\infty(X))$ に同値である。

$$\ell\text{-}\mathrm{Bdl}(X) \ni \mathcal{V} \longmapsto \Gamma_c(X,\mathcal{V}) \in \mathrm{Mod}(C_c^\infty(X)).$$

なおこれの準逆函手は $M \in \mathrm{Mod}(C_c^\infty(X))$ に

$$\mathcal{V}_x := M/M(x), \quad M(x) := \{v \in M \mid f\cdot v = 0,\, \exists f \in C_c^\infty(X),\, f(x) \neq 0\}$$

と $\Gamma_c(X,\mathcal{V}) = M$ を対応させることで得られる。この圏同値から直ちに次を得る。

補題 3.2.5. (a) $\mathbf{G}$ を ℓ 群、$\mathbf{H}$ をその閉部分群とし、$(\rho,E) \in \mathrm{Alg}(\mathbf{H})$ を取る。このとき $\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}$ 上の ℓ ベクトル束 $\mathcal{E}$ で、$\Gamma_c(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\mathcal{E}) \simeq \mathrm{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(E)$ ($C_c^\infty(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G})$ 加群の同型) なるものがある。
(b) 逆に $\mathbf{H}\backslash\mathbf{G}$ 上の滑らかな $\mathbf{G}$ 作用[2]付き ℓ ベクトル束 $\mathcal{V}$ が与えられ、原点 $\mathbf{H}\cdot 1$ での茎 $\mathcal{V}_{\mathbf{H}\cdot 1}$ 上の $\mathbf{H}$ の滑らかな表現を $\delta_{\mathbf{G}/\mathbf{H}}^{-1/2}\rho$ と書くとき、$C_c^\infty(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G})$ 加群として $\Gamma_c(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\mathcal{V}) \simeq \mathrm{ind}_{\mathbf{H}}^{\mathbf{G}}(\rho)$ である。

次に ℓ 空間の連続写像 $\mu : X \to Y$ および X 上の ℓ ベクトル束 $\mathcal{V}$ を考える。$\Gamma_c(X,\mathcal{V})$ を $\mu^* : C_c^\infty(Y) \ni f \mapsto f\circ\mu \in C_c^\infty(X)$ により $\mathrm{Mod}(C_c^\infty(Y))$ の対象と見て、それに対応する Y 上の ℓ ベクトル束 $\mu_*\mathcal{V}$ を $\mathcal{V}$ の μ による**順像** *(direct image)* という。さらに ℓ 群 $\mathbf{H}$ が $(X,\mathcal{V})$ に滑らかに作用しているとし、μ が

$$\mu(h.x) = \mu(x), \quad \forall h \in \mathbf{H},\, x \in X$$

を満たすとすれば、$\Gamma_c(Y,\mu_*\mathcal{V}) = \Gamma_c(X,\mathcal{V})$ は非退化 $\mathcal{H}(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{C}} C_c^\infty(Y)$ 加群である。特にその $\mathbf{H}$ **不変商** *($\mathbf{H}$-coinvariant)*

$$\Gamma_c(Y,\mu_*\mathcal{V})_{\mathbf{H}} := \Gamma_c(Y,\mu_*\mathcal{V})\big/\Gamma_c(Y,\mu_*\mathcal{V})(\mathbf{H})$$
$$\Gamma_c(Y,\mu_*\mathcal{V})(\mathbf{H}) := \mathrm{span}\{h.\varphi - \varphi \mid h \in \mathbf{H},\, \varphi \in \Gamma_c(Y,\mu_*\mathcal{V})\}$$

は再び非退化 $C_c^\infty(Y)$ 加群で、対応する Y 上の ℓ ベクトル束 $(\mu_*\mathcal{V})_{\mathbf{H}}$ が考えられる。

補題 3.2.6. 上の状況で $y \in Y$ に対して、自然な同型 $(\mu_*\mathcal{V})_{\mathbf{H},y} \cong \Gamma_c(\mu^{-1}(y),\mathcal{V}(\mu^{-1}(y)))_{\mathbf{H}}$ がある。

[2] こう書いた場合には $\mathbf{G}$ の $\Gamma_c(\mathbf{H}\backslash\mathbf{G},\mathcal{V})$ への作用が滑らかであることを指す。

証明. まず $\mu^{-1}(y) \subset X$ は閉部分集合だから、制限射

$$\Gamma_c(Y, \mu_* \mathcal{V}) = \Gamma_c(X, \mathcal{V}) \longrightarrow \Gamma_c(\mu^{-1}(y), \mathcal{V}(\mu^{-1}(y)))$$

は全射である。この核が

$$\left\{ (f \circ \mu)\varphi \;\middle|\; \begin{array}{c} \varphi \in \Gamma_c(X, \mathcal{V}) \\ f \in C_c^\infty(Y),\ f(y) = 0 \end{array} \right\}$$

であることは容易にわかる。よって合成 $\Gamma_c(Y, \mu_*\mathcal{V}) \twoheadrightarrow \Gamma_c(\mu^{-1}(y), \mu_*\mathcal{V}(\mu^{-1}(y)))_{\mathbf{H}}$ の核は

$$\left\{ (f \circ \mu)\varphi \;\middle|\; \begin{array}{c} \varphi \in \Gamma_c(Y, \mu_*\mathcal{V})(\mathbf{H}) \\ f \in C_c^\infty(Y),\ f(y) = 0 \end{array} \right\} = \Gamma_c(Y, \mu_*\mathcal{V})(\mathbf{H})(y)$$

である。これと上述の圏同値の記述から補題を得る。 □

3.2.3　許容表現

$\mathbf{G}$ の滑らかな表現 (π, V) はさらに、任意の開部分群 $K \subset \mathbf{G}$ による不変部分 $V^K := \{v \in V \mid \pi(k)v = v, \forall k \in K\}$ が有限次元のとき**許容表現** *(admissible representation)* と呼ばれる。このとき $(\pi^\vee, V^\vee)$ は (π^*, V^*) に一致し再び許容表現になる。また $(\pi^\vee, V^\vee)$ の反傾表現と (π, V) は標準同型になる。さらに $f \in \mathcal{H}_K(\mathbf{G})$, $k \in K$ ならば

$$\begin{aligned} \pi(k)\pi(f)v =& \pi(k) \int_{\mathbf{G}} f(g)\pi(g)v \, d\mu_{\mathbf{G}}(g) = \int_{\mathbf{G}} f(g)\pi(kg)v \, d\mu_{\mathbf{G}}(g) \\ =& \int_{\mathbf{G}} f(k^{-1}g)\pi(g)v \, d\mu_{\mathbf{G}}(g) = \pi(f)v \end{aligned}$$

ゆえ $\mathrm{im}\pi(f) \subset V^K$ は有限次元である。特にそのトレース $\mathrm{tr}\pi(f)$ が定義できる。線型汎函数

$$\mathrm{tr}\pi : \mathcal{H}(\mathbf{G}) \ni f \longmapsto \mathrm{tr}\pi(f) \in \mathbb{C}$$

を π の**指標分布** *(distribution character)* または単に**指標** *(character)* という。

補題 3.2.7. 既約許容表現の指標分布たちは互いに一次独立である。

証明. 既約許容表現の任意の有限族 $\{(\pi_i, V_i)\}_{i=1}^r$ の指標分布の一次独立性を示せばよい。$V_i^K \neq 0$, $(1 \leq \forall i \leq r)$ となる開コンパクト部分群 $K \subset \mathbf{G}$ を取れば、補題 3.2.1 から V_i^K たちは有限次元単純 $\mathcal{H}_K(\mathbf{G})$ 加群である。$\mathrm{tr}\pi_i$ の $\mathcal{H}_K(\mathbf{G})$ への制限はこの V_i^K の指標に他ならない。これらが一次独立なことはよく知られている [Bou, VIII 章 §13, 命題 2]。 □

3.3　非アルキメデス $GL(2)$ の既約表現

この節を通して F は非アルキメデス局所体とする。ここでは前節の結果を用いて、$G(F)$ の既約で滑らかな表現の構成法を考える。

3.3.1 放物型誘導表現と Jacquet 加群

一般に G の閉部分群 H と $H(F)$ の滑らかな表現 (π, V) に対して、誘導表現 $\mathrm{Ind}_{H(F)}^{G(F)}(\pi, V)$ や有限誘導表現 $\mathrm{ind}_{H(F)}^{G(F)}(\pi, V)$ が考えられるが、特に重要なのは $H = B$ の場合である。$T(F)$ の滑らかな表現 (π, V) は射影

$$B(F) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in T(F)$$

と合成することにより、$B(F)$ の滑らかな表現と見なせる。これを $G(F)$ に誘導して得られる表現

$$(I_B^G(\pi) := \mathrm{Ind}_{B(F)}^{G(F)}(\pi \otimes \mathbf{1}_{U(F)}), I_B^G(V) := \mathrm{Ind}_{B(F)}^{G(F)}(V))$$

を (π, V) の B **に沿っての放物型誘導表現** *(parabolically induced representation)* という。岩澤分解 (補題 3.1.3) から $B(F)\backslash G(F)$ はコンパクトだから誘導表現も有限誘導表現も同じである。特に補題 3.2.3 (とその証明) から、$\phi \in I_B^G(V)$, $\phi^\vee \in I_B^G(V^\vee)$ の間の双対性

$$\langle \phi, \phi^\vee \rangle := \int_{B(F)\backslash G(F)} \langle \phi(g), \phi^\vee(g) \rangle \, d\nu_{B\backslash G}(g) \overset{系\,3.1.5}{=} \int_{\mathbf{K}} \langle \phi(k), \phi^\vee(k) \rangle \, dk, \tag{3.8}$$

は同型 $I_B^G(\pi)^\vee \simeq I_B^G(\pi^\vee)$ を与える。ここで右辺の $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は V と $V^\vee$ の間の $T(F)$ 不変双対性である。また

$$I_B^G : \mathrm{Alg}(T(F)) \longrightarrow \mathrm{Alg}(G(F))$$

は完全函手である。

問 3.7. (π, V) が $T(F)$ の許容表現のとき、$I_B^G(\pi, V)$ は $G(F)$ の許容表現になることを確かめよ (岩澤分解を用いよ)。

$F^\times$ は可算コンパクトな可換 ℓ 群だから、Schur の補題 3.2.2 によってその既約で滑らかな表現は 1 次元表現、すなわち**擬指標** *(quasi-character)* に限られる。$T(F) \simeq F^\times \times F^\times$ だから、その滑らかな既約表現は $F^\times$ の擬指標の対 $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ と対応する。

$$\omega_1 \otimes \omega_2 : T(F) \ni \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \longmapsto \omega_1(t_1)\omega_2(t_2) \in \mathbb{C}^\times.$$

$F^\times$ の擬指標 ω に対して、$F^\times \xrightarrow{\omega} \mathbb{C}^\times \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R}_+^\times$ はコンパクト部分群 $\mathcal{O}^\times \subset F^\times$ 上自明で、

$$|\cdot|_F : F^\times \longrightarrow F^\times/\mathcal{O}^\times \ni \varpi^n \mathcal{O}^\times \overset{\sim}{\longmapsto} q^{-n} \in \mathbb{R}_+^\times$$

であったから、$|\omega| = |\cdot|_F^s$, $(\exists s \in \mathbb{R})$ とただ一通りに書ける。この s を ω の**実部**と呼び $\Re\omega$ と書く。また $|\cdot|_F^{-s}\omega$ を ω の**虚部**といい $\Im\omega$ と書く。$\Re\omega = 0$ となるのは ω が *(***ユニタリ***)* **指標**、すなわち $\mathbb{C}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}$ に値を持つときである。また $s \in \mathbb{C}$ に対して $\omega[s] := \omega|\cdot|_F^s$ と書く。明らかに $\Re\omega[s] = \Re\omega + \Re s$, $\Im\omega[s] = \Im\omega|\cdot|_F^{\Im s}$ である。さて、

$I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)$ の形の $G(F)$ の表現を**一般主系列表現**、特に $\Re\omega_i = 0, (i = 1, 2)$ のときこれを**主系列表現** *(principal series representation)* という。

(τ, E) を $U(F)$ の滑らかな表現とする。E の

$$E(U) := \mathrm{span}\{\tau(u)\xi - \xi \mid u \in U(F), \xi \in E\}$$

による商空間 $E_U := E/E(U)$ を E の $U(F)$ **不変商** *($U(F)$-coinvariant)* という。次の単純な補題は有用である。$U(F)$ は

$$U(\mathfrak{p}^{-n}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \varpi^{-n}\mathcal{O} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

たちの合併であることに注意する。

補題 3.3.1 (Jacquet-Langlands の補題). $\xi \in E$ が $E(U)$ に属するためには、十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{U(\mathfrak{p}^{-n})} \tau(u)\xi \, du = 0 \tag{3.9}$$

となることが必要十分である。

証明. $\xi = \tau(u_1)\xi_1 - \xi_1$ だとし、$u_1 \in U(\mathfrak{p}^{-n})$ となる $n \in \mathbb{N}$ を取る。このとき

$$\begin{aligned}
\int_{U(\mathfrak{p}^{-n})} \tau(u)\xi \, du =& \int_{U(\mathfrak{p}^{-n})} \tau(u)(\tau(u_1)\xi_1 - \xi_1) \, du \\
=& \int_{U(\mathfrak{p}^{-n})} \tau(uu_1)\xi_1 \, du - \int_{U(\mathfrak{p}^{-n})} \tau(u)\xi_1 \, du \\
=& \int_{U(\mathfrak{p}^{-n})} \tau(u)\xi_1 \, du - \int_{U(\mathfrak{p}^{-n})} \tau(u)\xi_1 \, du \\
=& 0
\end{aligned}$$

ゆえ、条件は必要である。

逆に上の積分が消えているとする。ξ の $U(\mathfrak{p}^{-n})$ での固定化群 $U(\mathfrak{p}^{-n})_\xi$ は開部分群で $U(\mathfrak{p}^{-n})$ はコンパクトだから、有限剰余類分解

$$U(\mathfrak{p}^{-n}) = \coprod_{i=1}^{r} u_i U(\mathfrak{p}^{-n})_\xi$$

がある。このとき

$$\begin{aligned}
\xi =& \xi - \frac{1}{\mathrm{meas}(U(\mathfrak{p}^{-n}))} \int_{U(\mathfrak{p}^{-n})} \tau(u)\xi \, du \\
=& \xi - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\mathrm{meas}(U(\mathfrak{p}^{-n})_\xi)} \int_{U(\mathfrak{p}^{-n})_\xi} \tau(u_i u)\xi \, du \\
=& \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} (\xi - \tau(u_i)\xi) \in E(U)
\end{aligned}$$

だから条件は十分でもある。 □

さて $(\pi, V) \in \mathrm{Alg}(G(F))$ に対してもその $U(F)$ への制限の不変商 $V_B := V_U$ と自然な射影 $j_B : V \twoheadrightarrow V_B$ が考えられる。

$$\pi_B(t) : V_B \ni j_B(v) \longmapsto \delta_B(t)^{-1/2} j_B(\pi(t)v) \in V_B, \quad t \in T(F)$$

で定まる $T(F)$ の滑らかな表現 (π_B, V_B) を (π, V) の B **に沿っての** *Jacquet* **加群** *(Jacquet module)* という。

$$\mathrm{Alg}(G(F)) \ni \pi \longmapsto \pi_B \in \mathrm{Alg}(T(F))$$

は完全函手である。

$m \in \mathbb{N}$ に対して $U(\mathfrak{p}^m) := U(F) \cap K(\mathfrak{p}^m)$, $T(\mathfrak{p}^m) := T(F) \cap K(\mathfrak{p}^m)$ などと書けば、分解

$$K(\mathfrak{p}^m) = \bar{U}(\mathfrak{p}^m) T(\mathfrak{p}^m) U(\mathfrak{p}^m) \tag{3.10}$$

がある。ここで $\bar{B} = T\bar{U}$ は G 内の下三角元からなる Borel 部分群である。

補題 3.3.2 (Jacquet の補題). (i) (π, V) を $G(F)$ の許容表現とする。$n \geq 1$ に対して $j_B|_{V^{K(\mathfrak{p}^n)}} : V^{K(\mathfrak{p}^n)} \to V_B^{T(\mathfrak{p}^n)}$ は全射である。
(ii) 特に $G(F)$ の許容表現 (π, V) の Jacquet 加群 (π_B, V_B) は $T(F)$ の許容表現。

証明. (i) 有限次元部分空間 $\bar{E} \subset V_B^{T(\mathfrak{p}^n)}$ とその基底 $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$ を固定する。$j_B(v_i) = \bar{v}_i$ なる $v_i \in V^{T(\mathfrak{p}^n)}$ たちを取って $E := \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_m\} \subset V^{T(\mathfrak{p}^n)}$ とすれば $j_B(E) = \bar{E}$ である。E は滑らかな表現の有限次元部分空間ゆえ、k を十分大きく取れば $E \subset V^{\bar{U}(\mathfrak{p}^k)}$ とできる。$t = \left(\begin{smallmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{smallmatrix}\right) \in T(F)$ を $\mathrm{val}_F(t_1/t_2) \leq n - k$ なるものとすれば

$$\pi\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\Big)\pi(t^{-1})v = \pi(t^{-1})\pi\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ xt_2/t_1 & 1 \end{pmatrix}\Big)v = \pi(t^{-1})v, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \in \bar{U}(\mathfrak{p}^n),\, v \in E,$$

すなわち $\pi(t^{-1})E \subset V^{\bar{B}(\mathfrak{p}^n)}$ である。ところが $v \in V^{\bar{B}(\mathfrak{p}^n)}$ に対しては、(3.10) から

$$\begin{aligned}\pi(1_{K(\mathfrak{p}^n)})v &= \frac{1}{\mathrm{meas}(U(\mathfrak{p}^n))} \int_{U(\mathfrak{p}^n)} \pi(u)\Big(\frac{1}{\mathrm{meas}(\bar{B}(\mathfrak{p}^n))} \int_{\bar{B}(\mathfrak{p}^n)} \pi(\bar{b})v \, d\bar{b}\Big) du \\ &= \frac{1}{\mathrm{meas}(U(\mathfrak{p}^n))} \int_{U(\mathfrak{p}^n)} \pi(u)v \, du\end{aligned}$$

であるので、補題 3.3.1 の証明と同様にして $\pi(1_{K(\mathfrak{p}^n)})v - v \in V(U)$ を得る。すなわち

$$j_B(v) = j_B(\pi(1_{K(\mathfrak{p}^n)})v), \quad \forall v \in V^{\bar{B}(\mathfrak{p}^n)}$$

だが、$\pi(1_{K(\mathfrak{p}^n)})V^{\bar{B}(\mathfrak{p}^n)} = V^{K(\mathfrak{p}^n)}$ であるから結局 $j_B(V^{\bar{B}(\mathfrak{p}^n)}) = j_B(V^{K(\mathfrak{p}^n)})$ がわかる。

以上から

$$\pi_B(t^{-1})\bar{E} = \delta_B(t)^{1/2} j_B(\pi(t^{-1})E) \subset j_B(V^{\bar{B}(\mathfrak{p}^n)}) = j_B(V^{K(\mathfrak{p}^n)})$$

となって $\dim \bar{E} \leq \dim V^{K(\mathfrak{p}^n)}$ がわかる。$\dim V^{K(\mathfrak{p}^n)} < \infty$ は $\bar{E}$ によらないから、これは任意の有限次元部分空間 $\bar{E} \subset V_B^{T(\mathfrak{p}^n)}$ の次元が有界なことを意味し、従って $\dim V_B^{T(\mathfrak{p}^n)} < \infty$ である。特に $\bar{E} = V_B^{T(\mathfrak{p}^n)}$ とすれば、

$$j_B(V^{K(\mathfrak{p}^n)}) \subset V_B^{T(\mathfrak{p}^n)} = \pi_B(t^{-1})V_B^{T(\mathfrak{p}^n)} \subset j_B(V^{K(\mathfrak{p}^n)})$$

となって補題を得る。 □

問 3.8. 岩澤分解を用いて、$(\pi, V) \in \mathrm{Alg}(G(F))$ が有限生成なら、$(\pi_B, V_B) \in \mathrm{Alg}(T(F))$ も有限生成であることを示せ。

Frobenius 相互律 (命題 3.2.4) から $(\pi, V) \in \mathrm{Alg}(G(F))$, $(\rho, E) \in \mathrm{Alg}(T(F))$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\rho)) \simeq \mathrm{Hom}_{B(F)}(\delta_B^{-1/2}\pi|_{B(F)}, \rho \otimes \mathbf{1}_{U(F)}) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \rho) \tag{3.11}$$

が成り立つ。

補題 3.3.3 (Bruhat フィルタ). $(\pi, V) \in \mathrm{Alg}(T(F))$ に対して、$T(F)$ の滑らかな表現の完全系列

$$0 \longrightarrow w(\pi) \longrightarrow I_B^G(\pi)_B \longrightarrow \pi \longrightarrow 0$$

がある。ただし $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ として、$w(\pi) := \pi \circ \mathrm{Ad}(w)$ と書いている。

証明. 補題 3.2.5 (i) から $X := B(F)\backslash G(F)$ 上の ℓ ベクトル束 $\mathcal{F}$ で $\Gamma_c(X, \mathcal{F}) \simeq I_B^G(V)$ となるものがある。我々は $I_B^G(\pi)$ の $B(F)$ への制限のみに関心があるので、X の $B(F)$ 軌道 (右移動作用についての) 分解、すなわち Bruhat 分解

$$X = Y \cup Z, \quad Y := B(F)\backslash B(F)wB(F), \quad Z := B(F)\backslash B(F)$$

を考える。明らかに $Y \subset X$ は開、$Z \subset X$ は閉部分集合ゆえ、完全系列

$$0 \longrightarrow \Gamma_c(Y, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}_Z \longrightarrow 0$$

がある。ここで左の単射は $\varphi \in \Gamma_c(Y, \mathcal{F})$ にそれを Y の外には 0 で延ばしたものを対応させる写像、右の全射は単に Z への制限である (制限するのが 1 点なので茎 $\mathcal{F}_Z$ と同一視している)。補題 3.2.5 (ii) から $\mathcal{F}_Z \simeq (\delta_B^{1/2}(\pi \otimes \mathbf{1}_{U(F)}), V)$ ゆえ $(\mathcal{F}_Z)_B \simeq (\pi, V)$ は直ちにわかる。

一方 $\{b \in B \mid Bwb = Bw\} = B \cap \mathrm{Ad}(w)B = T$ から、

$$T(F)\backslash B(F) \ni T(F)b \overset{\sim}{\longmapsto} B(F)wb \in Y$$

は同相写像であり、$t \in T(F)$ は原点 $B(F)w \in Y$ 上の茎の元 $\varphi(B(F)w) \in \mathcal{F}_{B(F)w}$ に

$$\begin{aligned} t.\varphi(B(F)w) &= \phi(wt) = \phi(\mathrm{Ad}(w)t \cdot w) = \delta_B(\mathrm{Ad}(w)t)^{1/2} w(\pi)(t)\phi(w) \\ &= \delta_B(t)^{-1/2} w(\pi)(t)\varphi(B(F)w) \end{aligned}$$

と作用する。ただし $\varphi \in \Gamma_c(Y, \mathcal{F})$ に対して $\varphi(B(F)w) = \phi(w)$ となる $\phi \in I_B^G(V)$ を取っている。これと補題 3.2.5 (ii) から

$$\Gamma_c(Y, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{ind}_{T(F)}^{B(F)}(w(\pi), w(V))$$

がわかる。ところが Levi 分解 $B(F) = T(F) \ltimes U(F)$ から

$$\mathrm{ind}_{T(F)}^{B(F)}(w(V)) \ni \phi \overset{\sim}{\longmapsto} \phi|_{U(F)} \in C_c^\infty(U(F)) \otimes w(V)$$

は $U(F)$ の滑らかな表現の間の同型である。特に不変測度の一意性から、$U(F)$ 不変線型写像 $\Gamma_c(Y,\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \Gamma_c(Y,\mathcal{F})_B$ は定数倍を除いて

$$\Gamma_c(Y,\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_{T(F)}^{B(F)}(w(V)) \xrightarrow{\sim} C_c^\infty(U(F)) \otimes w(V) \xrightarrow{\int_{U(F)} du} w(V)$$

に一致する。特に $\phi \in \mathrm{ind}_{T(F)}^{B(F)}(w(V))$ の像に $t \in T(F)$ は

$$\begin{aligned} t.\int_{U(F)} \phi(u)\,du = \int_{U(F)} \phi(ut)\,du = \int_{U(F)} \phi(t\cdot \mathrm{Ad}(t^{-1})u)\,du \\ =&\delta_B(t)\int_{U(F)} \phi(tu)\,du = \delta_B(t)\int_{U(F)} \delta_B(t)^{-1/2} w(\pi)(t)\phi(u)\,du \\ =&\delta_B(t)^{1/2} w(\pi)(t)\int_{U(F)} \phi(u)\,du \end{aligned}$$

と作用するから、$\Gamma_c(Y,\mathcal{F})_B \simeq (w(\pi), w(V))$ を得る。 □

3.3.2 超カスプ表現

(π, V) を $G(F)$ の滑らかな表現とする。$G(F)$ の中心

$$Z(F) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle|\, a \in F^\times \right\}$$

の元 z に対して $\pi(z) : V \xrightarrow{\sim} V$ は $\pi(g)$, $(g \in G(F))$ と可換だから、$\pi(z) \in \mathrm{Aut}_{G(F)}(V)$ である。特に (π, V) が既約ならば、Schur の補題により $\pi(z)$ はスカラー倍写像である。言い換えればある $\omega : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ があって

$$\pi\Bigl(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\Bigr) = \omega(a)\mathrm{id}_V, \quad \forall a \in F^\times$$

が成り立つ。この ω を π の**中心指標** *(central character)* と呼び、ω_π と書く。

定理 3.3.4 (Harish-Chandra の定理). $G(F)$ の滑らかな表現 (π, V) についての次の二つの条件は同値である。

(i) $(\pi_B, V_B) = 0$.

(ii) (π, V) の任意の行列成分は $Z(F)$ を法としてコンパクトな台を持つ。

証明. まず次を示す。

主張 3.3.4.1. $v \in V$ について次の二条件は同値。

(a) $v \in V(U)$.

(b) 任意の開コンパクト部分群 $K \subset G(F)$ に対して $N \in \mathbb{N}$ があって、

$$\pi(1_K)\pi(t)v = 0, \quad \forall t = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \in T(F),\ \mathrm{val}_F(t_1/t_2) > N.$$

証明. (a) $\Rightarrow$ (b). 補題 3.3.1 から $n \in \mathbb{N}$ があって (3.9) が成り立つ。開コンパクト部分群 $K \supset K'$ に対して $\pi(1_K)\pi(1_{K'}) = \pi(1_K)$ だから、(b) の K をそれに含まれる主合同部分群 $K(\mathfrak{p}^m)$ $(m \in \mathbb{N})$ で取り替えてよい。$\pi(1_{K(\mathfrak{p}^m)})\pi(t)v$ は

$$\begin{aligned}\pi|_{U(F)}(1_{U(\mathfrak{p}^m)})\pi(t)v =& q^m \int_{\mathfrak{p}^m} \pi\Bigl(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\Bigr) v\, dx \\ =& q^m \int_{\mathfrak{p}^m} \pi\Bigl(\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t_1^{-1}t_2 x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigr) v\, dx\end{aligned}$$

$t_1^{-1}t_2 x$ を x とおきなおして

$$= q^{m-\mathrm{val}_F(t_1/t_2)}\pi(t)\int_{U(\mathfrak{p}^{m-\mathrm{val}_F(t_1/t_2)})} \pi(u)v\, du$$

に $\pi|_{B(F)}(1_{\bar{B}(\mathfrak{p}^m)})$ を施したもの。よって $m - N < -n$ となるよう N を十分大きく取れば、これは (3.9) から 0 である。

(b) $\Rightarrow$ (a). $m \in \mathbb{N}$ を十分大きく取って、$K(\mathfrak{p}^m) \subset \mathrm{Stab}(v, G(F))$ とできる。$\mathrm{val}_F(t_1/t_2) \geq 0$ のとき

$$\mathrm{Ad}\Bigl(\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\Bigr)^{-1}\bar{B}(\mathfrak{p}^m) \subset \bar{B}(\mathfrak{p}^m)$$

だから、$\mathrm{val}_F(t_1/t_2) = n + m > N$ ならば

$$\begin{aligned}0 =& \pi(1_{K(\mathfrak{p}^m)})\pi(t)v = \pi|_{U(F)}(1_{U(\mathfrak{p}^m)})\pi|_{\bar{B}(F)}(1_{\bar{B}(\mathfrak{p}^m)})\pi(t)v \\ =& \pi|_{U(F)}(1_{U(\mathfrak{p}^m)})\pi(t)\pi|_{\bar{B}(F)}(1_{\bar{B}(\mathfrak{p}^m)})v\end{aligned}$$

$K(\mathfrak{p}^m)$ の取り方から

$$= \pi|_{U(F)}(1_{U(\mathfrak{p}^m)})\pi(t)v = \int_{U(\mathfrak{p}^m)} \pi(u)\pi(t)v\, du$$

上と同様の計算により

$$= \pi(t)\int_{U(\mathfrak{p}^{-n})} \pi(u)v\, du$$

である。よって補題 3.3.1 から $v \in V(U)$ を得る。 $\square$

(i) ⇒ (ii). $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ として $\bar{B} = \mathrm{Ad}(w)B$ だから、$V_B = 0$ すなわち $V = V(U)$ は

$$\begin{aligned} V = \pi(w)V = \pi(w)V(U) &= \mathrm{span}\{\pi(w)\pi(u)v - \pi(w)v \mid u \in U(F),\, v \in V\} \\ &= \mathrm{span}\{\pi(wuw^{-1})v - v \mid u \in U(F),\, v \in V\} = V(\bar{U}) \end{aligned}$$

すなわち $V_{\bar{B}} = 0$ に同値である。さて、$v \in V$, $v^\vee \in V^\vee$ とし v, $v^\vee$ を固定する $G(F)$ の主合同部分群 $K = K(\mathfrak{p}^n)$ を取る。$\mathbf{K}/K \simeq G(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n)$ の完全代表系 $\{k_i\}_{1\leq i\leq r}$ を取って $v_i := \pi(k_i)v$ とおく。上と仮定から $V = V(U)$ かつ $V = V(\bar{U})$ ゆえ、主張 3.3.4.1 を v_i に適用すれば $N \in \mathbb{N}$ があって

$$\pi(1_K)\pi(t)v_i = 0, \quad 1 \leq \forall i \leq r,\, \forall t = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \in T(F),\, |\mathrm{val}_F(t_1/t_2)| > N$$

が成り立つ。Cartan 分解 (補題 3.1.3) を使って $g \in G(F)$ を $g = ktk_ik'$, ($k \in \mathbf{K}$, $t \in T(F)$, $k' \in K$) と書けば、$K \subset \mathbf{K}$ は正規部分群であることに注意して

$$\begin{aligned} f_{v,v^\vee}(g) = \langle \pi(g)v, \pi^\vee(1_K)v^\vee\rangle = \langle \pi(1_K)\pi(ktk_i)v, v^\vee\rangle &= \langle \pi(k)\pi(1_K)\pi(t)v_i, v^\vee\rangle \\ &= \langle \pi(1_K)\pi(t)v_i, \pi^\vee(k^{-1})v^\vee\rangle \end{aligned}$$

が消えないのは $|\mathrm{val}_F(t_1/t_2)| \leq N$、すなわち g が

$$\mathbf{K}\left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \in T(F) \,\middle|\, -N \leq \mathrm{val}_F(t_1/t_2) \leq N \right\}\mathbf{K}$$

に属するときに限られる。この集合は明らかに $Z(F)$ を法としてコンパクトである。

(ii) ⇒ (i). $G(F)^1 = \{g \in G(F) \mid |\det g|_F = 1\}$ とおけば $Z(F) \cap G(F)^1 = Z(\mathcal{O})$ はコンパクトだから、(π, V) の行列成分 $f_{v,v^\vee}$ の $G(F)^1$ への制限はコンパクト台を持つ。このとき開コンパクト部分群 $K \subset G(F)^1$ に対して

$$\dim(\mathrm{span}\{\pi(1_K)\pi(g)v \mid g \in G(F)^1\}) < \infty \tag{3.12}$$

である。実際、そうでなければ $G(F)^1$ 内の点列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ で $\{\pi(1_K)\pi(g_n)v_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一次独立であるものが取れる。特に $v^\vee \in V^\vee$ で

$$f_{v,\pi(1_K)v^\vee}(g_n) = \langle \pi^\vee(1_K)v^\vee, \pi(g_n)v\rangle = \langle v^\vee, \pi(1_K)\pi(g_n)v\rangle = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

となるものがあるはずだが、これは $f_{v,\pi(1_K)v^\vee}|_{G(F)^1} \in C_c(K\backslash G(F)^1)$ が有限個の値しか取れないことに矛盾する。(3.12) から有限族 $v_1^\vee, \ldots, v_n^\vee \in V^\vee$ で $\langle \pi(1_K)\pi(g)v, v_i^\vee\rangle = 0$, ($1 \leq \forall i \leq n$) ならば $\pi(1_K)\pi(g)v = 0$ であるようなものがある。よって $T(F)^1 := G(F)^1 \cap T(F)$ として

$$\{t \in T(F)^1 \mid \pi(1_K)\pi(t)v \neq 0\} \subset \bigcup_{i=1}^n \mathrm{supp} f_{v,\pi^\vee(1_K)v_i^\vee} \cap T(F)^1$$

はコンパクトである。$T(F)^1Z(F) \subset T(F)$ は指数 2 の部分群であるから、これは $\{t \in T(F) \mid \pi(1_K)\pi(t)v \neq 0\}$ が $Z(F)$ を法としてコンパクトなことに他ならない。よって主張 3.3.4.1 から $v \in V(U)$ がわかり、$v \in V$ は任意だったから $V_B = \{0\}$ を得る。　□

この定理の条件を満たす (π, V) を**準カスプ表現** *(quasi-cuspidal representation)*、さらに (π, V) が許容的なときそれを**超カスプ表現** *(supercuspidal representation)* と呼ぶ。既約超カスプ表現の同型類の集合を $\Pi_0(G(F))$ と書く。Harish-Chandra の定理の帰結として次が得られる。

系 3.3.5. Zorn の補題を認めることにする。
(i) 任意の $\pi \in \Pi(G(F))$ は超カスプ表現か、ある一般主系列表現 $I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)$ の部分表現に同型かのいずれかである。
(ii) $G(F)$ の既約表現は許容表現である。

証明. (i) まず既約な準カスプ表現が許容的なこと、すなわち超カスプ表現になることを確かめよう。同型

$$G(F)/G(F)^1 Z(F) \xrightarrow[\sim]{|\det|_F} q^{\mathbb{Z}}/q^{2\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

から、$(\pi|_{G(F)^1 Z(F)}, V)$ は長さ高々2 である。$Z(F)$ は V に中心指標 ω_π で作用するから $(\pi|_{G(F)^1}, V)$ も同様であり、従ってその有限生成系 $\{v_1, \dots, v_r\}$ がある。各 v_i と開コンパクト部分群 $K \subset G(F)$ に対して $\mathrm{span}\{\pi(g)v_i \,|\, g \in G(F)^1\})^K$ が有限次元なことを見ればよいが、これは (3.12) と全く同様に示せる。

次に $\pi \in \Pi(G(F))$ が超カスプ表現でなければ定理 3.3.4 から $\pi_B \neq \{0\}$ である。π_B は有限生成 (問 3.8) だから、Zorn の補題によりその極大部分 $T(F)$ 加群が存在する (例えば [松阪 68, 3 章 §5 定理 13] を参照)。従って π_B の既約な商表現 $\omega_1 \otimes \omega_2$ が存在する。このとき Frobenius 相互律 (3.11) から

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \omega_1 \otimes \omega_2) \neq \{0\}$$

ゆえ、0 でない $G(F)$ 準同型 $\varphi : \pi \to I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)$ がある。π の既約性から真部分表現 $\ker\varphi \subset \pi$ は 0 でなくてはならないから、これは π が $I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)$ の部分表現に同型なことを意味する。

(ii) (i) から $\pi \in \Pi(G(F))$ は超カスプ表現か許容表現 $I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)$ の部分表現だから許容的である。 □

注意 3.3.6. 上で Zorn の補題、従って選択公理を仮定した。この仮定のもとで実は「有限生成な許容表現は長さ有限である」ことが示せる (Howe の定理 [How], [BZ76, 4.1])。

中心指標 ω を持つ $G(F)$ の滑らかな表現の圏を $\mathrm{Alg}(G(F))_\omega$ と書こう。ρ の行列成分たちの空間 $\mathcal{A}(\rho^\vee)$ は

$$\mathcal{H}(G(F))_\omega := \left\{ \begin{array}{c} f : G(F) \to \mathbb{C} \\ \text{局所定数} \end{array} \middle| \begin{array}{ll} \text{(i)} & f(zg) = \omega(z)^{-1} f(g),\ \forall z \in Z(F),\ g \in G(F) \\ \text{(ii)} & \mathrm{supp} f \text{ は } Z(F) \text{ を法としてコンパクト} \end{array} \right\}$$

に含まれる。特にコンパクト位相群に対する Schur の直交関係を次のように拡張できる。

補題 3.3.7 (Schur の直交関係). $G(F)$ の既約超カスプ表現 (ρ, E) に対して、その形式次数と呼ばれる正実数 $d(\rho)$ があって次が成り立つ。ρ の中心指標を ω とすれば、$(\pi, V) \in \mathrm{Alg}(G(F))_\omega$ と $v \in V, v^\vee \in V^\vee$, $\xi \in E, \xi^\vee \in E^\vee$ に対して

$$\int_{G(F)/Z(F)} f_{v,v^\vee}(g) f_{\xi,\xi^\vee}(g^{-1}) \frac{dg}{dz} = \begin{cases} 0 & \pi \not\simeq \rho \text{ のとき} \\ \dfrac{\langle v, \xi^\vee \rangle \langle \xi, v^\vee \rangle}{d(\rho)} & (\pi, V) = (\rho, E) \text{ のとき}. \end{cases}$$

証明. $v^\vee \in V^\vee$ と $\xi \in E$ に対して双線型形式

$$B_{\xi,v^\vee}(\cdot,\cdot) : V \otimes E^\vee \ni v \otimes \xi^\vee \longmapsto \int_{G(F)/Z(F)} f_{v,v^\vee}(x) f_{\xi,\xi^\vee}(x^{-1}) \frac{dx}{dz} \in \mathbb{C} \tag{3.13}$$

を考える。$g \in G(F)$ に対して

$$\begin{aligned} B_{\xi,v^\vee}(\pi(g)v, \rho^\vee(g)\xi^\vee) &= \int_{G(F)/Z(F)} \langle \pi(x)\pi(g)v, v^\vee \rangle \langle \rho(x^{-1})\xi, \rho^\vee(g)\xi^\vee \rangle \frac{dx}{dz} \\ &= \int_{G(F)/Z(F)} \langle \pi(xg)v, v^\vee \rangle \langle \rho((xg)^{-1})\xi, \xi^\vee \rangle \frac{dx}{dz} \\ &= B_{\xi,v^\vee}(v, \xi^\vee) \end{aligned}$$

なのでこれは $G(F)$ 不変である。もしある $(v^\vee, \xi)$ に対して $B_{\xi,v^\vee}$ が恒等的に消えていなければ、それは非自明な $G(F)$ 準同型

$$\phi_{v^\vee,\xi} : V \ni v \longmapsto [\xi^\vee \mapsto B_{\xi,v^\vee}(v, \xi^\vee)] \in (E^\vee)^\vee = E \tag{3.14}$$

を与える。ところが π, ρ は共に既約だからこのような $\phi_{v^\vee,\xi}$ は同型にならねばならない。特に主張の第一の場合が示された。

$\pi \simeq \rho$ の場合にはそのあいだの $G(F)$ 同型を固定して (π, V) と (ρ, E) を同一視してよい。このとき Schur の補題 3.2.2 から (3.14) の $\phi_{v^\vee,\xi}$ はある定数 $c_{v^\vee,\xi} \in \mathbb{C}^\times$ 倍である。言い換えれば

$$B_{v^\vee,\xi}(v, \xi^\vee) = \langle \phi_{v^\vee,\xi}(v), \xi^\vee \rangle = c_{v^\vee,\xi} \langle v, \xi^\vee \rangle$$

である。一方 (3.13) で g を g^{-1} で置き換えれば、これは

$$B_{\xi^\vee,v}(\xi, v^\vee) = \langle \phi_{\xi^\vee,v}(\xi), v^\vee \rangle = c_{\xi^\vee,v} \langle \xi, v^\vee \rangle$$

にも等しい。結局ある $c \in \mathbb{C}^\times$ があって、任意の $v, \xi \in E$, $v^\vee, \xi^\vee \in E^\vee$ に対して

$$\int_{G(F)/Z(F)} f_{v,v^\vee}(x) f_{\xi,\xi^\vee}(x^{-1}) \frac{dx}{dz} = c \langle v, \xi^\vee \rangle \langle \xi, v^\vee \rangle \tag{3.15}$$

が成り立つ。c の逆数を $d(\rho)$ とおけば主張の第二の式を得る。

最後に $\xi^\vee \in E^\vee \setminus \{0\}$ を固定すれば $|\omega(z)|^2 = |z|_F^{2\Re\omega} = |\det(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix})|_F^{\Re\omega}$ なので、$\xi, \xi' \in E$ に対して

$$(\xi', \xi) := \int_{G(F)/Z(F)} f_{\xi',\xi^\vee}(x) \overline{f_{\xi,\xi^\vee}(x)} |\det x|_F^{-\Re\omega} \frac{dx}{dz}$$

は定義可能である。そこで $\xi \neq 0, \in E$ に対して $\xi^* : E \ni \xi' \mapsto (\xi', \xi) \in \mathbb{C}, \in E^\vee$ とおけば

$$\begin{aligned}
f_{\xi,\xi^*}(g^{-1}) =&(\rho(g^{-1})\xi, \xi) = \int_{G(F)/Z(F)} f_{\xi,\xi^\vee}(xg^{-1})\overline{f_{\xi,\xi^\vee}(x)}|\det x|_F^{-\Re\omega} \frac{dx}{dz} \\
=&\int_{G(F)/Z(F)} f_{\xi,\xi^\vee}(x)\overline{f_{\xi,\xi^\vee}(xg)}|\det(xg)|_F^{-\Re\omega} \frac{dx}{dz} \\
=&|\det g|_F^{-\Re\omega}(\xi, \rho(g)\xi) = |\det g|_F^{-\Re\omega}\overline{(\rho(g)\xi, \xi)} \\
=&|\det g|_F^{-\Re\omega}\overline{f_{\xi,\xi^*}(g)}
\end{aligned}$$

が成り立つ。特に (3.15) で $v = \xi$, $v^\vee = \xi^\vee = \xi^*$ とすれば

$$d(\rho)|\det g|_F^{-\Re\omega} \int_{G(F)/Z(F)} |f_{\xi,\xi^*}(g)|^2 \frac{dg}{dz} = \|\xi\|^4$$

がわかるから、$d(\rho)$ は正実数である。 □

注意 3.3.8. 上の証明の最後の議論から特に、既約超カスプ表現 (ρ, E) の中心指標 ω_ρ がユニタリならば (ρ, E) はユニタリ化可能 (3.3.4 節参照) であることがわかる。

これを用いて中心指標 ω を持つ超カスプ表現の等型成分を $\mathrm{Alg}(G(F))_\omega$ から切り出すことができる。

命題 3.3.9. $\rho \in \Pi_0(G(F))$ としてその中心指標を ω と書く。$(\pi, V) \in \mathrm{Alg}(G(F))_\omega$ は次を満たす直和分解 $(\pi, V) = (\pi_\rho, V_\rho) \oplus (\pi^\rho, V^\rho)$ を持つ。

(i) π_ρ は ρ の直和に同型。

(ii) π^ρ は ρ に同型な部分商を持たない。

証明. $\mathcal{H}(G(F))_\omega$ には $G(F)$ が右および左移動

$$[R(g)f](x) = f(xg), \quad [L(g)f](x) = f(g^{-1}x), \qquad g \in G(F),\ f \in \mathcal{H}(G(F))_\omega$$

で作用しているが、$\mathcal{A}(\rho^\vee)$ がこれらの $G(F)$ 作用で不変で

$$(\rho^\vee \otimes \rho, E^\vee \otimes E) \ni \xi^\vee \otimes \xi \longmapsto f_{\xi^\vee,\xi} \in (R \times L, \mathcal{A}(\rho^\vee)) \tag{3.16}$$

が $G(F) \times G(F)$ の既約で滑らかな表現の同型であることは容易に確かめられる。畳み込み代数 $\mathcal{H}(G(F))_\omega$ の単位元は

$$1_{K,\omega}(g) := \int_{Z(F)} 1_K(zg)\omega(z)\,dz$$

で与えられ、ρ は許容的だから $\rho(1_K) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E) \simeq E^\vee \otimes E$ である。一方で $\mathcal{H}(G(F))_\omega$ は $(\pi, V) \in \mathrm{Alg}(G(F))_\omega$ に

$$\pi(f)v := \int_{G(F)/Z(F)} f(g)\pi(g)v \frac{dg}{dz}, \quad f \in \mathcal{H}(G(F))_\omega,\ v \in V$$

と作用する。

主張 3.3.9.1. 開コンパクト部分群 $K\subset G(F)$ に対して $d(\rho)\cdot\rho(1_{K,\omega})\in E^\vee\otimes E$ の (3.16) による像を $\varepsilon_\rho^K\in\mathcal{H}(G(F))_\omega$ と書けば次が成り立つ。
(i) 中心指標 ω を持つ $\pi\in\Pi(G(F))$ に対して

$$\pi(\varepsilon_\rho^K)=\begin{cases}\rho(1_{K,\omega}) & \pi=\rho\text{ のとき}\\ 0 & \pi\not\simeq\rho\text{ のとき.}\end{cases}$$

(ii) $K\subset K'\subset G(F)$ が開コンパクト部分群のとき、$\varepsilon_\rho^K*\varepsilon_\rho^{K'}=\varepsilon_\rho^{K'}*\varepsilon_\rho^K=\varepsilon_\rho^{K'}$.

証明. (i) $f_{\xi^\vee,\xi}\in\mathcal{A}(\rho^\vee)$ および $v\in V$, $v^\vee\in V^\vee$ に対して

$$\begin{aligned}\langle\pi(f_{\xi^\vee,\xi})v,v^\vee\rangle=&\Big\langle\int_{G(F)/Z(F)}f_{\xi^\vee,\xi}(g)\pi(g)v\,\frac{dg}{dz}v^\vee\Big\rangle\\ =&\int_{G(F)/Z(F)}\langle\pi(g)v,v^\vee\rangle\langle\xi,\rho^\vee(g)\xi^\vee\rangle\,\frac{dg}{dz}\\ =&\int_{G(F)/Z(F)}f_{v,v^\vee}(g)f_{\xi,\xi^\vee}(g^{-1})\,\frac{dg}{dz}\end{aligned}\tag{3.17}$$

だから $\pi\not\simeq\rho$ の場合は補題 3.3.7 から明らか。$\pi=\rho$ の場合を計算するために、ρ は許容的だから E^K は有限次元で $(E^\vee)^K=(E^K)^*$ であることを思い出そう。E^K と $(E^\vee)^K$ の互いに双対な基底 $\{e_1,\dots,e_r\}$, $\{e_1^\vee,\dots,e_r^\vee\}$ を固定すれば、明らかに

$$\rho(1_{K,\omega})=\sum_{i=1}^r e_i^\vee\otimes e_i$$

である。特に (3.17) と併せて、任意の $\xi\in E$, $\xi^\vee\in E^\vee$ に対して

$$\begin{aligned}\langle\rho(\varepsilon_\rho^K)\xi,\xi^\vee\rangle=&d(\rho)\sum_{i=1}^r\langle\rho(f_{e_i^\vee,e_i})\xi,\xi^\vee\rangle\\ =&d(\rho)\sum_{i=1}^r\int_{G(F)/Z(F)}f_{\xi,\xi^\vee}(g)f_{e_i,e_i^\vee}(g^{-1})\,\frac{dg}{dz}\\ =&\Big\langle\sum_{i=1}^r\langle\xi,e_i^\vee\rangle e_i,\xi^\vee\Big\rangle\\ =&\langle\rho(1_K)\xi,\xi^\vee\rangle\end{aligned}$$

となって $\pi=\rho$ の場合が従う。

(ii) は ε_ρ^K が一意であることから直ちに従う。ε_ρ^K が一意なことは $f\in\mathcal{H}(G(F))_\omega$ が $\pi(f)$, (π は中心指標 ω を持つ既約表現) たちで一意に決まること[3]から明らかであろう。 □

$(\pi,V)\in\mathrm{Alg}(G(F))_\omega$ とすれば $V=\bigcup_{K\subset G(F)}V^K$ であり、$\pi(\varepsilon_\rho^K)v$ は主張 3.3.9.1 (ii) から $v\in V^K$ なる開コンパクト部分群 K の取り方によらないから、$\pi(\varepsilon_\rho^K)$ たちの合併 $\pi(\varepsilon_\rho):V\to V$ が考えられる。

[3]対偶を考えれば容易に示せる。

主張 3.3.9.2. (1) ε_ρ は $\mathrm{Alg}(G(F))_\omega$ の中心 $\mathfrak{Z}(G(F))_\omega = \mathrm{End}(\mathrm{id}_{\mathrm{Alg}(G(F))_\omega})$ に属する。すなわち

(i) $(\pi, V) \in \mathrm{Alg}(G(F))_\omega$ に対して $\pi(\varepsilon_\rho) \in \mathrm{End}_{G(F)}(\pi)$ である。

(ii) $(\pi_i, V_i) \in \mathrm{Alg}(G(F))_\omega$, $(i = 1, 2)$ かつ $\phi \in \mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi_1, \pi_2)$ のとき、

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\phi} & V_2 \\ {\scriptstyle \pi_1(\varepsilon_\rho)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2(\varepsilon_\rho)} \\ V_1 & \xrightarrow{\phi} & V_2 \end{array}$$

は可換。

が成り立つ。
(2) $\varepsilon_\rho \in \mathfrak{Z}(G(F))_\omega$ は射影子。すなわち $(\pi, V) \in \mathrm{Alg}(G(F))_\omega$ に対して $\pi(\varepsilon_\rho)\pi(\varepsilon_\rho) = \pi(\varepsilon_\rho)$ である。

証明. $g \in G(F)$ と開コンパクト部分群 $K \subset G(F)$ に対して、$\mathrm{Ad}(g)\mathcal{H}_K(G(F))_\omega = \mathcal{H}_{\mathrm{Ad}(g)K}(G(F))_\omega$ だから、それらの単位元に関しても $\mathrm{Ad}(g)1_{K,\omega} = 1_{\mathrm{Ad}(g)K,\omega}$ が成り立つ。これと主張3.3.9.1 の ε_ρ^K の特徴付けから、$\mathrm{Ad}(g)\varepsilon_\rho^K = \varepsilon_\rho^{\mathrm{Ad}(g)K}$ を得る。$(\pi, V) \in \mathrm{Alg}(G(F))_\omega$ の元 v が K 不変なら $\pi(g)v$ は $\mathrm{Ad}(g)K$ 不変なことに注意して、

$$\begin{aligned} \pi(\varepsilon_\rho)\pi(g)v =& \int_{G(F)/Z(F)} \varepsilon_\rho^{\mathrm{Ad}(g)K}(x)\pi(xg)v \, \frac{dx}{dz} \\ =& \pi(g) \int_{G(F)/Z(F)} \varepsilon_\rho^{\mathrm{Ad}(g)K}(x)\pi(g^{-1}xg)v \, \frac{dx}{dz} \end{aligned}$$

$g^{-1}xg$ を x とおきなおして

$$\begin{aligned} =& \pi(g) \int_{G(F)/Z(F)} \varepsilon_\rho^{\mathrm{Ad}(g)K}(\mathrm{Ad}(g)x)\pi(x)v \, \frac{dx}{dz} \\ =& \pi(g) \int_{G(F)/Z(F)} \mathrm{Ad}(g^{-1})\varepsilon_\rho^{\mathrm{Ad}(g)K}(x)\pi(x)v \, \frac{dx}{dz} \\ =& \pi(g) \int_{G(F)/Z(F)} \varepsilon_\rho^{K}(x)\pi(x)v \, \frac{dx}{dz} \\ =& \pi(g)\pi(\varepsilon_\rho)v \end{aligned}$$

となって (1) (i) が従う。(ii) は明らか。(2) は $1_{K,\omega} * 1_{K,\omega} = 1_{K,\omega}$ ($\mathcal{H}_K(G(F))_\omega$ の単位元だから) から直ちに従う。 □

さて、$(\pi, V) \in \mathrm{Alg}(G(F))_\omega$ に対して $V_\rho := \mathrm{im}\pi(\varepsilon_\rho)$, $V^\rho := \ker\pi(\varepsilon_\rho)$ とおく。主張3.3.9.2 (2) から明らかに $V = V_\rho \oplus V^\rho$ である。次に任意の $v \in V$ に対して

$$\phi_{\rho,v} : (L, \mathcal{A}(\rho^\vee)) \ni f \longmapsto \pi(f)v \in (\pi, V)$$

は $G(F)$ 準同型であることに注意する。左辺は $\rho^{\otimes E^\vee}$ に同型だから、$\bigcup_{v\in V}\mathrm{im}\phi_{\rho,v}$ も ρ のある直和に同型である。一方、$\varepsilon_\rho^K\in\mathcal{A}(\rho^\vee)$ ゆえ

$$V_\rho=\bigcup_{K\subset G(F)}\pi(\varepsilon_\rho^K)V$$

はこの部分空間に含まれるから、やはり ρ の直和に同型である。最後に V^ρ が ρ に同型な部分商を含めば、補題 3.3.7 から $\pi(\varepsilon_\rho)|_{V^\rho}\neq 0$ が従い矛盾である。 □

系 3.3.5 から、$G(F)$ の滑らかな表現 π が長さ有限ならばそれは許容表現である。そのような π の既約部分商として現れる $\Pi(G(F))$ の元の集合 $\mathrm{JH}(\pi)$ は π から一意に定まり、その元を π の**組成因子** *(composition factor)* というのだった。

系 3.3.10. (i) $F^\times$ の擬指標の対 (ω_1,ω_2) に対して、$I_B^G(\omega_1\otimes\omega_2)$ の長さは高々2 である。
(ii) $F^\times$ の擬指標の二つの対 (ω_1,ω_2), (ω_1',ω_2') が $\mathrm{JH}(I_B^G(\omega_1\otimes\omega_2))\cap\mathrm{JH}(I_B^G(\omega_1'\otimes\omega_2'))\neq\emptyset$ となるためには、$(\omega_1,\omega_2)=(\omega_1',\omega_2')$ または (ω_2',ω_1') となることが必要十分。そのとき両者の組成因子は一致する。
(iii) $\Pi_0(G(F))$ の元は一般主系列表現の組成因子に現れない。

証明. (iii) 既約超カスプ表現 ρ が $I_B^G(\omega_1\otimes\omega_2)$ の部分商だとすれば、両者の中心指標は一致する $\omega=\omega_1\omega_2$. よって命題 3.3.9 から $I_B^G(\omega_1\otimes\omega_2)$ は ρ を部分表現に持つ。特に

$$\{0\}\neq\mathrm{Hom}_{G(F)}(\rho,I_B^G(\omega_1\otimes\omega_2))\overset{(3.11)}{\simeq}\mathrm{Hom}_{T(F)}(\rho_B,\omega_1\otimes\omega_2)$$

だが、これは $\rho_B=0$ に矛盾である。

(i) (iii) から $I_B^G(\omega_1\otimes\omega_2)$ の任意の既約部分商 π は $\pi_B\neq 0$ を満たす。特に Jacquet 函手の完全性から $I_B^G(\omega_1\otimes\omega_2)$ の長さは $\dim I_B^G(\omega_1\otimes\omega_2)_B$ で抑えられる。ところが補題 3.3.3 から

$$\dim I_B^G(\omega_1\otimes\omega_2)_B=\dim(\omega_1\otimes\omega_2)+\dim w(\omega_1\otimes\omega_2)=2$$

である。

(ii) 必要性。π が $I_B^G(\omega_1\otimes\omega_2)$, $I_B^G(\omega_1'\otimes\omega_2')$ の共通の組成因子だとする。π_B の長さは $I_B^G(\omega_1\otimes\omega_2)_B$ の長さ 2 で抑えられるから有限で、従ってその既約商 $\mu\twoheadleftarrow\pi_B$ がある。μ は補題 3.3.3 から、$\omega_1\otimes\omega_2$ か $\omega_2\otimes\omega_1$ のいずれかだが、同時に $\omega_1'\otimes\omega_2'$ か $\omega_2'\otimes\omega_1'$ のいずれかでもあるから条件は必要である。

十分性。$\omega_1\neq\omega_2$ のときに $\mathrm{JH}(I_B^G(\omega_1\otimes\omega_2))=\mathrm{JH}(I_B^G(\omega_2\otimes\omega_1))$ を示せばよい。

主張 3.3.10.1. $T(F)$ の滑らかな有限次元表現 (τ,E) が $\chi\in\Pi(T(F))$ を組成因子に持てば、τ は χ を部分表現に持つ。

証明. $T(F)\simeq(F^\times)^2$ は極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}^T\simeq(\mathcal{O}^\times)^2$ と

$$\Lambda_T:=\left\{\begin{pmatrix}\varpi^n&0\\0&\varpi^m\end{pmatrix}\,\middle|\,n,\,m\in\mathbb{Z}\right\}\simeq\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

の直積であることに注意する。$\mathbf{K}^T$ の有限次元表現は完全可約だから既約分解

$$(\tau|_{\mathbf{K}^T}, E) = \bigoplus_{\kappa\in\Pi(\mathbf{K}^T)} (\tau[\kappa], E[\kappa])$$

がある。ここで $(\tau[\kappa], E[\kappa])$ は κ の有限直積に同型である。Λ_T と $\mathbf{K}^T$ は可換だからこの分解は $T(F)$ 加群としての直和分解でもある。特に仮定は $E[\chi|_{\mathbf{K}^T}]$ が χ に同型な部分商を持つことに同値である。さて、Λ_T は

$$s_1 := \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}$$

で生成される。仮定から $E_1 := \ker(\tau(s_1) - \chi(s_1)|E[\chi|_{\mathbf{K}^T}])$、さらに $E[\chi] := \ker(\tau(s_2) - \chi(s_2)|E_1)$ は自明でない (階数を考えてみよ)。このとき $\xi \in E[\chi]$ に $t \in T(F)$ は $\chi(t)$ 倍で作用する。 $\square$

主張と (3.11), 補題 3.3.3 から

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2), I_B^G(\omega_2 \otimes \omega_1)) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)_B, \omega_2 \otimes \omega_1) \neq \{0\}$$

ゆえ、非自明な $G(F)$ 準同型 $\varphi : I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2) \to I_B^G(\omega_2 \otimes \omega_1)$ がある。

(a) φ が単射なとき、補題 3.3.3 から $(I_B^G(\omega_2 \otimes \omega_1)/\mathrm{im}\varphi)_B = 0$ であることに注意する。(iii) と併せて φ は全射だから同型である。

(b) そうでないとき、

$$0 \longrightarrow (\pi := \ker\varphi) \longrightarrow I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2) \longrightarrow (\pi' := \mathrm{im}\varphi) \longrightarrow 0$$

である。π_B, π'_B とも非自明で補題 3.3.3 から $I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)_B$ は長さ 2 だから、π_B は既約である。よって

$$\{0\} \neq \mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \omega_1 \otimes \omega_2)$$

から $\pi_B \simeq \omega_1 \otimes \omega_2$ である。補題 3.3.3 と併せて $\pi'_B \simeq \omega_2 \otimes \omega_1$ もわかる。特に

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(I_B^G(\omega_2 \otimes \omega_1)/\pi', I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)) \simeq \mathrm{End}_{T(F)}(\omega_1 \otimes \omega_2) \simeq \mathbb{C}$$

の非自明な元 ψ が取れる。ところが

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi', I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\omega_2 \otimes \omega_1, \omega_1 \otimes \omega_2) = \{0\}$$

ゆえ $\mathrm{im}\psi = \pi$ でなくてはならない。すなわち

$$0 \longrightarrow \pi' \longrightarrow I_B^G(\omega_2 \otimes \omega_1) \longrightarrow \pi \longrightarrow 0$$

となって証明終わり。 $\square$

例 3.3.11 (Steinberg 表現). $I_B^G(\omega[1/2]\otimes\omega[-1/2])$, $(\omega\in\Pi(F^\times))$ を考える。反傾表現 $I_B^G(\omega^{-1}[-1/2]\otimes\omega^{-1}[1/2])$ は

$$\left\{\phi : G(F)\to\mathbb{C}\;\middle|\;\begin{array}{ll}\text{(i)} & \phi\text{ はある開コンパクト部分群で右不変}\\ \text{(ii)} & \phi(utg)=\omega(\det t)^{-1}\phi(g),\ u\in U(F),\ t\in T(F)\end{array}\right\}$$

上の右移動表現である。特に $\mathbb{C}\cdot(\omega^{-1}\circ\det)$ を $G(F)$ 不変部分空間に持つから、$I_B^G(\omega[1/2]\otimes\omega[-1/2])$ はその反傾表現 $\omega\circ\det$ を既約商に持つ。よって系 3.3.10 から

$$0\longrightarrow\delta(\omega)\longrightarrow I_B^G(\omega[1/2]\otimes\omega[-1/2])\longrightarrow\omega\circ\det\longrightarrow 0$$

となる $\delta(\omega)\in\Pi(G(F))$ があることがわかる。この $\delta(\omega)$ を ω でひねった *Steinberg* **表現**、あるいは Galois 表現的な理由から**スペシャル表現**と呼ぶ。

3.3.3 既約表現の分類

ミラボリック部分群の表現 加法群 F の非自明な指標 $\psi : F\to\mathbb{C}^\times$ を固定する。例えば $F=\mathbb{Q}_p$ のときには

$$\psi_{\mathbb{Q}_p} : \mathbb{Q}_p\ni\frac{a}{p^n}+r\longmapsto\exp\left(\frac{2\pi ia}{p^n}\right)\in\mathbb{C}^\times,\qquad \begin{array}{c}r\in\mathbb{Z}_p,\ 0<a<p^n,\\ n\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\end{array}$$

$[F:\mathbb{Q}_p]<\infty$ のときには $\psi_F:=\psi_{\mathbb{Q}_p}\circ\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}_p}$ などとすればよい。F の Pontrjagin 双対 (F から $\mathbb{C}^1$ への連続な準同型全体の群) F^D は

$$F\ni a\overset{\sim}{\longmapsto}\psi^a\in F^D$$

によって加法群 F と同一視される (位相群としての同型であることに注意せよ) [Wei95, II.5 定理 3]。しかもアルキメデス的な場合と異なり、Fourier 変換

$$\mathcal{F}_\psi f(a)=\widehat{f}(\psi^a):=\int_F f(x)\psi^a(x)\,dx$$

は同型 $\mathcal{H}(F)\xrightarrow{\sim}C_c^\infty(F^D)$ を与える [Wei95, VII.2 命題 2]。これが左辺を畳み込み代数、右辺を値の乗法によって環と見ての環同型であることに注意する。

さて、同型 $U(F)\ni\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)\overset{\sim}{\mapsto}x\in F$ から ψ^a には

$$\psi_U^a : U(F)\ni\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\longmapsto\psi^a(x)\in\mathbb{C}^\times$$

が対応する。$(\tau,E)\in\mathrm{Alg}(U(F))$ への $\widehat{f}\in C_c^\infty(U(F)^D)$, $(f\in\mathcal{H}(U(F)))$ の作用を $\tau(\widehat{f})\xi:=\tau(f)\xi$ と定めれば、圏同値

$$\mathrm{Alg}(U(F))\overset{\sim}{\longrightarrow}\mathrm{Mod}(\mathcal{H}(U(F)))\overset{\sim}{\longrightarrow}\mathrm{Mod}(C_c^\infty(U(F)^D))\overset{\sim}{\longrightarrow}\ell\text{-}\mathrm{Bdl}(U(F)^D)\tag{3.18}$$

が得られる。$(\tau, E) \in \mathrm{Alg}(U(F))$ と $\psi^a \in U(F)^D$ に対して、$U(F)$ 不変商の定義を ψ^a でひねって

$$E_{U,\psi^a} := E/E(U,\psi^a), \quad E(U,\psi^a) := \mathrm{span}\{\pi(u)v - \psi^a(u)v \mid u \in U(F),\, v \in E\}$$

とおく。

補題 3.3.12. $(\tau, E) \in \mathrm{Alg}(U(F))$ と $\mathcal{E} \in \ell\text{-}\mathrm{Bdl}(U(F)^D)$ が上の圏同値で対応しているとき、$\psi_U^a \in U(F)^D$ に対して $E_{U,\psi^a} \simeq \mathcal{E}_{\psi_U^a}$ (ψ_U^a での茎) である。

証明. 簡単のために ψ が位数 0, すなわち $\psi|_{\mathcal{O}} = \mathbf{1}$ だが $\psi|_{\varpi^{-1}\mathcal{O}}$ は非自明であるとしよう。補題 3.3.1 の証明を少し変形すれば、$\xi \in E$ が E_{U,ψ^a} に属するためには十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\tau(\overline{\psi}_U^a \cdot \mathrm{Ch}_{U(\mathfrak{p}^{-n})})\xi = \int_{U(\mathfrak{p}^{-n})} \pi(u)\overline{\psi_U^a(u)}\xi\, du = 0$$

となることが必要十分であることが示せる。ξ に対応する $\Gamma_c(U(F)^D, \mathcal{E})$ の元をやはり ξ と書こう。ここで

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\psi(\overline{\psi}_U^a \cdot \mathrm{Ch}_{U(\mathfrak{p}^{-n})})(x) = &\int_{\mathfrak{p}^{-n}} \overline{\psi_U^a(y)}\psi(xy)\, dy = \int_{\mathfrak{p}^{-n}} \psi((x-a)y)\, dy \\ = &q^n \cdot \mathrm{Ch}_{a+\mathfrak{p}^n}(x)\end{aligned}$$

に注意すれば、上の条件が ψ^a の近傍で消えていないある $f \in C_c^\infty(U(F)^D)$ に対して $f \cdot \xi(\psi^a) = 0$ となること、すなわち $\xi(\psi^a) = 0$ であることに同値なことがわかる。 □

G の部分群

$$P := G_1 \rtimes U = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{G}_m \right\}$$

を**ミラボリック** *(mirabolic)* **部分群**[4]と呼ぶ。$P(F)$ のモヂュラス指標を $\delta_P((\begin{smallmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})) = |a|_F$ と書く。

系 3.3.13. $(\tau, E) \in \mathrm{Alg}(P(F))$ と F の非自明な指標 ψ に対して、$\mathrm{Alg}(P(F))$ の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{ind}_{U(F)}^{P(F)}(E_{U,\psi} \otimes \psi_U) \longrightarrow \tau \longrightarrow \tau_U \otimes \delta_P^{1/2} \otimes \mathbf{1}_{U(F)} \longrightarrow 0$$

が成り立つ。ただし $E_{U,\psi} \in \mathrm{Alg}(\{1\})$, $\tau_U \in \mathrm{Alg}(G_1(F))$ と見ている。

証明. (τ, E) に付随する $U(F)^D$ 上の ℓ ベクトル束を $\mathcal{E}$ と書く。$P(F)$ は $U(F)^D$ に共役で作用し、$Y := U(F)^D \setminus \{\mathbf{1}_{U(F)}\}$, $Z = \{\mathbf{1}_{U(F)}\}$ の二つの軌道を持つ。対応して完全系列

$$0 \longrightarrow \Gamma_c(Y, \mathcal{E}(Y)) \longrightarrow \Gamma_c(U(F)^D, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}_Z \longrightarrow 0$$

がある。$\psi_U \in Y$ での茎 $\mathcal{E}_{\psi_U}$ は補題 3.3.12 から $E_{U,\psi}$ で、そこに ψ_U の固定化群 $U(F)$ は ψ_U で作用するから $\Gamma_c(Y, \mathcal{E}(Y)) \simeq \mathrm{ind}_{U(F)}^{P(F)}(E_{U,\psi} \otimes \psi_U)$ である。同様に補題 3.3.12 から $\mathcal{E}_Z \simeq E_U \simeq \tau_U \otimes \delta_P^{1/2} \otimes \mathbf{1}_{U(F)}$ である。 □

[4] miracle parabolic から。

例 3.3.14. $\tau := I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)|_{P(F)}$ の場合を考えてみよう。$I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)$ に付随する $X := B(F)\backslash G(F)$ 上の ℓ ベクトル束 $\mathcal{F}$ を取る。X 内の $U(F)$ 軌道を $Y := B(F)\backslash B(F)wU(F)$, $Z := B(F)\backslash B(F)$ と書けば、補題 3.3.3 の証明と同様に

$$0 \longrightarrow \Gamma_c(Y, \mathcal{F}(Y)) \longrightarrow \Gamma_c(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}_Z \longrightarrow 0$$

であり、

(i) $\mathrm{Hom}_{U(F)}(\mathcal{F}_Z, \psi_U) = \mathrm{Hom}_{U(F)}(\tau_U, \psi_U) = \{0\}$.

(ii) $B(F)w \in Y$ の $U(F)$ での固定化群は自明ゆえ、$\Gamma_c(Y, \mathcal{F}(Y)) \simeq \mathrm{ind}_{\{1\}}^{U(F)}(\mathbb{C}) = C_c^\infty(U(F))$ である。よって不変測度の一意性から

$$\mathrm{Hom}_{U(F)}(\Gamma_c(Y, \mathcal{F}(Y)), \psi_U) \simeq (\Gamma_c(Y, \mathcal{F}(Y)) \otimes \mathbb{C}_{\overline{\psi}_U})_U^*$$

は $\int_{U(F)} \overline{\psi_U(u)}\, du$ で張られる一次元空間である。

これから

$$\dim \mathrm{Hom}_{U(F)}(I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2), \psi_U) \le \dim \mathrm{Hom}_{U(F)}(\Gamma_c(Y, \mathcal{F}(Y)) \oplus \mathcal{F}_Z, \psi_U) = 1$$

がわかる。実は (ii) の線型形式は $I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)$ 上へ

$$\Lambda_{\psi,\omega_1,\omega_2} : I_B^G(\mathbb{C}_{\omega_1\otimes\omega_2}) \ni \phi \longmapsto \int_{U(F)} \phi(wu)\overline{\psi_U(u)}\, du \in \mathbb{C}$$

と拡張され、実際に左辺の非自明な元 (Whittaker 汎函数) を与えるから (補題 3.4.8 を参照) $\dim I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)_{U,\psi} = 1$ がわかる。これらと補題 3.3.3 より系 3.3.13 の完全系列は、フィルタ $\{0\} \subset F_{w,\psi} \subset F_w = \Gamma_c(Y, \mathcal{F}(Y)) \subset I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)$ で

$$F_{w,\psi} \simeq \mathrm{ind}_{U(F)}^{P(F)}(\psi_U), \quad F_w/F_{w,\psi} \simeq \omega_2[1/2] \otimes \mathbf{1}_{U(F)},$$
$$I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)/F_w \simeq \omega_1[1/2] \otimes \mathbf{1}_{U(F)}$$

なるものを与えている。

命題 3.3.15 (一般主系列表現の可約点). $I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)$ が可約であるためには $\omega_1\omega_2^{-1} = |\cdot|_F^{\pm 1}$ が必要十分。

証明. 十分性は例 3.3.11 で見た通りである。逆に $I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)$ が可約だとする。

$$0 \longrightarrow \pi \longrightarrow I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2) \longrightarrow \pi' \longrightarrow 0.$$

不変商を取る函手は完全だから

$$0 \longrightarrow \pi_{U,\psi} \longrightarrow I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)_{U,\psi} \longrightarrow \pi'_{U,\psi} \longrightarrow 0$$

で、例 3.3.14 から $\dim I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)_{U,\psi} \leq 1$ ゆえ、π, π' のいずれか一方のみが非退化である。必要なら ω_1, ω_2 を入れ替えて $\pi_{U,\psi} = \{0\}$ としてよい。($\pi_{U,\psi} = \{0\}$ となる組成因子 π を取り、π_B の既約商を $\omega_1 \otimes \omega_2$ とすればよい。系 3.3.5 の証明参照。)

$G(F)$ 不変双対性

$$I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2) \otimes_{\mathbb{C}} I_B^G(\omega_1^{-1} \otimes \omega_2^{-1}) \ni \phi \otimes \phi^\vee \longmapsto \int_{\mathbf{K}} \phi(k)\phi^\vee(k)\, dk \in \mathbb{C}$$

は制限により非自明な $P(F)$ 不変双線型形式

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \pi|_{P(F)} \otimes_{\mathbb{C}} I_B^G(\omega_1^{-1} \otimes \omega_2^{-1})|_{P(F)} \longrightarrow \mathbb{C}$$

を与える。ここで $\pi_{U,\psi} = \{0\}$ と系 3.3.13 から $\pi|_{P(F)} = (\pi|_{P(F)})_U[1/2] \otimes \mathbf{1}_{U(F)}$ ゆえ、この双線型形式は非自明な $G_1(F)$ 不変双線型形式

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (\pi|_{P(F)})_U[1/2] \otimes_{\mathbb{C}} (I_B^G(\omega_1^{-1} \otimes \omega_2^{-1})|_{P(F)})_U[1/2] \longrightarrow \mathbb{C}$$

から引き起こされている。これと例 3.3.14 から $(\pi|_{P(F)})_U$ は $\omega_i[1]$, $(i = 1, 2)$ のいずれかを既約組成因子に持つ。ところが $(\pi|_{P(F)})_U$ は Jacquet 加群 π_B の $G_1(F) \subset T(F)$ への制限だから Bruhat フィルタにより、その組成因子は ω_j, $(j = 1, 2)$ のいずれかである。よって $\omega_1\omega_2^{-1} = |\cdot|_F^{\pm 1}$ でなくてはならない。 □

以上で $\Pi(G(F))$ の記述が完成したことになる。その結果をまとめておこう。

系 3.3.16 ($G(F)$ の既約許容表現). $G(F)$ の既約許容表現の同型類は次の通り。
(i) 既約超カスプ表現。
(ii) $\omega \in \Pi(F^\times)$ でひねった Steinberg 表現 $\delta(\omega) = \omega(\det) \otimes \delta(1)$.
(iii) 既約な一般主系列表現 $I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2) \simeq I_B^G(\omega_2 \otimes \omega_1)$, $\omega_1 \neq \omega_2[\pm 1] \in \Pi(F^\times)$.
(iv) 一次元表現 $\omega(\det)$, $\omega \in \Pi(F^\times)$.

3.3.4 補足 — 既約ユニタリ表現の分類

以下で扱う $GL(2)$ 上の保型形式、特にその標準 L 函数についての Hecke 理論においては既約ユニタリ表現の記述が必要になることはない。しかし一般の簡約群上の場合には 2.4 節で定義された保型形式の空間を記述することは難しく、その整数論的な意味も明らかではない。むしろより解析的に見える $L^2(G(\mathbb{Q})\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}))$ の方が Langlands による Eisenstein 級数のスペクトル理論などによる記述を持ち、しかも $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/\mathbf{K}_\infty$ 上の保型ベクトル束の切断として定義される数論幾何的保型形式とも対応する。ここで $\mathfrak{A}_G$ は $G(\mathbb{R})$ の中心 $Z(\mathbb{R})$ 内の極大 $\mathbb{R}$ ベクトル部分群である。そこで $L^2(G(\mathbb{Q})\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}))$ 上の $G(\mathbb{A})$ の右正則表現

$$[R(g)\phi](x) = \phi(xg), \quad \phi \in L^2(G(\mathbb{Q})\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}))$$

の既約部分商を考えることになるが、それらは不変測度に関する L^2-(Petersson) 内積に関して常にユニタリ表現になる。この理由からここでは $\Pi(G(F))$ の元でユニタリなものを決定することについて略説しておく。

ℓ 群 $\mathbf{G}$ の滑らかな表現 (π, V) が**ユニタリ化可能** *(unitarizable)* とは、写像

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

であって

(i) 第一変数に関して線型で $(v, w) = \overline{(w, v)}$, $\forall v,\, w \in V$ (**エルミート形式**である)。

(ii) 特に (v, v), $v \in V$ は実数になるが、さらに $(v, v) > 0$, $\forall v \in V$ (正定値)。

(iii) $(\pi(g)v, \pi(g)w) = (v, w)$, $\forall g \in \mathbf{G}$, $v, w \in V$ ($\mathbf{G}$ 不変性)。

なるもの (**$\mathbf{G}$ 不変ユニタリ内積**) が存在することとする。$\mathbf{G}$ の既約ユニタリ化可能許容表現の同型類の集合を $\Pi_{\mathrm{unit}}(\mathbf{G})$ と書く。

命題 3.3.17 ($G(F)$ の既約ユニタリ表現). $\Pi_{\mathrm{unit}}(G(F))$ は次の通り。
(i) $\Pi_0(G(F))$ の元でユニタリな中心指標を持つもの。
(ii) $\delta(\omega)$, $\omega \in \Pi_{\mathrm{unit}}(F^\times)$.
(iii) 主系列表現 $I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)$, ω_1, $\omega_2 \in \Pi_{\mathrm{unit}}(F^\times)$.
(iv) $\omega \circ \det$, $\omega \in \Pi_{\mathrm{unit}}(F^\times)$.
(v) **補系列表現** *(complementary series representation)* $I_B^G(\omega[s] \otimes \omega[-s])$, $\omega \in \Pi_{\mathrm{unit}}(F^\times)$, $0 < s < 1/2$.

証明. (スケッチ) $\pi \in \Pi(G(F))$ がユニタリ化可能なら ω_π もユニタリであることを注意しておく。

(i) のユニタリ中心指標を持つ既約超カスプ表現がユニタリ化可能なことは注意 3.3.8 で指摘したとおり。(iv) の表現がユニタリ化可能なことも明らか。

(ii) $\delta(\omega)$ の実現 V を取る。$\delta(\omega)_B \simeq \omega[1/2] \otimes \omega[-1/2]$ であった。$v \in V$, $v^\vee \in V^\vee$ に対して $v^\vee$ を固定する開コンパクト部分群 $K \subset G(F)$ を取る。主張 3.3.4.1 から

$$f_{v,v^\vee}(t) = \langle \delta(\omega)(t)v, v^\vee \rangle = \langle \delta(\omega)(t)v, \delta(\omega^{-1})(1_K)v^\vee \rangle = \langle \delta(\omega)(1_K)\delta(\omega)(t)v, v^\vee \rangle$$

は $t = \left(\begin{smallmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{smallmatrix}\right)$ の $|t_1/t_2|_F$ が十分小さいときには $\delta_B^{1/2} \otimes \delta(\omega)_B \simeq \omega[1] \otimes \omega[-1]$ の定数倍である。$|\omega[1] \otimes \omega[-1](t)| = |t_1/t_2|_F$ なので、これは $\delta(\omega)$ の行列成分が $|t_1/t_2|_F \to 0$ のときに急減少であることを意味する。同様に $\delta(\omega)_{\bar{B}} = \omega[-1/2] \otimes \omega[1/2]$ を考えて $|t_1/t_2|_F \to \infty$ のときも急減少であることが示せる。特に $\delta(\omega)$ の行列成分は中心を法として二乗可積分である。

$$\int_{G(F)/Z(F)} |f_{v,v^\vee}(g)|^2 \frac{dg}{dz} < \infty, \quad \forall v \in V,\, v^\vee \in V^\vee.$$

よって超カスプ表現の場合と同様に $v^\vee \neq 0, \in V^\vee$ に対して

$$(v, v') := \int_{G(F)/Z(F)} f_{v,v^\vee}(g)\overline{f_{v',v^\vee}(g)} \frac{dg}{dz}, \quad v,\, v' \in V$$

は定義可能な $G(F)$ 不変ユニタリ内積である。

(iii), (v) ユニタリ化可能性の判定に便利なように一般主系列表現を $I_B^G(\omega_1[\lambda_1]\otimes\omega_2[\lambda_2])$, ($\omega_i\in\Pi_{\mathrm{unit}}(F^\times)$, $\lambda_i\in\mathbb{R}$) と書いておく。滑らかな表現 (π,V) のユニタリ化可能性の定義のうち正値性 (ii) を除く二条件を満たすものを**エルミート表現** *(hermitian representation)* という。これは半線型[5]同型

$$(\pi,V)\ni v\longmapsto[v'\mapsto(v',v)]\in(\pi^\vee,V^\vee)$$

の存在に同値である。(π,V) が既約ならば Schur の補題からこのような半線型同型は定数倍を除いて一意だから、$G(F)$ 不変エルミート内積も定数倍を除いて一意である。さて、$I_B^G(\omega_1[\lambda_1]\otimes\omega_2[\lambda_2])$ は「複素共役」$I_B^G(\omega_1^{-1}[\lambda_1]\otimes\omega_2^{-1}[\lambda_2])$ に半線型同型であり、$I_B^G(\omega_1[\lambda_1]\otimes\omega_2[\lambda_2])^\vee\simeq I_B^G(\omega_1^{-1}[-\lambda_1]\otimes\omega_2^{-1}[-\lambda_2])$ であった。系 3.3.16 (iii) と併せて $I_B^G(\omega_1[\lambda_1]\otimes\omega_2[\lambda_2])$ がエルミートになるのは

- $\lambda_1=\lambda_2=0$ であるか、
- $\omega_1=\omega_2$ かつ $\lambda_1=-\lambda_2\neq0$

の場合である。前者の場合には

$$(\phi,\phi'):=\int_{\mathbf{K}}\phi(k)\overline{\phi'(k)}\,dk,\quad \phi,\ \phi'\in I_B^G(\mathbb{C}_{\omega_1\otimes\omega_2})$$

が定義可能な $G(F)$ 不変ユニタリ内積を与えることはすぐにわかる ((3.5) を使う)。

後者の場合には $\omega_1=\omega_2$ を ω と書き、$s:=\lambda_1=-\lambda_2>0$ としてよい。ここで Harish-Chandra の**絡作用素** *(intertwining operator)* $M(w,s):I_B^G(\omega[s]\otimes\omega[-s])\to I_B^G(\omega[-s]\otimes\omega[s])$ を導入する。これは $\Re s>0$ では絶対収束積分

$$\big(M(w,s)\phi\big)(g):=\int_F\phi\Big(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}g\Big)\,dx$$

で与えられ、$M(w,s)\phi$ は q^s の有理函数になる。特に $s=0$ で一意の極を持つことが知られており、

$$N(w,s):=\frac{\zeta_F(2s+1)}{\zeta_F(2s)}M(w,s)$$

としてその極を除いたものを**正規化した** *(normalized)* 絡作用素という[6]。分子 $\zeta_F(s+1)$ は $\Re s\geq0$ で零点も極も持たないから、$s>0$ での $M(w,s)$ と $N(w,s)$ の挙動は一致している。このとき

$$(\phi,\phi'):=\int_{\mathbf{K}}\big(N(w,s)\phi\big)(k)\overline{\phi'(k)}\,dk,\quad \phi,\ \phi'\in I_B^G(\mathbb{C}_{\omega[s]\otimes\omega[-s]})$$

は定義可能で、問題のエルミート内積を与えている。$I_B^G(\omega[s]\otimes\omega[-s])$ がユニタリ化可能であることはこれが正定値または負定値であることに同値である。ところがこのエルミー

[5] $\mathbb{C}$ ベクトル空間の間の写像 $f:V\to W$ が**半線型** *(sesquilinear)* とは、加法群の準同型であって $f(\lambda v)=\bar\lambda f(v)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $v\in V$ を満たすもののことであった。

[6] Gindikin-Karepelevich の方法による証明を加えるか？

ト形式の符号は s の連続函数なので、上が $s=0$ で正定値なことから $0<s<1/2$ でも正定値にならねばならない。こうして補系列のユニタリ化可能性も示される。なお $s=1/2$ では $N(w,s)$ が非自明な核 $\delta(\omega)$ を持つので、これは $\omega\circ\det \twoheadleftarrow I_B^G(\omega[1/2]\otimes\omega[-1/2])$ 上のユニタリ内積を与えている。

最後に命題のリストが既約ユニタリ化可能表現を全て尽くしていることを示そう。次を見れば十分である。

主張 3.3.17.1. $I_B^G(\omega[s]\otimes\omega[-s])$ は $s>1/2$ でユニタリ化可能でない。

証明. 簡単のために $(\pi,V):=(I_B^G(\omega[s]\otimes\omega[-s]),I_B^G(\mathbb{C}_{\omega[s]\otimes\omega[-s]}))$ と書く。仮に (π,V) 上の $G(F)$ 不変ユニタリ内積 $(\cdot,\cdot)$ があったとしよう。補題 3.3.3 から $v\in V$ で

$$j_B\Big(\pi\Big(\begin{pmatrix}t_1&0\\0&t_2\end{pmatrix}\Big)v\Big)=\omega(t_1t_2)\left|\frac{t_1}{t_2}\right|^{1/2-s}j_B(v)\neq 0,\quad \begin{pmatrix}t_1&0\\0&t_2\end{pmatrix}\in T(F)$$

となるものが取れる。さらに主張 3.3.4.1 から、v を固定する開コンパクト部分群 $K\subset G(F)$ と $v^\vee\in(V^\vee)^K$ および $c\neq 0$ で、$|t_1/t_2|_F$ が十分小さい $t=\left(\begin{smallmatrix}t_1&0\\0&t_2\end{smallmatrix}\right)\in T(F)$ に対して

$$\langle\pi(t)v,v^\vee\rangle=\langle\pi(1_K)\pi(t)v,v^\vee\rangle=c\cdot\omega(t_1t_2)\left|\frac{t_1}{t_2}\right|^{1/2-s}\tag{3.19}$$

であるものがある。$(\cdot,\cdot)$ は V^K 上のユニタリ内積に制限されるので V^K のそれに関する正規直交基底 $\{v_1,\dots,v_n\}$ を取り、$(v',v^*):=\langle v',v^\vee\rangle$ により $v'\in V^K$ を定める。このとき、

$$(\pi(1_K)\pi(g)v,\pi(1_K)\pi(g)v)\le(\pi(g)v,\pi(g)v)=(v,v),\quad \forall g\in G(F),\,v\in V^K$$

だから、$\pi(1_K)\pi(g)\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^K)$ の $\{v_1,\dots,v_n\}$ についての行列表示 $A_K(g)$ はコンパクト集合

$$\Omega:=\left\{\begin{pmatrix}x_{1,1}&x_{1,2}&\dots&x_{1,n}\\x_{2,1}&x_{2,2}&\dots&x_{2,n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_{n,1}&x_{n,2}&\dots&x_{n,n}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})\;\middle|\;\begin{matrix}\sum_{i=1}^n|x_{i,j}|^2=1\\1\le j\le n\end{matrix}\right\}$$

に属する。ところが $t\in T(F)$ に対して $A_k(t)=(x_{i,j}(t))_{i,j}$ と書けば、(3.19) から

$$\begin{aligned}c\cdot\omega(t_1t_2)\left|\frac{t_1}{t_2}\right|^{1/2-s}&=(A_k(t)v,v^*)=\Big(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_{i,j}(t)(v,v_j)v_i,\sum_{i=1}^n(v^*,v_i)v_i\Big)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_{i,j}(t)(v,v_j)(v^*,v_i)\end{aligned}$$

が十分小さい $|t_1/t_2|_F$ に対して常に成立するはずである。$s>1/2$ ならば $|t_1/t_2|_F\to 0$ のとき左辺の値は有界でないから、これは矛盾である。□

以上で命題 3.3.17 が証明された。なおこの証明の議論で p 進群の既約ユニタリ化可能表現の分類の論点はほとんどカバーされている。□

3.4　標準 L および ε 因子

3.4.1　Whittaker 模型

ψ を F の非自明な指標とし する。対応する $U(F)$ の指標 ψ_U (3.3.3 節参照) からの誘導表現の空間 $\mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)}(\mathbb{C}_{\psi_U})$ を $\mathcal{W}_\psi(G(F))$ と書き、$G(F)$ 上の *Whittaker* **函数**の空間と呼ぶ。

$$\mathcal{W}_\psi(G(F)) \\ := \left\{ W : G(F) \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & W \text{ はある開コンパクト部分群で右不変} \\ \text{(ii)} & W(ug) = \psi_U(u)W(g), \forall u \in U(F), g \in G(F) \end{array} \right\}.$$

$(\pi, V) \in \Pi(G(F))$ 上の ψ-*Whittker* **汎函数** *(ψ-Whittaker functional)* とは、線型形式 $\Lambda_\psi : V \to \mathbb{C}$ であって

$$\Lambda_\psi(\pi(u)v) = \psi_U(u)\Lambda_\psi(v), \quad u \in U(F), v \in V$$

を満たすもの、つまり $\Lambda_\psi \in \mathrm{Hom}_{U(F)}(\pi|_{U(F)}, \psi_U) \simeq V_{U,\psi}^*$ のこととする。(π, V) は非自明な Whittaker 汎函数を持つとき ψ **非退化** *(ψ-generic)* であると言われる。このとき

$$\{0\} \neq \mathrm{Hom}_{U(F)}(\pi|_{U(F)}, \psi_U) \simeq \mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, \mathcal{W}_\psi(G(F)))$$

より π は $\mathcal{W}_\psi(G(F))$ の部分表現としての実現される。この実現を π の ψ-*Whittaker* **模型** *(ψ-Whittaker model)* という。我々の最初の目標は次の定理である。

定理 3.4.1 (Jacquet-Langlands). 任意の ψ 非退化な $(\pi, V) \in \Pi(G(F))$ に対してその ψ-Whittaker 模型は一意である: $\dim V_{U,\psi} = 1$.

注意 3.4.2 (加法指標への依存度). $(\pi, V) \in \Pi(G(F))$ が ψ 非退化だとし、その上の ψ-Whittaker 汎函数 Λ_ψ を取る。$a \in F^\times$ に対して $\psi^a(x) := \psi(ax)$ とおけば、

$$\begin{aligned} \Lambda_\psi \circ \pi\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)\Big(\pi\Big(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)v\Big) &= \Lambda_\psi\Big(\pi\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)v\Big) \\ &= \Lambda_\psi\Big(\pi\Big(\begin{pmatrix} 1 & ax \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)v\Big) \\ &= \psi^a(x)\Lambda_\psi \circ \pi\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)(v) \end{aligned}$$

だから、$\Lambda_\psi \circ \pi((\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}))$ は非自明な ψ^a-Whittaker 汎函数であり、(π, V) は ψ^a 非退化である。F の任意の非自明指標はある $a \in F^\times$ を使って ψ^a と書ける [Wei95, II.5 定理 3 の系] から、これは π の ψ 非退化性が実は ψ によらないことを示している。よって以下では ψ 非退化性を単に**非退化** *(generic)* と呼ぶことにする。

$GL(2)$ の場合にはこれは [JL70, 補題 2.13.2] に他ならないが、ここでは $GL(n)$ の場合にも適用できる Gelfand-Kazhdan の証明を紹介しよう [GK75]。まず ℓ 等質空間上の分布の ℓ 群不変性の延長についての Gelfand-Kazhdan の定理をさっと復習しよう。証明など詳細に関しては [BZ76, §6] を参照されたい。

Gelfand-Kazhdan の結果 ℓ 群 $\mathbf{G}$ が ℓ 空間 X に連続に作用しているとする。X 内の $\mathbf{G}$ 軌道の集合を $\mathbf{G}\backslash X$ と書き、$p : X \twoheadrightarrow \mathbf{G}\backslash X$ を自然な射影とする。$\mathbf{G}\backslash X$ には商位相を入れるが、これは必ずしも Hausdorff にならない。しかし $\mathbf{G}$ の X への作用が**正則** *(regular)*、すなわちその作用のグラフ

$$\{(x, g.x) \,|\, x \in X,\, g \in \mathbf{G}\}$$

が閉集合ならば、$\mathbf{G}\backslash X$ は再び ℓ 空間である。これにより、特に $\mathbf{G}$ をその閉部分群 $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ で割った空間 $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ は ℓ 空間になる。

ところが作用の正則性はこれ以外の我々が扱う対象にとっては強すぎるのである。そこで閉集合の代わりに可設部分集合を考える必要がある。位相空間 X の部分集合 Y が局所閉集合とは、各点 $y \in Y$ の近傍 U で $Y \cap U$ が U の中で閉なものが取れることだった。$Y \subset X$ が**可設的** *(constructible)* とは、それが有限個の局所閉集合の合併であることとする。可設的な Y に対しては直和分解

$$Y = Y^0 \sqcup Y^1 \sqcup \cdots \sqcup Y^r$$

で各 Y^i は局所閉、$(Y^{i+1} \sqcup \cdots \sqcup Y^r) \subset (Y^i \sqcup \cdots \sqcup Y^r)$ は閉部分集合かつ、$Y^0 \subset Y$ は稠密であるようなものが取れる。さて ℓ 群 $\mathbf{G}$ の ℓ 空間 X への作用が**可設的**とは、その作用のグラフが可設的なこととする。このとき、X の空でない $\mathbf{G}$ 不変な開部分集合 U でそこへの $\mathbf{G}$ 作用が正則であるものが存在する。実際、作用の可設性の定義は $(\mathbf{G}\backslash X)^2$ 内の対角部分集合 $\Delta(\mathbf{G}\backslash X)$ の可設性に同値だから、ある $(\bar{x}, \bar{x}) \in \Delta(\mathbf{G}\backslash X)$ の近傍 $\bar{U} \times \bar{U}$ でその中で $\Delta(\mathbf{G}\backslash X)$ が閉であるものが取れる。この $\bar{U}$ の逆像を U とすればよい。また各 $\mathbf{G}$ 軌道 S は再び可設的なので、S^0 の $\mathbf{G}$ 軌道 S 自身も局所閉集合である。

補題 3.4.3. ℓ 群 $\mathbf{G}$ が ℓ 空間 X に可設的に、その上の ℓ ベクトル束 $\mathcal{V}$ に滑らかに作用しているとする。X 内の各 $\mathbf{G}$ 軌道 O への制限 $\Gamma_c(O, \mathcal{V}(O))$ 上の非自明な $\mathbf{G}$ 不変線型形式がなければ、$\Gamma_c(X, \mathcal{V})$ 上の $\mathbf{G}$ 不変線型形式も 0 のみである。

証明. $\mathbf{G}$ の X への作用が正則ならば、$p : X \twoheadrightarrow \mathbf{G}\backslash X$ に補題 3.2.6 が使えて、各 $O \in \mathbf{G}\backslash X$ で $(p_*\mathcal{V})_{\mathbf{G},O} = \Gamma_c(O, \mathcal{V}(O))_{\mathbf{G}} = \{0\}$ である。よって $\Gamma_c(\mathbf{G}\backslash X, p_*\mathcal{V})_{\mathbf{G}} = \{0\}$ だから主張が従う。

一般の場合の証明は背理法による。$\Gamma_c(X, \mathcal{V})$ 上の非自明な $\mathbf{G}$ 不変線型形式 T があったとする。$\mathrm{supp}T$ は $\mathbf{G}$ 不変だから、X を $\mathrm{supp}T$ で置き換えてよい。先述したように空でない $\mathbf{G}$ 不変開部分集合 $U \subset X$ で、その上の $\mathbf{G}$ 作用が正則なものがあるから、上の議論により $T|_{\Gamma_c(U, \mathcal{V}(U))} = 0$ なはずだが、これは $\mathrm{supp}T = X$ に矛盾する。 □

この補題から Gelfand-Kazhdan の定理が得られる。

定理 3.4.4 (Gelfand-Kazhdan). ℓ 群 $\mathbf{G}$ が ℓ 空間 X に可設的に、その上の ℓ ベクトル束 $\mathcal{V}$ に滑らかに作用しているとする。ℓ ベクトル束の自己同型 $\sigma : (X, \mathcal{V}) \xrightarrow{\sim} (X, \mathcal{V})$ が条件

(i) 任意の $g \in \mathbf{G}$ に対して $g.(\sigma.\varphi) = \sigma(g^\sigma.\varphi),\ \forall\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{V})$ となる $g^\sigma \in \mathbf{G}$ がある。

(ii) σ のある有限巾は $\mathbf{G}$ 作用に含まれる。

(iii) $O \in \mathbf{G}\backslash X$ が $\Gamma_c(O, \mathcal{V}(O))_{\mathbf{G}} \neq \{0\}$ を満たせば、$\sigma(O) = O$ かつ σ は $\Gamma_c(O, \mathcal{V}(O))_{\mathbf{G}}$ に自明に作用する。

を満たせば、$\Gamma_c(X, \mathcal{V})$ 上の $\mathbf{G}$ 不変線型形式は σ 不変でもある。

証明. $\Gamma_c(X, \mathcal{V})$ 上の非自明な $\mathbf{G}$ 不変線型形式 T で $\sigma(T) \neq T$ なるものがあったとして矛盾を導こう。

まず T を σ の固有線型形式で置き換えられる。σ^n が $\mathbf{G}$ 作用に含まれる最小の正整数 n を取り、指標 $\chi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$ たちのなす群を $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\wedge$ と書く。函数 $f_T : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ni k \mapsto \sigma^k(T) \in \Gamma_c(X, \mathcal{V})^*$ の Fourier 変換

$$\widehat{f}_T(\chi) := \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \chi(k)\sigma^k(T)$$

を考える。Fourier 逆公式

$$\sigma^k(T) = \sum_{\chi \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\wedge} \overline{\chi(k)}\widehat{f}_T(\chi)$$

から

$$0 \neq \sigma(T) - T = \sum_{\chi \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\wedge} (\overline{\chi(1)} - 1)\widehat{f}_T(\chi)$$

だから、少なくとも一つの $\chi \neq \mathbf{1}, \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\wedge$ について $\widehat{f}_T(\chi) \neq 0$ である。しかもこれは

$$\sigma(\widehat{f}_T(\chi)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \chi(k)\sigma^{k+1}(T) = \sum_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \chi(k-1)\sigma^k(T) = \overline{\chi(1)}\widehat{f}_T(\chi) \tag{3.20}$$

を満たす。

次に σ の $\mathcal{V}$ への作用を $\widehat{f}_T(\chi)$ を不変にするように $\sigma_\chi\varphi := \overline{\chi(1)}\sigma(\varphi)$, $\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{V})$ とひねる。実際 (3.20) から

$$\langle \sigma_\chi(\widehat{f}_T(\chi)), \varphi \rangle = \langle \widehat{f}_T(\chi), \chi(1)\sigma^{-1}(\varphi) \rangle = \chi(1)\langle \sigma(\widehat{f}_T(\chi)), \varphi \rangle = \langle \widehat{f}_T(\chi), \varphi \rangle$$

である。ところが $\mathbf{G}$ の作用の像と σ_χ で生成される (離散位相) 群 $\mathbf{G}(\sigma_\chi)$ の作用は、そのグラフが

$$\{(x, g\sigma^k(x)) \,|\, x \in X,\, g \in \mathbf{G},\, k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \sigma_2^k\{(x, g.x) \,|\, x \in X,\, g \in \mathbf{G}\}$$

(σ_2 は σ を第二成分だけに施す写像) と $\mathbf{G}$ 作用のグラフを移動したものの有限合併なので可設的である。よって補題 3.4.3 が適用できる。

今、X 内の $\mathbf{G}(\sigma_\chi)$ 軌道 $\widetilde{O}$ とその中の $\mathbf{G}$ 軌道 O に対して $\Gamma(O, \mathcal{V}(O))_{\mathbf{G}} \neq \{0\}$ ならば、定理の仮定 (iii) から O は σ 不変ゆえ $\widetilde{O} = O$ である。よって再び仮定 (iii) から σ は $\Gamma(O, \mathcal{V}(O))_{\mathbf{G}}$ に自明に作用し、従って σ_χ は $\overline{\chi}(1) \neq 1$ 倍で作用する。すなわち $\Gamma(\widetilde{O}, \mathcal{V}(\widetilde{O}))_{\mathbf{G}(\sigma_\chi)} = \{0\}$ が常に成り立つ。よって補題 3.4.3 から $\Gamma_c(X, \mathcal{V})_{\mathbf{G}(\sigma_\chi)} = \{0\}$ なはずだが、$\widehat{f}_T(\chi)$ はその上の非自明な線型形式ゆえ矛盾である。 □

既約表現の反傾表現 $G(F)$ の外部自己同型

$$\theta_2 : G(F) \ni g \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} {}^t g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G(F)$$

を導入する。$\theta_2^2 = \mathrm{id}$ に注意する。

命題 3.4.5. $\pi \in \Pi(G(F))$ に対して、$\theta_2(\pi) := \pi \circ \theta_2^{-1}$ は $\pi^\vee$ に同型である。特に $\pi^\vee \simeq (\omega_\pi^{-1} \circ \det) \otimes \pi$ である。

証明. 補題 3.2.7 から、$\mathrm{tr}\theta_2(\pi) = \mathrm{tr}\pi^\vee$ を示せばよい。$f \in \mathcal{H}(G(F))$ に対して、$f^\vee(g) := f(g^{-1})$ と書く。$f \in \mathcal{H}_K(G(F))$ となる開コンパクト部分群 K を取れば、V^K は有限次元だからその有限基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ とその双対基底 $\{v_1^\vee, \ldots, v_n^\vee\} \subset (V^\vee)^K$ が取れる。このとき $f^\vee \in \mathcal{H}_K(G(F))$ と $G(F)$ がユニモヂュラなことから

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\pi^\vee(f) &= \sum_{i=1}^n \langle v_i, \pi^\vee(f) v_i^\vee \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{G(F)} f(g) \langle v_i, \pi^\vee(g) v_i^\vee \rangle \, dg \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{G(F)} f(g) \langle \pi(g^{-1}) v_i, v_i^\vee \rangle \, dg = \sum_{i=1}^n \int_{G(F)} f(g^{-1}) \langle \pi(g) v_i, v_i^\vee \rangle \, dg \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \pi(f^\vee) v_i, v_i^\vee \rangle = \mathrm{tr}\pi(f^\vee) \end{aligned}$$

である。一方 ${}^t\pi(g) := \pi({}^t g)$ と書けば ($\mathbf{G}$ の逆群 $\mathbf{G}^{\mathrm{opp}}$ の表現になる)、

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\theta_2(\pi)(f) =& \mathrm{tr} \int_{G(F)} f(g) \pi(\theta_2(g)) \, dg \\ =& \mathrm{tr}\pi\Bigl(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\Bigr) \circ \int_{G(F)} f(g) \pi({}^t g^{-1}) \, dg \circ \pi\Bigl(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\Bigr)^{-1} \\ =& \int_{G(F)} f(g^{-1}) \pi({}^t g) \, dg = \mathrm{tr}{}^t\pi(f^\vee) \end{aligned}$$

であるから、結局 $\mathrm{tr}\pi$ が行列の転置を取る操作で不変なことをいえばよい。

(o) $G(F)$ の $G(F)$ 自身への随伴作用 $\mathrm{Ad}(g)x = gxg^{-1}$ は可設である (F 線型代数群の F 多様体への作用から定まる F 有理点の作用は可設になる。[BZ76, 補遺] 参照)。

(i) ${}^t\bigl(\mathrm{Ad}(g)x\bigr) = \mathrm{Ad}({}^t g^{-1}){}^t x.$

(ii) ${}^t({}^t x) = x.$

(iii) x と ${}^t x$ は同一の $G(F)$ 共役類に属する。(x の特性多項式が重根を持たなければ、x の $G(F)$ 共役類は特性多項式から決まる[7]から明らか。重根を持つ場合は Jordan 標準形を考えればよい。)

[7] Hilbert の定理 90 から従う。今学期の代数学 C 演習の冬休みレポート問題 2, 3 およびその後の定理 5.12 を参照。

なので、$\mathbf{G} = G(F)$ が $X = G(F)$ に共役で作用し $\sigma(x) = {}^t x$ である場合に定理 3.4.4 が適用できて、$G(F)$ 不変分布 $\mathrm{tr}\pi$ は転置でも不変である。

二つ目の主張は $\theta_2(g) = (\det g)^{-1} \cdot g$ から直ちに従う。 $\square$

定理 3.4.1 の証明 $X = (U(F)\backslash G(F))^2$ には $G(F)$ が右移動で作用している。

$$g.(U(F)x, U(F)y) := (U(F)xg^{-1}, U(F)yg^{-1}), \quad g \in G(F),\ (U(F)x, U(F)y) \in X.$$

この上の自己同型 $\sigma : X \ni (U(F)x, U(F)y) \mapsto (-U(F)\theta_2(y), U(F)\theta_2(x)) \in X$ を考えよう。補題 3.2.5 から X 上の ℓ ベクトル束 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\overline{\psi}_U \otimes \overline{\psi}_U}$ で $\Gamma_c(X, \mathcal{V}_{\overline{\psi}_U \otimes \overline{\psi}_U}) \simeq \mathrm{ind}_{U(F)^2}^{G(F)^2}(\mathbb{C}_{\overline{\psi}_U \otimes \overline{\psi}_U})$ なるものがある。すぐわかるようにこれらは定理 3.4.4 の条件:

(o) $G(F)$ の X への作用は F 線型代数群の F 多様体への作用から来ているので可設的。

(i) $g \in G(F)$ に対して $\theta_2^2 = \mathrm{id}$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} g \circ \sigma(U(F)x, U(F)y) =& (-U(F)\theta_2(y)g^{-1}, U(F)\theta_2(x)g^{-1}) \\ =& \sigma(U(F)x\theta_2(g)^{-1}, U(F)y\theta_2(g)^{-1}) \\ =& \sigma \circ \theta_2(g)(U(F)x, U(F)y). \end{aligned}$$

(ii) $\sigma^4 = \mathrm{id}$.

を満たす。

さらに (iii) も成り立つことを確かめよう。まず Bruhat 分解 $G(F) = B(F) \sqcup U(F)wB(F)$ から、

$$\begin{aligned} & G(F)\backslash X = U(F) \times U(F)\backslash G(F) \times G(F)/\Delta G(F) \\ =& \coprod_{t \in T(F)} (U(F)t, U(F))\Delta G(F) \sqcup \coprod_{t \in T(F)} (U(F)wt, U(F))\Delta G(F) \end{aligned}$$

がわかる。

(a) $x(t) := (U(F)t, U(F))$, $(t \in T(F))$ の固定化群は $G(F)_{x(t)} = U(F)$ ゆえ $G(F).x(t) \simeq U(F)\backslash G(F)$ である。$\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{V})$ に対して $\varphi(x(t)) = \phi(t, 1)$ となる $\phi \in \mathrm{ind}_{U(F)^2}^{G(F)^2}(\mathbb{C}_{\overline{\psi}_U \otimes \overline{\psi}_U})$ を取り、$t = \left(\begin{smallmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{smallmatrix}\right)$ と書けば $U(F)$ は $\varphi(x(t)) \in \mathcal{V}_{x(t)}$ に

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\varphi(x(t)) =& \phi\Big(\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big) \\ =& \phi\Big(\Big(\begin{pmatrix} 1 & t_1t_2^{-1}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big), (t, 1)\Big) \\ =& \overline{\psi}(t_1t_2^{-1}x + x)\varphi(x(t)) \end{aligned}$$

と作用するから、$\Gamma_c(G(F).x(t), \mathcal{V}(G(F).x(t))) \simeq \mathrm{ind}_{U(F)}^{G(F)}(\mathbb{C}_{\overline{\psi}_U^{t_1 t_2^{-1}+1}})$ である。よって補題 3.2.3 と命題 3.2.4 から

$$\begin{aligned}\Gamma_c(G(F).x(t),&\mathcal{V}(G(F).x(t)))_{G(F)} = \mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathrm{ind}_{U(F)}^{G(F)}(\overline{\psi}_U^{t_1 t_2^{-1}+1}), \mathbf{1}_{G(F)}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathbf{1}_{G(F)}, \mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)}(\psi_U^{t_1 t_2^{-1}+1})) \simeq \mathrm{Hom}_{U(F)}(\mathbf{1}_{U(F)}, \psi_U^{t_1 t_2^{-1}+1}) \\ &\simeq \begin{cases} \mathbb{C} & t_1 = -t_2 \text{ のとき} \\ \{0\} & \text{それ以外のとき} \end{cases}\end{aligned}$$

を得る。$t_1 = -t_2$ ならば $\theta_2(t) = \left(\begin{smallmatrix} -t_1^{-1} & 0 \\ 0 & t_1^{-1} \end{smallmatrix}\right) = -t^{-1}$ から

$$\sigma(x(t)) = (-U(F), U(F)\theta_2(t)) = (-U(F), -U(F)t^{-1}) = \theta_2(t).(U(F)t, U(F))$$

なので $G(F).x(t)$ は確かに σ 不変であり、σ は $\Gamma_c(G(F).x(t), \mathcal{V}(G(F).x(t)))_{G(F)} \simeq \mathbb{C}$ に定数倍で作用する。ところが $\theta_2(t)^{-1} \circ \sigma$ は $x(t)$ を動かさないだけでなくそこでの茎 $\mathcal{V}_{x(t)} \simeq \mathbb{C}_{\mathbf{1}_{U(F)}}$ に

$$(\theta_2(t)^{-1} \circ \sigma)\varphi(x(t)) = \phi(\sigma^{-1} \circ \theta_2(t).(t,1)) = \phi(t,1) = \varphi(x(t))$$

と自明に作用しているから、この定数は 1 でなくてはならない。ただし φ, ϕ は前出の通りである。

(b) $x(wt) := (U(F)wt, U(F))$, $(t \in T(F))$ の場合には $\theta_2(wt) = -t^{-1}w$ に注意すれば

$$\begin{aligned}\sigma(x(wt)) &= (-U(F), U(F)\theta_2(wt)) = (-U(F), -U(F)t^{-1}w) \\ &= -wt.(U(F)wt, U(F)) = -wt.x(wt)\end{aligned}$$

ゆえ $G(F).x(wt)$ はいつも σ で保たれる。また $G(F)_{x(wt)} = \{1\}$ から (a) と同様にして

$$\Gamma_c(G(F).x(wt), \mathcal{V}(G(F).x(wt))) \simeq \mathrm{ind}_{\{1\}}^{G(F)}\mathbb{C} \simeq C_c^\infty(G(F))$$

である ($G(F)$ は後者に右移動で作用する)。$\Gamma_c(G(F).x(wt), \mathcal{V}(G(F).x(wt)))_{G(F)}^*$ は $G(F)$ 上の不変測度で張られる一次元空間であるが、その不変測度は σ の作用

$$\begin{aligned}\sigma(g.x(wt)) =&\sigma(U(F)wtg^{-1}, U(F)g^{-1}) = (-U(F)\theta_2(g)^{-1}, U(F)\theta_2(wtg^{-1})) \\ =&(U(F)wt\theta_2(wtg^{-1}), U(F)\theta_2(wtg^{-1})) \\ =&\theta_2(gt^{-1}w).x(wt)\end{aligned}$$

で引き起こされる変換 $g \mapsto \theta_2(gt^{-1}w)$ で明らかに不変である。

以上から定理 3.4.4 が適用できて、X 上の $G(F)$ 不変線型形式は σ 不変でもあることがわかった。さて、問題の空間

$$V_{U,\psi} \simeq \mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, \mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)}(\psi_U)) \overset{\text{補題 3.2.3}}{\simeq} \mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathrm{ind}_{U(F)}^{G(F)}(\overline{\psi}_U), \pi^\vee)$$

の非自明な元 $\Psi : \mathrm{ind}_{U(F)}^{G(F)}(\mathbb{C}_{\overline{\psi}_U}) \to V^\vee$ を取る。一方で $\theta_2(U) = U$, $\theta_2(\psi_U) := \psi_U \circ \theta_2 = \psi_U$ と命題 3.4.5 から

$$\mathrm{Hom}_{U(F)}(\pi^\vee|_{U(F)}, \psi_U) = \mathrm{Hom}_{U(F)}(\theta_2(\pi)|_{U(F)}, \psi_U) = \mathrm{Hom}_{U(F)}(\pi|_{U(F)}, \psi_U)$$

を得る。すなわち既約な π が ψ 非退化ならば $\pi^\vee$ も非退化なので、上と同様に $\Psi^\vee \neq 0, \in \mathrm{Hom}_{G(F)}(\mathrm{ind}_{U(F)}^{G(F)}(\overline{\psi}_U), \pi)$ が取れる。すると $G(F)$ 不変な双線型形式

$$B : \mathrm{ind}_{U(F)^2}^{G(F)^2}(\mathbb{C}_{\overline{\psi}_U \otimes \overline{\psi}_U}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_{U(F)}^{G(F)}(\mathbb{C}_{\overline{\psi}_U}) \otimes \mathrm{ind}_{U(F)}^{G(F)}(\mathbb{C}_{\overline{\psi}_U}) \ni \phi \otimes \phi' \longmapsto \langle \Psi(\phi), \Psi^\vee(\phi') \rangle \in \mathbb{C}$$

が定まるが、上からこれは σ 不変でもある。

$$B(\phi, \phi') = B((-\theta_2)(\phi'), \theta_2(\phi)), \quad \phi, \phi' \in \mathrm{ind}_{U(F)}^{G(F)}(\mathbb{C}_{\overline{\psi}_U}).$$

ただし $(-\theta_2)(\phi)(x) := \phi(-\theta_2(x))$ と書いている。これは

$$\begin{aligned}\ker\Psi =& \{\phi \in \mathrm{ind}_{U(F)}^{G(F)}(\mathbb{C}_{\overline{\psi}_U}) \mid B(\phi, \phi') = 0, \forall \phi' \in \mathrm{ind}_{U(F)}^{G(F)}(\mathbb{C}_{\overline{\psi}_U})\} \\ =& \{\phi \in \mathrm{ind}_{U(F)}^{G(F)}(\mathbb{C}_{\overline{\psi}_U}) \mid B(\phi', \theta_2(\phi)) = 0, \forall \phi' \in \mathrm{ind}_{U(F)}^{G(F)}(\mathbb{C}_{\overline{\psi}_U})\} \\ =& \theta_2(\ker\Psi^\vee)\end{aligned}$$

を意味する。すなわち $\ker\Psi$ は Ψ によらず一意である。ところが Schur の補題から Ψ は $\ker\Psi$ で定数倍を除いて一意に定まるのだったから、定理が示された。 □

注意 3.4.6 (対称性の拡張の意味). 上の証明で、$U(F)^2$ の非退化指標 $\overline{\psi}_U \otimes \overline{\psi}_U$ に付随する $(U(F)\backslash G(F))^2$ 上の ℓ ベクトル束上の $G(F)$ 不変分布が $(g_1, g_2) \mapsto (\theta_2(g_2), -\theta_2(g_1))$ で不変なことを示した。実はこれのひねられた類似版も正しい。

E/F を標数 0 の非アルキメデス局所体の二次拡大とし、その Galois 群の生成元を σ と書く。$G(F) = G(E)^\sigma$ は $G(E)$ の部分群である。このとき $U(E)$ の非退化指標 $\overline{\psi}_{U,E}$ に付随する $U(E)\backslash G(E)$ 上の ℓ ベクトル束上の $G(F)$ 不変分布は $g \mapsto \theta_2(\sigma(g))$ で「不変」になる。これは、$G(E)$ の $\psi_{U,E}$ 非退化な既約許容表現 (π, V) が $G(F)$ 不変線型形式を持てば ($G(F)$-*distinguished* と言われる)、$\sigma(\pi) \simeq \pi^\vee$ が成り立つことを意味する。これは π が E/F に付随するに変数ユニタリ群 $U_{E/F}(2, F)$ の既約表現 (正確には L パケット) からの (ひねられた) **ベースチェンジリフト**であることに同値である。さらにこの結果の大域類似も成り立つ。これらの結果については [HLR86], [JY90] などを参照されたい。

$G(E) \supset G(F)$ は簡約群とその上の対合的な自己同型の不変部分群という、いわゆる**対称対** *(symmetric pair)* の一例である。上は対称空間 $G(E)/G(F)$ 上の函数空間に実現される表現が第三の群 $G'(F) = U_{E/F}(2, F)$ の表現からのリフトになっていることを主張している。一般に対称対 $G \supset H$ に対して第三の簡約群 G' で G/H 上に表れる表現が G' からのリフトで得られるものがある、という一般的な仕組みについては [JLR93] の導入に概念的な解説がある。定理 3.4.1 の場合にはこの (G, G') が再び対称対であることから、$H(F)$ 不変な分布が $G' = G^\theta$ となる対合的自己同型 $\theta = \theta_2 \circ \sigma$ でも不変になっていたのである。

逆に Whittaker 模型の存在については次が成り立つ。

命題 3.4.7. $G(F)$ の一次元でない (従って無限次元の) 既約許容表現は非退化である。

証明. まず既約超カスプ表現 (π, V) の場合には、

補題 3.4.8. 任意の $\omega_1 \otimes \omega_2 \in \Pi(T(F))$ に対して例 3.3.14 の線型汎函数

$$\Lambda_{\psi,\omega_1,\omega_2} : I_B^G(\mathbb{C}_{\omega_1\otimes\omega_2}) \ni \phi \longmapsto \int_{U(F)} \phi(wu)\overline{\psi_U(u)}\, du \in \mathbb{C} \tag{3.21}$$

は $I_B^G(\omega_1 \otimes \omega_2)$ 上の定義可能な Whittaker 汎函数を定める。

証明. Casselman-Shalika の Prop.2.1 を見て書く。 □

□

第 4 章　アルキメデス局所理論

4.1　$GL(2,\mathbb{R})$, $GL(2,\mathbb{C})$ の表現

4.2　アルキメデス標準 L 因子

第 5 章　大域理論

関連図書

[Bou] N. Bourbaki. 数学原論、代数 6. 東京図書, 東京.

[BZ76] I. N. Bernšteĭn and A. V. Zelevinskiĭ. Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-Archimedean field. *Uspehi Mat. Nauk*, Vol. 31, No. 3(189), pp. 5–70, 1976.

[Deu68] Max Deuring. Imaginäre quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl Eins. *Invent. Math.*, Vol. 5, pp. 169–179, 1968.

[Eic38] M. Eichler. Allgemeine Kongruenzklasseninteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen. *J. reine Angew. Math.*, Vol. 179, pp. 227–251, 1938.

[Gel75] Stephen S. Gelbart. *Automorphic forms on adele groups*, Vol. 83 of *Annals of Math. Studies*. Princeton UP, Princeton, NJ, 1975.

[GK75] I. M. Gelfand and D. A. Kazhdan. Representations of $gl(n, k)$ where k is a local field. In *Lie Groups and their Representations*, pp. 95–118. John Wiley and Sons, 1975. Proc. of summer school on representation theory, Hungary.

[GPS88] M. Gromov and I. Piatetski-Shapiro. Nonarithmetic groups in Lobachevsky spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 66, pp. 93–103, 1988.

[Gun62] R Gunning. *Lectures on Riemann Surfaces.* Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1962.

[Hal] Paul Halmos. *Measure theory.*

[Hee52] Kurt Heegner. Diophantische Analysis und Modulfunktionen. *Math. Z.*, Vol. 56, pp. 227–253, 1952.

[HLR86] G. Harder, R. P. Langlands, and M. Rapoport. Algebraische Zyklen auf Hilbert-Brumenthal Flächen. *Jour. reine angew. Math.*, Vol. 366, pp. 53–120, 1986.

[How] R. Howe. Some qualitative results on the representation theory of GL_n over a p-adic field. 1972 年の Princeton 高等研究所での講義録.

[J.-P79] J.-P. セール. 数論講義. 岩波書店, 1979. 彌永 健一氏による Cours d'arithmétique. Deuxième édition revue et corrigée. Le Mathématicien, No. 2. Presses Universitaires de France, Paris, 1977. 188 pp. の邦訳.

[JL70] H. Jacquet and R. P. Langlands. *Automorphic forms on* $GL(2)$, Vol. 114 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, 1970.

[JLR93] H. Jacquet, K. F. Lai, and S. Rallis. A trace formula for symmetric spaces. *Duke Math. J.*, Vol. 70, No. 2, pp. 305–372, 1993.

[JY90] H. Jacquet and Yangbo Ye. Une remarque sur le changement de base quadratique. *C.R. Acad. Sci. Paris Série I Math.*, Vol. 311, pp. 671–676, 1990.

[L.V.82] L.V. アールフォールス. 複素解析. 現代数学社, 1982. 笠原乾吉訳.

[Maa49] H. Maass. Über eine neue Art von nicht analytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen. *Math. Ann.*, Vol. 121, pp. 141–183, 1949.

[Mar84] G. A. Margulis. Arithmeticity of the irreducible lattices in the semisimple groups of rank greater than 1. *Invent. Math.*, Vol. 76, No. 1, pp. 93–120, 1984.

[Mos78] G. D. Mostow. Existence of a nonarithmetic lattice in SU(2, 1). *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, Vol. 75, No. 7, pp. 3029–3033, 1978.

[Mos81] G. D. Mostow. Existence of nonarithmetic monodromy groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, Vol. 78, No. 10, Phys. Sci., pp. 5948–5950, 1981.

[Mun60] James Munkres. Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homomorphisms. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 72, pp. 521–554, 1960.

[PR94] Vladimir Platonov and Andrei Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory*, Vol. 139 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1994. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.

[Sil86] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves.* Springer Verlag, New York, 1986. GTM 106.

[Sta67] H. M. Stark. A complete determination of the complex quadratic fields of class-number one. *Michigan Math. J.*, Vol. 14, pp. 1–27, 1967.

[Wal03] J.-L. Waldspurger. La formule de Plancherel d'après Harish-Chandra. *Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu*, Vol. 2, No. 2e, p. ???, 2003.

[War71] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Scott, Foresman and Company, 1971.

[Wei95] André Weil. *Basic number theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the second (1973) edition.

[金子 01] 金子昌信. 楕円モジュラー函数 $j(\tau)$ のフーリエ係数, 第 10 巻. 神戸大学理学部数学教室, 2001.

[高橋] 高橋哲也. p 進体上の簡約代数群の admissible 表現論入門. Rokko Lectures in Mathematics, Vol. 4, http://wwwmi.cias.osakafu-u.ac.jp/ takahasi/ kobe-lec.dvi からダウンロードできる。

[高木 83] 高木貞治. 解析概論. 岩波書店, 1983. 改訂第三版.

[松阪 68] 松阪和夫. 集合・位相入門. 岩波書店, 1968.

[森田 96] 森田茂之. 微分形式の幾何学１. 岩波講座 現代数学の基礎. 岩波書店, 1996.

[清水 68] 清水英男. 近似定理、ヘッケ環、ゼータ函数, 東京大学数学教室セミナリーノート, 第 21 巻. 1968.

[清水 92] 清水英男. 保型関数. 岩波書店, 1992. 岩波講座基礎数学 代数学 vii.

索 引