GL_2 上の保型形式と L 函数*

2008 年 8 月 30 日

0　導入

保型形式とは上半平面上の、ある第１種 Fuchs 群 Γ に対する保型性を持つ正則函数のことであった。商空間 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ にカスプを付けて得られるコンパクト Riemann 面 $X_\Gamma = \Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ 上の (ウェイトから定まる) ある線束の正則切断であるといってもよい。定義から保型形式は Γ をモノドロミー群に持つ微分方程式系の解として研究され、いくつかの重要な保型形式が具体的に構成されてきた。

一方で整数論における保型形式は Dirichlet 級数や Galois 表現などの大域的な対象について具体的、実効的な情報を与える貴重な存在であり、そのためにはまず保型形式自身を具体的に記述できることが求められる。Γ が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合には、Eisenstein 級数や Ramanujan の Δ 函数などによる保型形式の詳しい記述がある。しかしそれは $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の組合せ論的な特性から引き出されたものであり、一般には Γ に対する保型形式が Poincaré 級数で張られることが示せるのみである。

実はこのように保型形式全体を記述するためには、$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ や $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ よりもそれらの "射影極限" である $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\mathbb{R}^\times\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式を考える方がよい。ただし $\mathbb{A}$ は $\mathbb{Q}$ のアデール群であり、SL_2 が GL_2 で置き換えられている理由は後で説明する。この設定の最大のメリットは GL_2 のアデール群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の作用を備えており、従ってその上の保型形式の空間は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の "線型表現" と見なされる点である。特に保型形式を記述する問題はこの表現の記述に帰着される。しかも $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ は実数体や p 進体上の GL_2 の制限直積であるから、その既約表現は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ や $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約表現による "Euler 積展開" を持つ。局所類体論が類体論の応用範囲を大きく拡げたように、こうした局所理論も保型形式の整数論において重要な役割を果たす。なかんずく大切なことは、既約保型表現に対してその局所成分を通して Euler 積展開を持つ Dirichlet 級数 (保型 L 函数) が定まることである。そして保型形式の記述自体もこの保型 L 函数によって与えられるのである。

---

*第 16 回整数論サマースクール「保型 L 函数」の報告集原稿。

電子メール: takuya@math.kyushu-u.ac.jp
ホームページ: http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~takuya/edu/

このノートの目的は Jacquet-Langlands によってなされたこれらの研究 [JL70] の結果を概説することである。1960 年代に行われたこの研究を皮切りに、保型形式や保型表現の概念は大域体上の簡約群に対して一般化され、その整数論への応用も広く研究されるようになった。ついには代数体上の古典群の保型表現の記述さえも非常に近い将来に完成しようという現在、Jacquet-Langlands を振り返る必要があるか問われる向きもあるだろう。しかし、もっとも単純な GL_2 の場合だからこそ、500 ページの原著よりずっと短いレジュメが役立つのではと考えることにした。同じような内容を解説した文献も [Gel75], [BC79] など数多いので、このノートではあまり完全な証明はせず、既約表現の分類やそれらに付随する L 函数の Euler 因子の計算などをなるべく具体的に与えることにページを割いた。読者には証明の雰囲気をつかんだ上で具体的な L 因子や表現の一覧表のように使っていただければ幸いである。ノート全体の構成は次のようになっている。

まず 1 節では古典的な上半平面上の保型形式がどのようにして有理数体上の GL_2 のアデール群上に持ち上がるかを解説する。次いでこの持ち上げを念頭に置いて、一般の代数体 F 上の GL_2 のアデール群上の保型形式を定義する。これは例えば代数体が総実な場合には古典的な Hilbert 保型形式を含む広範な概念である。基礎体 F が正標数の大域体の場合にも類似の定義ができるのだが、記号を節約するためにこの原稿では代数体の場合のみを考えることにする。さらにそれらの保型形式の記述が本質的に $\mathrm{GL}_2(F)\mathbb{R}^\times\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の二乗可積分函数の空間上の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ のユニタリ表現の既約分解に帰着されることを見る。実はカスプ形式でない保型形式の記述はこの既約分解には含まれないのだが、その問題はあまり重要でないので割愛した。

2 節では $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約表現の局所成分をなす、局所体上の GL_2 の既約許容表現を分類する。ここでは主に非アルキメデス局所体の場合を解説し、$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上の場合については基本的な定義と結果だけを復習するに留めた。$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上の場合には指数函数や超幾何函数などで表現が具体的に記述されるが、非アルキメデス的な場合にはその代わりとして局所類体論が用いられる。2 節で用いた局所類体論の結果については補遺 A にまとめておいた。

続く 3 節ではこうして分類した既約表現に対応する L 因子 (L 函数の Euler 因子) の定義を与え、それらを計算する。L 因子の定義には Whittaker 模型と呼ばれる既約表現の実現が本質的な役割を果たす。L 因子の計算はこの Whittaker 模型の変形である Kirillov 模型を計算して求める方法もあるが、ここでは Weil 表現による既約表現の実現を用いる [JL70] の方法を紹介した。分岐している表現に対しては L 因子はおおむね 1 であり、表現の情報は函数等式を統制する ε 因子に含まれている。最後にこの L, ε 因子を組み合わせて定義される γ 因子 (ε' 因子) により既約表現が分類されることを見る。

これらの準備の元に 4 節で $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約カスプ表現の記述を与える。これがいわゆる Hecke 理論の Jacquet-Langlands による拡張である。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約表現は局所体上の GL_2 の既約表現の "制限テンソル積" に分解する。(これは Hecke の量指標が局所体の乗法群の指標の Euler 積に分解することの拡張である。) その各局所成分に付随する L 因子の Euler 積として標準 L 函数が定義される。$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約表現がカスプ形式であるためには、この標準 L 函数がよい挙動をすることが必要十分であるというのが、我々の目標としていた保型形式の記述である。

目次

記号 このノートでは自然数の集合 $\mathbb{N}$ は 0 を含むものとする。N 次の単位行列を $\mathbf{1}_N$ と書く。群 G の元 g による内部自己同型 $x \mapsto gxg^{-1}$ を $\mathrm{Ad}(g)$ と書く。G が Lie 群のときには $\mathrm{Ad}(g)$ がその Lie 環に引き起こす自己同型も $\mathrm{Ad}(g)$ で表す。自明な指標 (単位表現) $G \ni g \mapsto 1 \in \mathbb{C}^\times$ を $\mathbb{1} = \mathbb{1}_G$ と書く。

1 古典的保型形式から保型表現へ

この節では上半平面上の保型形式がどのようにして GL_2 のアデール群上の函数に持ち上がるか、さらに保型形式の研究がいかにして保型表現の問題に帰着されるかを手短に解説する。

1.1 楕円保型形式

まずは保型形式とは何であったかを手短に思い出そう。

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ は平面 $\mathbb{C}^2$ に線型変換として作用する。ベクトル $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ の固定化群は $U(\mathbb{C}) := \{\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right) \mid b \in \mathbb{C}\}$ であるから、

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \ni gU(\mathbb{C}) \longmapsto g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$$

は解析同相である。これは単に g の第 1 列を取る写像であるから、対角極大トーラス $T'(\mathbb{C}) := \left\{\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{C}^\times\right\}$ の元 $t = \left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{smallmatrix}\right)$ の右作用 $g \mapsto gt$ は $\mathbb{C}^2 \smallsetminus \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}$ の a 倍写像に移る。よって $B'(\mathbb{C}) := T'(\mathbb{C}) \ltimes U(\mathbb{C}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ と書けば、解析写像からなる可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{解析同相}} & \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/B'(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{解析同相}} & \mathbf{P}^1(\mathbb{C})
\end{array}$$

が得られる。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/B'(\mathbb{C})$ への $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の左移動作用は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ への一次分数変換としての作用にほかならない。k を偶正数とする。指標 $\chi_k : T'(\mathbb{C}) \ni \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \mapsto a^k \in \mathbb{C}^\times$ を用いて、

$$L_k = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \times_{T'(\mathbb{C}),\chi_k^\vee} \mathbb{C} := \big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/U(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}\big)\Big/(gt, z) \sim (g, \chi_k(t)^{-1}z)$$

とおけば、$L_k \ni (g, z) \mapsto gB'(\mathbb{C}) \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ は複素線束である。

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 等質空間 $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ は上下半平面 $\mathfrak{H}^\pm$ および実軸に無限遠点を付けた $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ の 3 つの $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 軌道の合併である。そのうちの上半平面 $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^+$ を考える。上の解析同相は $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ の原点として 0 を採用していたが、これは上半平面に入っていないので代わりに虚数単位 i を使う。$c := \sqrt{2}^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right)$ と書けば $i = c.0$ であるから、$cB'(\mathbb{C})c^{-1} \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ が回転行列の群 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ になることに注意して、可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/B'(\mathbb{C}) \arrow[r, "解析同相"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(c)"'] & \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \arrow[d, "c"'] \\
\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/cB'(\mathbb{C})c^{-1} \arrow[r, "解析同相"] & \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \\
\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \arrow[r, "解析同相"] \arrow[u, "埋め込み"] & \mathfrak{H} \arrow[u, "埋め込み"']
\end{tikzcd}$$

が得られる。先の線束の $\mathfrak{H}$ への制限は $L_k|_{\mathfrak{H}} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\chi_k^\vee} \mathbb{C} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ となる。ただし

$$\chi_k : \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \overset{\mathrm{Ad}(c)^{-1}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \overset{\chi_k}{\longmapsto} e^{ik\theta} \in \mathbb{C}^\times$$

と書いている。

第 1 種 Fuchs 群 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ を取る。Γ は $\mathfrak{H}$ に完全不連続に作用し、商空間 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ は Riemann 面の構造を備える。さらに、$\mathfrak{H}$ に Γ の**カスプ**と呼ばれる $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ の点たちを付け加えたものを $\mathfrak{H}^*$ として、商 $X_\Gamma := \Gamma\backslash\mathfrak{H}^*$ はコンパクト Riemann 面になる。上と同様に線束

$$\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\chi_k^\vee} \mathbb{C} \longrightarrow \Gamma\backslash\mathfrak{H}$$

が定まり、それは X_Γ 上の線束 $\pi : L_{k,\Gamma} \to X_\Gamma$ に延びる。これをウェイト k, レベル Γ の**保型線束**と呼ぶ。その**正則切断**、すなわち正則写像 $\varphi : X_\Gamma \to L_{k,\Gamma}$ で $\pi \circ \varphi = \mathrm{id}_{X_\Gamma}$ となるものをウェイト k, レベル Γ の**保型形式**という。

自然な射影 $\mathfrak{H} \to \Gamma\backslash\mathfrak{H}$ を p_Γ と書き、それによる $L_{k,\Gamma}$ の引き戻し

$$\widetilde{\pi} : p_\Gamma^* L_{k,\Gamma} := \{(z, \ell) \in \mathfrak{H} \times L_{k,\Gamma} \mid p_\Gamma(z) = \pi(\ell)\} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathfrak{H}$$

を考える。これは $\mathfrak{H}$ 上の線束だが、$\mathfrak{H}$ は単連結だからその上の線束は自明な線束 $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ に同型である。実際、$p_\Gamma^* L_{k,\Gamma}$ の元を $\big(z, \big(\left(\begin{smallmatrix} z \\ 1 \end{smallmatrix}\right), u\big)\big), (\left(\begin{smallmatrix} z \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}, u \in \mathbb{C})$ と書いて、

それに $(z,u) \in \mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ を対応させる写像 $i : p_\Gamma^* L_{k,\Gamma} \to \mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ は線束の同型である:

$$\begin{tikzcd} p_\Gamma^* L_{k,\Gamma} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"'] & \mathfrak{H} \times \mathbb{C} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ \mathfrak{H} \arrow[r, equal] & \mathfrak{H} \end{tikzcd}$$

この同型で $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ の $p_\Gamma^* L_{k,\Gamma}$ への作用を $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ に持って行くと

$$\begin{aligned}\gamma.(z,u) =& i\Big(\gamma.z, \Big(\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, u\Big)\Big) = i\Big(\gamma.z, \Big(\gamma \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, u\Big)\Big) = i\Big(\gamma.z, \Big(\begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix}, u\Big)\Big) \\ =& i\Big(\gamma.z, \Big((cz+d)\begin{pmatrix} \gamma.z \\ 1 \end{pmatrix}, u\Big)\Big) = i\Big(\gamma.z, \Big(\begin{pmatrix} \gamma.z \\ 1 \end{pmatrix}, (cz+d)^{-k}u\Big)\Big) \\ =& (\gamma.z, j(\gamma,z)^k u)\end{aligned}$$

となる。ここで

$$j(g,z) := \frac{1}{cz+d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

は**保型因子**である。さて、ウェイト k でレベル Γ の保型形式 φ は $p_\Gamma^* L_{k,\Gamma}$ の Γ 不変な正則切断と見なされる。それと上の同型の合成を $i(\varphi(z)) = (z, f(z))$ と書けば、φ の Γ 不変性は

$$f(\gamma.z) j(\gamma,z)^k = f(z), \quad \gamma \in \Gamma$$

となり、f が通常の Γ に対するウェイト k の保型形式の空間 $M_k(\Gamma)$ に属することがわかる。こうして $M_k(\Gamma)$ と $L_{k,\Gamma}$ の正則切断の空間の間の線型同型が得られる。

1.2 両側剰余類空間

このノートを通して G は代数体 F 上の代数群 GL_2 を表す。つまり可換 F 代数 R に対して $G(R)$ は R 係数 2 次正方行列環 $\mathrm{M}_2(R)$ の単元群である。その中心 Z は GL_1 と同一視される。当面 $F = \mathbb{Q}$ の場合を考える。

素数 p に対して p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ は局所コンパクト完全不連結体であり、p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ はその極大コンパクト部分環であった。よって素数の有限集合 S に対して直積環

$$\mathbb{A}(S) = \mathbb{R} \times \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p$$

は局所コンパクト位相環になる。$S \subset T$ なら自然に $\mathbb{A}(S) \subset \mathbb{A}(T)$ であり、この埋め込みについての位相的帰納極限 $\mathbb{A} = \varinjlim_S \mathbb{A}(S)$ が $\mathbb{Q}$ の**アデール環**であった。$\mathbb{A}$ の元で $\mathbb{R}$ の成分が 0 であるものからなる部分環を**有限アデール環**と呼び $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ と書く。$\widehat{\mathbb{Z}} := \prod_p \mathbb{Z}_p$ は $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$

の極大コンパクト部分環であり、開コンパクト部分群の族 $\{N\widehat{\mathbb{Z}}\}_{N\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ の単位元 0 の基本近傍系をなす。よく知られているように

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q} + (\mathbb{R} \times N\widehat{\mathbb{Z}}), \quad N \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

が成り立つ。

上の構成に現れる環をその単元群で置き換えることにより、$\mathbb{A}^\times(S) = \mathbb{R}^\times \times \prod_{p\in S} \mathbb{Q}_p^\times \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p^\times$ および $\mathbb{Q}$ の**イデール群** $\mathbb{A}^\times := \varinjlim_S \mathbb{A}^\times(S)$ が定義される。$\mathbb{Q}_p$ 上の**モジュラス** (p 進ノルム) $|\ |_p$ は $\mathbb{Z}_p^\times$ で 1 だから、**イデールノルム**

$$|\ |_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^\times \ni (x_v)_v \longmapsto |x_\infty|_\infty \prod_p |x_p|_p \in \mathbb{R}_+^\times$$

は定義可能な連続準同型になる。ここで x_∞ は $\mathbb{R}$ 成分であり、$|\ |_\infty$ は $\mathbb{R}$ 上の通常の絶対値である。また正実数のなす乗法群を $\mathbb{R}_+^\times$ と書いている。$\mathbb{A}^1 := \ker|\ |_{\mathbb{A}}$ と書けば、明らかに $\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{A}^1$ であり、また Artin の積公式 $\mathbb{Q}^\times \subset \mathbb{A}^1$ が成り立つ。$\mathbb{Q}$ の類数は 1 であるのでさらに

$$\mathbb{A}^\times = \mathbb{Q}^\times(\mathbb{R}^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}^\times) \tag{1.2}$$

であることに注意する。

同様に $G(\mathbb{Q}_p)$ は開コンパクト部分群族 $\{K(p^n) := \mathbf{1}_2 + p^n\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_p)\}_{n\geq 1}$ を単位元の基本近傍系とする局所コンパクト完全不連結群であり、$\boldsymbol{K}_p = \{g \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_p) \mid \det g \in \mathbb{Z}_p^\times\}$ はその極大コンパクト部分群である。再び素数の有限集合 S に対して

$$G(\mathbb{A}(S)) = G(\mathbb{R}) \times \prod_{p\in S} G(\mathbb{Q}_p) \times \prod_{p\notin S} \boldsymbol{K}_p$$

は局所コンパクト位相群となる。その位相的帰納極限 $G(\mathbb{A}) := \varinjlim_S G(\mathbb{A}(S))$ を G の**アデール群**という。やはり $G(\mathbb{R})$ 成分が 1 である元からなる $G(\mathbb{A})$ の部分群を**有限アデール群**と呼んで $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ と書く。$\mathbb{R}_+^\times$ を $Z(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^\times$ の部分群と見なす。開コンパクト部分群 $K \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ に対して $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})/K$ は離散的だから、$G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times K \cong G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})/\mathbb{R}_+^\times K$ は実解析多様体である。$G(\mathbb{Q})$ の $G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times K$ への左移動作用は完全不連続なので両側剰余類空間 $G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K$ も実解析多様体となる。上半平面からアデール群への移行は次の命題による。

命題 1.1. 開コンパクト部分群 $K \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ が条件 $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ を満たすとし、$\varGamma := K \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ を対応する数論的部分群とする。このとき

$$\varGamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \ni \varGamma g \longmapsto G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times gK \in G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K$$

は解析同相である。

証明. まず $g, g' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ が $g' \in G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times gK = G(\mathbb{Q})(\mathbb{R}_+^\times g \times K)$ を満たすとする:

$$(g', 1) = \gamma(ag, k), \quad (\gamma \in G(\mathbb{Q}),\, a \in \mathbb{R}_+^\times,\, k \in K)$$

$g'(ag)^{-1} = \gamma = k^{-1}$ の行列式を取って $a^{-2} \in \mathbb{Q} \cap \widehat{\mathbb{Z}}^\times = \{\pm 1\}$ ゆえ $a = 1$ である。よって上は $\gamma = k^{-1} = g'g^{-1} \in K \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) = \Gamma$ に対して $g' = \gamma g$ となることに同値だから、命題の写像は定義可能かつ単射である。

任意の $g \in G(\mathbb{A})$ に対して、(1.2) から $\det g = \xi(r, u)$, $(\xi \in \mathbb{Q}^\times, r \in \mathbb{R}^\times, u \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times)$ と書ける。仮定から $u = \det k_1$ となる $k_1 \in K$ があり

$$g' := \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} g \left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k_1 \right)^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$$

である。一方、Eichler の強近似定理 [Eic38] により $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ で稠密だから、$\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times K')$, $(K' := K \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}))$ が成り立つ。これらから

$$G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{Q})\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})(G(\mathbb{R}) \times K) = G(\mathbb{Q})(G(\mathbb{R}) \times K) \tag{†}$$

を得る。さて、$\det \gamma = \det k = -1$ となる $\gamma \in G(\mathbb{Q}), k \in K$ を取れば、再び強近似定理から $\gamma k = \gamma' k'$, $(\gamma' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}), k' \in K')$ と書ける。特に $\epsilon := \gamma^{-1}\gamma' = kk'^{-1} \in G(\mathbb{Q}) \cap K$ かつ $\det \epsilon = -1$ である。これと (†) から

$$G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{Q})(\epsilon^{\mathbb{Z}}\mathbb{R}_+^\times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times K) = G(\mathbb{Q})(\mathbb{R}_+^\times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times K)$$

ゆえ、命題の写像は全射でもある。それが解析同相になることは両辺の解析構造の定義から従う。 □

例 1.2. 例えば $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$K_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{c} a\, d \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times \\ b \in \widehat{\mathbb{Z}},\, c \in n\widehat{\mathbb{Z}} \end{array} \right\} \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$$

は命題 1.1 の仮定を満たし、$K_0(n) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ はレベル n の *Hecke* **部分群**

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \in n\mathbb{Z} \right\}$$

である。命題により $\Gamma_0(n)\backslash\mathfrak{H}$ は $G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K_0(n)$ と同一視される。

注意 1.3. 整数 $n > 1$ に対して $K(n) := \mathbf{1}_2 + n\mathbb{M}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ とおけば、$K(n) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ はレベル n の**主合同部分群** $\Gamma(n) := \{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,|\, \gamma \equiv \mathbf{1}_2 \pmod{n}\}$ であるが、これは $\det K(n) = 1 + n\widehat{\mathbb{Z}} \subsetneq \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ となって命題 1.1 の仮定を満たさない。このような K に対しては $G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K$ は有限個の数論的部分群 Γ_i に対する合併 $\coprod_{i=1}^r \Gamma_i\backslash\mathfrak{H}$ に解析同相になる。その場合でも各連結成分 $\Gamma_i\backslash\mathfrak{H}$ の記述はないが、$\coprod_{i=1}^r \Gamma_i\backslash\mathfrak{H}$ 全体とその連結成分の集合への $G(\mathbb{Q})$ の推移的な作用の (類体論を用いた) よい記述がある。

1.3　上半平面からアデール群へ

開コンパクト部分群 $K \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ で $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ なるものを取り、$\Gamma = K \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ を命題 1.1 の通りとする。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の Lie 環の複素化

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr} X = 0\}$$

の $\mathbb{C}$ 上の基底

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad Y := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

を取る。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の *Laplace-Beltrami* **作用素**とは $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の**普遍包絡環** (*universal enveloping algebra*, 14 ページの脚注参照) の元として

$$\Delta := -\frac{1}{2}\Big(XY + YX - \frac{U^2}{2}\Big)$$

で定まる不変微分作用素であった[1]。

自然数 k に対して、函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ で

(i) $\phi(\gamma a g) = \phi(g)$, $(\gamma \in G(\mathbb{Q}), a \in \mathbb{R}_+^{\times})$;

(ii) $\phi(g)$ は g の $G(\mathbb{R})$ 成分について滑らかで、次を満たす:

$$\phi\Big(g\Big(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, h\Big)\Big) = e^{ik\theta}\phi(g), \quad (g \in G(\mathbb{A}),\ 0 \le \theta < 2\pi,\ h \in K);$$

(iii) $\Delta\phi = -\dfrac{k(k-2)}{4}\phi$;

(iv) ϕ は $G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^{\times}\backslash G(\mathbb{A})$ 上**緩増加**。つまりコンパクト集合 $\Omega \subset G(\mathbb{A})$ に対して $C > 0$, $N \in \mathbb{Z}$ があって

$$\phi\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big) \le C|a|_{\infty}^{N}, \quad \forall g \in \Omega,\ a \ge 1, \in \mathbb{R}.$$

を満たすものの空間を $\mathcal{A}(G; k, K)$ と書く。

命題 1.4. 命題 1.1 の解析同相を使って

$$M_k(\Gamma) \ni f \longmapsto \Big(G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^{\times} gK \mapsto \phi_f(g) := f(g.i)j(g,i)^k\Big) \in \mathcal{A}(G; k, K)$$

とおけば、これは定義可能な単射を与える。

[1] Δ は Casimir 作用素の -2 倍、[JL70, §5] の D の $-1/2$ 倍である。

証明. $f \in M_k(\Gamma)$ とする。

(i) $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \gamma \in \Gamma$ に対して、保型形式の定義から

$$\phi_f(\gamma g) = f(\gamma g.i)j(\gamma g, i)^k = f(g.i)j(\gamma, g.i)^{-k}(j(\gamma, g.i)j(g,i))^k = \phi_f(g)$$

ゆえ ϕ_f は $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})/K$ 上の函数。

(ii) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \ni g$ を

$$g = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

$(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+^\times, 0 \leq \theta < 2\pi)$ と岩澤分解すれば、$z = x + yi$ として

$$\phi_f\left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) = e^{ik\theta}y^{k/2}f(z) \tag{1.5}$$

だから ϕ_f は $\mathcal{A}(G;k,K)$ の条件 (ii) を満たす。

(iii) 分解 (1.4) の座標で計算すると

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + y\frac{\partial^2}{\partial x \partial\theta}$$

となるから、

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_f(g) &= -y^2e^{ik\theta}\left(y^{k/2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{k(k-2)}{4}y^{k/2-2}f(z) + ky^{k/2-1}\frac{\partial f}{\partial y}(z) + y^{k/2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z)\right) \\
&\qquad + ike^{ik\theta}y^{k/2+1}\frac{\partial f}{\partial x}(z) \\
&= -e^{ik\theta}y^{k/2+2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(z) + ike^{ik\theta}y^{k/2+1}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)f(z) \\
&\qquad - \frac{k(k-2)}{4}e^{ik\theta}y^{k/2}f(x+yi) \\
&= -\frac{k(k-2)}{4}\phi_f(g)
\end{aligned}$$

がわかる。f は正則だから右辺のラプラス作用素と $2\partial/\partial\bar{z}$ の項 (第一行) は消えていることに注意せよ。

(iv) f は $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$, ($\mathfrak{H}$ は Poincaré 上半平面) にカスプを付け加えて得られるコンパクト Riemann 面上の整型函数だから (1.5) から ϕ_f は $G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})$ 上緩増加。

これらから命題の写像は定義可能である。またその単射性も自明である。 □

例 1.5 (正則 Eisenstein 級数)**.** G の上三角な元からなる (Borel) 部分群を B と書き

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}$$

とおけば、$B = U \rtimes T$ (半直積) である。極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K} = \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \times \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}}$, $(\boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}} := \prod_{p\,\text{素数}} \boldsymbol{K}_p)$ に対して、$G(\mathbb{A})$ の**岩澤分解**

$$G(\mathbb{A}) = B(\mathbb{A})\boldsymbol{K}$$

が成り立つ。k を 2 以上の整数として、$f_{2k} : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ を

$$f_{2k}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, h \right) \right) := \left| \frac{a}{d} \right|_{\mathbb{A}}^{k} e^{2ki\theta},$$

$(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in B(\mathbb{A}), \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), h \in \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}})$ と定めれば、これは分解の取り方によらず定義可能で、左 $B(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times$ 不変である。特に $k \geq 2$ ならば

$$E_{2k}(g) := \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} f_{2k}(\gamma g), \quad g \in G(\mathbb{A})$$

は広義絶対一様収束して $\mathcal{A}(G; 2k, \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}})$ の元を定める。$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ とし $\Gamma_\infty := \Gamma \cap B(\mathbb{Q}) = \{\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とおく。すると E_{2k} はウェイト $2k$ の**正則 *Eisenstein* 級数**

$$G_{2k}(z) = \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \smallsetminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(cz+d)^{2k}} = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} j(\gamma, z)^{2k} \in M_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$$

の命題 1.4 による $G(\mathbb{A})$ への持ち上げにほかならない。実際、$g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の岩澤分解 (1.4) を使えば

$$f_{2k}(g) = y^k e^{2ki\theta} = j\left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}, i \right)^{2k} j\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, i \right)^{2k} = j(g,i)^{2k}$$

である。また自然な埋め込み $\Gamma \hookrightarrow G(\mathbb{Q})$ は全単射 $\Gamma_\infty \backslash \Gamma \xrightarrow{\sim} B(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})$ を与える[2]。よって $G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times g \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}}, (g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ で

$$\phi_{G_{2k}}(g) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} j(\gamma, g.i)^{2k} j(g,i)^{2k} = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} j(\gamma g.i)^{2k} = E_{2k}(g)$$

となる。

---

[2]問題の写像が定義可能かつ単射なことは直ちにわかる。それが全射なこと、つまり $B(\mathbb{Q})\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = G(\mathbb{Q})$ を見ればよい。勝手な $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\mathbb{Q})$ を取る。左から適当な対角行列をかけて c, d が互いに素な整数だとしてよい。よって $md - nc = 1$ となる $m, n \in \mathbb{Z}$ がある。$(m,n), (c,d)$ は線型独立だから $(a,b) = x(m,n) + y(c,d)$ となる $x, y \in \mathbb{Q}$ が取れる。このとき

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Fourier 係数とカスプ形式　前の例に引き続き k は正の偶数とする。$\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ のカスプ c はある $\gamma_c \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ を使って $c = \gamma_c.\infty$ と書ける。その Γ での固定化群は $\{\pm 1\}$ を法として

$$\Gamma_c = \gamma_c \left\{ \begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, n \in \mathbb{Z} \right\} \gamma_c^{-1}, \quad h \in \mathbb{Q}^\times \tag{1.6}$$

の形である。このとき $f \in M_k(\Gamma)$ は c での *Fourier* **展開**

$$f(\gamma_c.z)j(\gamma_c, z)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f, c)e^{2\pi i n z/h} \tag{1.7}$$

を持つ。この Fourier 係数をアデール群の言葉で記述しよう。

　コンパクト群 $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ の任意の指標は

$$\psi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{Z}})/\mathbb{Z} \ni (x_\infty, x_{\mathrm{fin}}) + \mathbb{Z} \longmapsto \exp(2\pi i x_\infty) \in \mathbb{C}^1$$

を使って $\psi^\xi(x) := \psi(\xi x)$, $(\exists \xi \in \mathbb{Q})$ と一意に書ける。これは $U(\mathbb{Q})$ 上で 1 である $U(\mathbb{A})$ の指標

$$\psi_U^\xi : U(\mathbb{A}) \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi^\xi(b) \in \mathbb{C}^1$$

を与える。さて、(1.1) を使って命題 1.1 のように議論すれば、(1.6) の $h \in \mathbb{Q}^\times$ は解析同相

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/h\mathbb{Z} \ni b \longmapsto U(\mathbb{Q}) \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\gamma_c^{-1} K \gamma_c \cap U(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})) \\ \in U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})/(\gamma_c^{-1} K \gamma_c \cap U(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})) \end{aligned}$$

で特徴づけられる。このとき $z = x + iy = g.i$ となる $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ を取り、$z + b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).z$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} a_n(f, c) &= \frac{e^{2\pi n y/h}}{h} \int_0^h f(\gamma_c.(z+b))j(\gamma_c, z+b)^k e^{-2\pi i n b/h}\, dx \\ &= \frac{e^{2\pi n y/h}}{h} \int_{\mathbb{R}/h\mathbb{Z}} \phi_f\left(\gamma_c \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) j\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g, i\right)^{-k} \overline{\psi^{n/h}(b)}\, db \\ &= e^{2\pi n y/h} j(g, i)^{-k} \int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})/(\gamma_c^{-1} K \gamma_c \cap U(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}))} \phi_f(\gamma_c u g)\overline{\psi_U^{n/h}(u)}\, du \\ &= e^{2\pi n y/h} j(g, i)^{-k} \int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} \phi_f(\gamma_c u g)\overline{\psi_U^{n/h}(u)}\, du \\ &= e^{2\pi n y/h} j(g, i)^{-k} \int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} \phi_f(u g)\overline{\psi_U^{n/h}(u)}\, du \end{aligned} \tag{1.8}$$

である。ただし du は $U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A}) \simeq \mathbb{A}/\mathbb{Q}$ 上の全測度が 1 となる不変測度である。そこで $\phi \in \mathcal{A}(G; k, K)$ で

$$\phi_B(g) := \int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{Q})} \phi(ug)\, du = 0, \quad \forall g \in G(\mathbb{A}) \tag{1.9}$$

を満たすものを**カスプ形式**と呼ぶことは自然である。実際、その空間を $\mathcal{A}_0(G;k,K)$ と書くと次が成り立つ。

命題 1.6. 命題 1.4 の写像は Γ に対するウェイト k の正則カスプ形式の空間 $S_k(\Gamma)$ から $\mathcal{A}_0(G;k,K)$ への線型同型である。

これは 1.6 で触れるスペクトル解析を用いて証明される。詳しくは [Gel75] を見よ。

1.4 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式

以上の観察を受けて GL_2 のアデール群上の保型形式を定義しよう。

F を任意の代数体とし、その**アデール環**を $\mathbb{A}=\mathbb{A}_F$ と書く。(大域体のアデール環、イデール群の構造に慣れていない読者は [Wei95, III, IV 章] を参照するか、これまで通り $F=\mathbb{Q}$ として読み進まれればよい。) 同様に**イデール群**を $\mathbb{A}^\times=\mathbb{A}_F^\times$ とし、**イデールノルム** $|\ |_{\mathbb{A}}\colon \mathbb{A}^\times\to\mathbb{R}_+^\times$ の核を $\mathbb{A}^1$ と書く。$\mathbb{R}_+^\times$ を埋め込み

$$\mathbb{R}_+^\times \ni a \longmapsto (\overbrace{a,\dots,a}^{\text{無限素点}};\overbrace{1,1\dots}^{\text{有限素点}})\in\mathbb{A}^\times$$

の像と同一視すれば、$\mathbb{A}^\times=\mathbb{A}^1\times\mathbb{R}_+^\times$ で ***Artin* の積公式** $F^\times\subset\mathbb{A}^1$ が成り立つ。F の各**素点** v での完備化を F_v, その**モジュラス**を $|\ |_v$ で表す。特に v が非アルキメデス的な場合には、$\mathcal{O}_v\supset\mathfrak{p}_v$ を F_v の唯一の極大コンパクト部分環 (整数環) およびその唯一の極大イデアルとする。 F のアルキメデス素点での完備化の直和を $F_\infty:=\prod_{v|\infty}F_v$ と書く。

有理数体上の場合と同様に $G=\mathrm{GL}_2$ と書き、$B=TU\subset G$ をその上三角 Borel 部分群とする。アデール群 $G(\mathbb{A})$ の構造をざっと思い出そう。上の通り $\mathbb{R}_+^\times$ を $Z(F_\infty)\simeq F_\infty^\times$ の部分群と見たものをやはり $\mathbb{R}_+^\times$ と書く。F の各素点 v で

$$\boldsymbol{K}_v:=\begin{cases}\mathrm{O}_2(\mathbb{R})=\{g\in G(F_v)\mid g\,{}^tg=\mathbf{1}_2\} & v\text{ が実のとき}\\ \mathrm{U}_2(\mathbb{R})=\{g\in G(F_v)\mid g\,{}^t\bar{g}=\mathbf{1}_2\} & v\text{ が複素のとき}\\ \{g\in G(F_v)\cap\mathbb{M}_2(\mathcal{O}_v)\mid \det g\in\mathcal{O}_v^\times\} & v\text{ が非アルキメデスのとき}\end{cases}$$

とおけば、定義から

$$G(\mathbb{A})=\varinjlim_S G(\mathbb{A}(S)),\quad G(\mathbb{A}(S)):=\prod_{v\in S}G(F_v)\times\prod_{v\notin S}\boldsymbol{K}_v$$

である。ここで S は全てのアルキメデス素点を含む F の素点の有限集合を走り、右辺は局所コンパクト群 $G(\mathbb{A}(S))$ の位相的帰納極限を表す。また $\boldsymbol{K}:=\prod_v\boldsymbol{K}_v$ は $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群である。

$$T(\mathbb{A})^1:=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}\,\middle|\, a,\,d\in\mathbb{A}^1\right\},\quad \mathfrak{A}:=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}\,\middle|\, a,\,d\in\mathbb{R}_+^\times\right\}$$

とおけば**岩澤分解**

$$G(\mathbb{A}) = U(\mathbb{A})\mathfrak{A}T(\mathbb{A})^1\boldsymbol{K} \tag{1.10}$$

が成り立つ。これを用いて商空間 $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の構造が記述できる。

$\mathbb{A} = F + C_1, \mathbb{A}^1 = F^\times C_2$ となるコンパクト部分集合 $C_1 \subset \mathbb{A}, C_2 \subset \mathbb{A}^1$ を取って、

$$\Omega_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, b \in C_1 \right\}, \quad \Omega_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, d \in C_2 \right\}$$

および $\Omega := \Omega_1\Omega_2$ とおく。また $t > 0$ に対して

$$\mathfrak{A}(t) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{A} \, \middle| \, \frac{a}{d} > t \right\}$$

と書く。

事実 1.7 ([JL70], 補題 10.1)**.** $t_0 > 0$ を十分小さく取れば、*Siegel* **領域** $\mathfrak{S}(t_0) := \Omega\mathfrak{A}(t_0)\boldsymbol{K}$ は $G(\mathbb{A}) = G(F)\mathfrak{S}(t_0)$ を満たす。

すなわち $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ は岩澤分解の $\mathfrak{A}$ 成分方向だけが非コンパクトである。

実 Lie 群 $G(F_\infty)$ の Lie 環の複素化を $\mathfrak{g}_\infty$, その**普遍包絡環**[3] $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ の中心を $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$ と書く。例えば $F = \mathbb{Q}$ ならば、$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$ は 1.3 節の Δ と $\mathfrak{g}_\infty = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ の中心で生成される。$G(F_\infty)$ の Lie 環の元 X は $\phi \in C^\infty(G(F_\infty))$ に

$$R(X)\phi(g) := \frac{d}{dt}\phi(g\exp(tX))\Big|_{t=0}$$

と作用している。それを $\mathfrak{g}_\infty$ の $\mathbb{C}$ 線型作用に延ばし、さらに $\mathbb{C}$ 代数 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ の作用に延長したものをやはり R と書く。

$G(\mathbb{A})$ 上の**高さ函数**を

$$\|g\| := \prod_v \|g_v\|_v,$$

$$\|g\|_v := \max(|g_{i,j}|_v, |g_{i,j}/\det g|_v), \quad g \in G(F_v)$$

により定める。$\boldsymbol{K}_v \ni k$ に対しては $\|k\|_v = 1$ だから右辺の Euler 積は実際には有限積である。

定義 1.8. $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が**保型形式** (*automorphic form*) とは、条件

(i) $\phi(\gamma a g) = \phi(g), (\gamma \in G(F), a \in \mathbb{R}_+^\times, g \in G(\mathbb{A}))$;

(ii) ϕ は $G(F_\infty)$ 成分について滑らかで、右 $\boldsymbol{K}$ 有限:

$$\dim \operatorname{span}\{R(k)\phi(\cdot) := \phi(\cdot k) \,|\, k \in \boldsymbol{K}\} < +\infty.$$

[3] $\mathfrak{g}_\infty$ のテンソル代数 $T(\mathfrak{g}_\infty) = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathfrak{g}_\infty^{\otimes n}$ を $\{X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \,|\, X, Y \in \mathfrak{g}_\infty\}$ の生成する両側イデアルで割って得られる環のこと。

(iii) ϕ は $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$ 有限: $\dim \operatorname{span}\{R(X)\phi \mid X \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)\} < +\infty$.

(iv) ϕ は $G(\mathbb{A})$ 上で**緩増加**: $c, r > 0$ があって $|\phi(g)| < c\|g\|^r$, $(g \in G(\mathbb{A}))$.

が成り立つこととする。$G(\mathbb{A})$ 上の保型形式の空間を $\mathcal{A}(G)$ と書く。さらに $\phi \in \mathcal{A}(G)$ が**カスプ形式** (*cusp form*) とは、

(v) ϕ の B に沿っての**定数項**:

$$\phi_B(g) := \int_{F\backslash\mathbb{A}} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dx$$

が消えている。

を満たすこととする。$G(\mathbb{A})$ 上のカスプ形式の空間を $\mathcal{A}_0(G) \subset \mathcal{A}(G)$ と書く。

注意 1.9. 上の定義の緩増加性は次のように強められる。定義 1.8 の (ii) を満たす函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ の**一様緩増加**とは、ある $r > 0$ に対して次が成り立つこととする: 任意の $X \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ に対して $c_X > 0$ があって

$$|R(X)\phi(g)| \leq c_X \|g\|^r, \quad g \in G(\mathbb{A}).$$

コンパクトな台を持つ函数 $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ であって、$G(F_\infty)$ 成分について滑らかで $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 成分について局所定数なものたちのなす空間を $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ で表す。$G(\mathbb{A})$ 上の不変測度 dx を取れば、緩増加な $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ と $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ に対して

$$R(f)\phi(g) := \int_{G(\mathbb{A})} f(x)\phi(gx)\, dx$$

は一様緩増加になることが知られている [MW94, 補題 I.2.5]。一方 [HC66, 定理 1] ([Bum97, 2.9]) から $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$ 有限かつ $\boldsymbol{K}$ 有限な ϕ に対しては、$R(f)\phi = \phi$ となる両側 $\boldsymbol{K}$ 有限な $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ がある。これらから**任意の** $\phi \in \mathcal{A}(G)$ **は一様緩増加**であることがわかる。

1.5 Fourier 展開

非自明な指標 $\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}$ (例えば 1.3 節の ψ と $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} : \mathbb{A}/F \to \mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ の合成など) を取る。$\mathbb{A}/F$ の任意の指標は $\psi^\xi(x) := \psi(\xi x)$, $(\xi \in F)$ とただ一通りにかける。また ψ は $U(F)\backslash U(\mathbb{A})$ の指標

$$\psi_U : U(F)\backslash U(\mathbb{A}) \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi(b) \in \mathbb{C}^1$$

を与える。$\phi \in \mathcal{A}(G)$ の *ψ_U-Whittaker* **函数**または *ψ-Fourier* **係数**を

$$W_\psi(\phi; g) := \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug)\overline{\psi_U(u)}\, du = \int_{\mathbb{A}/F} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\overline{\psi(x)}\, dx, \quad g \in G(\mathbb{A})$$

と定める。定義から $\xi \in F^\times$ に対して

$$W_\psi\Big(\phi; \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big) = \int_{\mathbb{A}/F} \phi\Big(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big)\overline{\psi(x)}\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{A}/F} \phi\Big(\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \xi^{-1}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big)\overline{\psi(x)}\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{A}/F} \phi\Big(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big)\overline{\psi(\xi x)}\,dx = W_{\psi^\xi}(\phi; g)$$

である。特に $U(F)\backslash U(\mathbb{A}) \ni u \mapsto \phi(ug) \in \mathbb{C}$ の Fourier 展開を取ることで、展開

$$\phi(g) = \phi_B(g) + \sum_{\xi \in F^\times} W_{\psi^\xi}(\phi; g) = \phi_B(g) + \sum_{\xi \in F^\times} W_\psi\Big(\phi; \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big) \tag{1.11}$$

が成り立つ。これが Fourier 展開 (1.7) のアデール群上の保型形式への拡張である。

函数 $\phi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が**急減少** (*rapidly decreasing*) とは、任意の $R \in \mathbb{R}$ に対して $c > 0$ があって

$$|\phi(g)| \le c\delta_B(g)^R, \quad \forall g \in \mathfrak{S}(t_0),\ \det g \in \mathbb{A}^1$$

が成り立つこととする。ただし

$$\delta_B : G(\mathbb{A}) \ni ut\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}k \longmapsto \frac{a}{d} \in \mathbb{R}_+^\times,$$
$$\Big(u \in U(\mathbb{A}),\ t \in T(\mathbb{A})^1,\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}(t_0),\ k \in \boldsymbol{K}\Big)$$

と書いている。古典的なカスプ形式が急減少であることはよく知られている。証明はずいぶん難しくなるが、この性質を $\mathcal{A}_0(G)$ に拡張できる。

命題 1.10. $\mathcal{A}(G) \ni \phi$ に対して、$\phi - \phi_B$ は急減少である。特に $G(\mathbb{A})$ 上のカスプ形式は急減少である。

証明. まず $\mathbb{A}/F$ 上の Fourier 展開

$$(\phi - \phi_B)(g) = \sum_{\xi \in F^\times} W_\psi\Big(\phi; \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big), \quad g \in \mathfrak{S}(t_0)$$

を (1.7) の $\mathbb{R}/h\mathbb{Z}$ 上の展開のような形に戻す。定義 1.8 (ii) から ϕ はある開コンパクト部分群 $K \subset G(\mathbb{A}_{\rm fin})$ で右不変である。$\mathfrak{S}(t_0)$ の定義中の Ω に対して $\Omega\boldsymbol{K} \subset G(F_\infty) \times C_{\rm fin}$ となるコンパクト部分集合 $C_{\rm fin} \subset G(\mathbb{A}_{\rm fin})$ とその有限被覆 $C_{\rm fin} \subset \coprod_{i=1}^r g_iK$, $(g_i \in G(\mathbb{A}_{\rm fin}))$ を取る。これを使って $U(\mathbb{A}_{\rm fin})$ の開コンパクト部分群

$$N := \bigcap_{i=1}^r g_iKg_i^{-1} \cap U(\mathbb{A}_{\rm fin})$$

を取る。このとき $g = bak \in \mathfrak{S}(t_0)$, $(b \in \Omega,\ a \in \mathfrak{A}(t_0),\ k \in \boldsymbol{K})$, $u \in U(\mathbb{A})$, $n \in N$ に対して、bk の $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 成分を $(bk)_{\mathrm{fin}} = g_i k_1$, $(1 \leq i \leq r,\ k_1 \in K)$ と書けば

$$
\begin{aligned}
\phi(ung) =& \phi(unbak) = \phi(ubak \cdot k^{-1}b^{-1}nbk) = \phi(ug(bk)^{-1}nbk) \\
=& \phi(ugk_1^{-1}g_i^{-1}ng_ik_1) = \phi(ugk_1^{-1}Kk_1) = \phi(ugK) \\
=& \phi(ug)
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

が成り立つ。さて N はある開コンパクト部分群 $\bar{\mathfrak{N}} \subset \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ を使って

$$
N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \bar{\mathfrak{N}} \right\}
\tag{1.13}
$$

と書ける。$\mathfrak{N} := \bar{\mathfrak{N}} \cap F$ は F_∞ 内の $\mathbb{Z}$ 格子である。同様に $\bar{\mathfrak{N}}$ の ψ 双対 $\bar{\mathfrak{N}}^*_\psi := \{x \in \mathbb{A}_{\mathrm{fin}} \,|\, \psi(xb) = 1, \forall b \in \bar{\mathfrak{N}}\} \subset \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ は再び開コンパクト部分群で、$\mathfrak{N}^*_\psi := \bar{\mathfrak{N}}^*_\psi \cap F$ は F_∞ 内の $\mathbb{Z}$ 格子である。(1.12) から

$$
W_\psi\Big(\phi; \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big) = \int_{\mathbb{A}/F} \phi\Big(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big)\overline{\psi(\xi b)}\, db
$$

は $\psi(\xi\cdot)$ が $\bar{\mathfrak{N}}$ 上自明、つまり $\xi \in \mathfrak{N}^*_\psi$ のとき以外は消えている。よって $\phi - \phi_B$ の Fourier 展開は

$$
(\phi - \phi_B)(g) = \sum_{\xi \in \mathfrak{N}^*_\psi \smallsetminus \{0\}} W_\psi\Big(\phi; \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big), \quad g \in \mathfrak{S}(t_0)
\tag{1.14}
$$

となる。

これをさらに具体的に書いてみよう。F_∞ の $\mathbb{R}$ 基底 $\{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$ で $\mathfrak{N} = \bigoplus_{j=1}^d \mathbb{Z}\xi_j$ となるものを取れば、$\mathfrak{N}^*_\psi$ の定義から F_∞ の $\mathbb{R}$ 基底 $\{\xi_1^*, \ldots, \xi_d^*\}$ で

- $\mathfrak{N}^*_\psi = \bigoplus_{j=1}^d \mathbb{Z}\xi_j^*$ かつ
- $\psi\big((\sum_{j=1}^d x_j^*\xi_j^*)(\sum_{j=1}^d x_j\xi_j)\big) = \exp\big(2\pi i \sum_{j=1}^d x_j^* x_j\big)$, $(x_j^*, x_j \in \mathbb{R})$

となるものがある。そこで $X_j := \left(\begin{smallmatrix} 0 & \xi_j \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}_\infty$ とおく。各 $\xi \neq 0, \in \mathfrak{N}^*_\psi$ は $\xi = \sum_{j=1}^d n_j\xi_j^*$, $(\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d \smallsetminus \{0\})$ と書け、$F\backslash\mathbb{A}/\bar{\mathfrak{N}} \cong F_\infty/\mathfrak{N}$ であるから、(1.14) は

$$
(\phi - \phi_B)(g) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^d \smallsetminus \{0\}} W_{\underline{n}}(\phi; g)
\tag{1.15}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
W_{\underline{n}}(\phi; g) &= \int_{F_\infty/\mathfrak{N}} \phi\Big(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big)\psi\Big(-x \cdot \sum_{j=1}^d n_j\xi_j^*\Big)\, dx \\
&= \int \cdots \int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d} \phi\Big(\begin{pmatrix} 1 & \sum_{j=1}^d \xi_j x_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big) e^{-2\pi i \sum_{j=1}^d n_j x_j}\, dx_1 \ldots dx_d \\
&= \int \cdots \int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d} \phi\Big(\prod_{j=1}^d \exp(x_j X_j) \cdot g\Big) e^{-2\pi i \sum_{j=1}^d n_j x_j}\, dx_1 \ldots dx_d
\end{aligned}
$$

となる。空でない部分集合 $S \subset \{1,\dots,d\}$ に対して、$j \in S$ では $n_j \neq 0, j \notin S$ では $n_j = 0$ である $\underline{n} = (n_1,\dots,n_d) \in \mathbb{Z}^d$ の集合を $\mathbb{Z}_S^*$ と書く。(1.15) は

$$(\phi - \phi_B)(g) = \sum_{S \neq \varnothing, \subset \{1,\dots,d\}} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}_S^*} W_{\underline{n}}(\phi; g)$$

となるから、右辺の $\underline{n} \in \mathbb{Z}_S^*$ についての級数が急減少であることを示せばよい。必要なら $\{\xi_1,\dots,\xi_d\}$ を並べ替えて $S = \{1,\dots,r\}$, $(1 \le r \le d)$ であるとしてよい。

まず $\mathrm{Ad}(\mathfrak{A}(t_0))^{-1}\Omega = \bigcup_{a \in \mathfrak{A}(t_0)} \mathrm{Ad}(a)^{-1}\Omega_1 \cdot \Omega_2$ はコンパクトであることに注意する。よって $\Omega' := \mathrm{Ad}(\mathfrak{A}(t_0))^{-1}\Omega\boldsymbol{K}$ もコンパクトである。$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\infty)$ での m 次以下のテンソルの空間 $\bigoplus_{j=0}^m T^j(\mathfrak{g}_\infty) = \bigoplus_{j=0}^m \mathfrak{g}_\infty^{\otimes j}$ の像 $\mathfrak{U}^m(\mathfrak{g}_\infty)$ は有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間である。よって $\mathrm{Ad}(k)X_j$, $(k \in \Omega', 1 \le j \le d)$ たちの m 個以下のテンソル積の集合は $\mathfrak{U}^m(\mathfrak{g}_\infty)$ のあるコンパクト集合に含まれる。このこと ϕ の微分は一様に緩増加であったこと (注意 1.9) から、ある $N > 0$ があって次が成り立つ。

$$\begin{gathered}\text{任意の } m \in \mathbb{N} \text{ に対して } c_m > 0 \text{ があって} \\ |R(\mathrm{Ad}(k_1)^{-1}X_{j_1} \cdots \mathrm{Ad}(k_\ell)^{-1}X_{j_\ell})\phi(g)| \le c_m \|g\|^N, \\ \forall k_i \in \Omega',\ 1 \le j_i \le d,\ \ell \le m,\ g \in G(\mathbb{A}).\end{gathered} \tag{$\dagger$}$$

さて $\det g \in \mathbb{A}^1$ を満たす $g \in \mathfrak{S}(t_0)$ を

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} k, \quad a > \sqrt{t}, \in \mathbb{R},\ k \in \Omega'$$

と書く。Ω' のコンパクト性から g によらない $c > 0$ があって

$$\|g\| \le ca \tag{$\ddagger$}$$

である。$\ell \in S$ に対しては部分積分により

$$\begin{aligned} W_{\underline{n}}(\phi; g) &= \int \cdots \int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d} \phi\Big(g \prod_{j=1}^d \exp(a^{-2}x_j \mathrm{Ad}(k)^{-1}X_j)\Big) e^{-2\pi i \sum_{j=1}^d n_j x_j}\, dx_1 \dots dx_d \\ &= \int \cdots \int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{d-1}} \Bigg(\Bigg[\phi\Big(g \prod_{j=1}^d \exp(a^{-2}x_j \mathrm{Ad}(k)^{-1}X_j)\Big) \frac{e^{-2\pi i \sum_{j=1}^d n_j x_j}}{-2\pi i n_\ell} \Bigg]_0^1 \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i n_\ell a^2} \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} R(\mathrm{Ad}(k)^{-1}X_\ell)\phi\Big(g \prod_{j=1}^d \exp(a^{-2}x_j \mathrm{Ad}(k)^{-1}X_j)\Big) \\ &\qquad \times e^{-2\pi i \sum_{j=1}^d n_j x_j}\, dx_\ell \Bigg) dx_1.\overset{\ell}{\vee}.dx_d \\ &= \frac{1}{2\pi i n_\ell a^2} \int \cdots \int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d} R(\mathrm{Ad}(k)^{-1}X_\ell)\phi\Big(\prod_{j=1}^d \exp(x_j X_j) \cdot g\Big) \end{aligned}$$

$$\times\, e^{-2\pi i \sum_{j=1}^{d} n_j x_j}\, dx_1 \dots dx_d$$

$$= \frac{1}{2\pi i n_\ell a^2} W_{\underline{n}}(R(\mathrm{Ad}(k)^{-1} X_\ell)\phi; g)$$

が成り立つ。$X_S := \sum_{j\in S} X_j$ とおき、上の操作を繰り返すことで

$$W_{\underline{n}}(\phi; g) = \frac{1}{(n_1 \cdots n_r)^m (2\pi i a^2)^{rm}} W_{\underline{n}}(R(\mathrm{Ad}(k)^{-1} X_S^{\otimes m})\phi; g)$$

を得る。任意の $R \in \mathbb{R}$ に対して $m > (2r)^{-1}(N - 2R)$ となる $m \in \mathbb{N}$ を取れば、上式と (†), (‡) から

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}_S^*} W_{\underline{n}}(\phi; g)\Big| &\le \sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}_S^*} \frac{1}{(n_1 \cdots n_r)^m (2\pi a^2)^{rm}} |W_{\underline{n}}(R(\mathrm{Ad}(k)^{-1} X_S^{\otimes m})\phi; g)| \\ &\le \sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}_S^*} \frac{c_m r^m \|g\|^N}{(n_1 \cdots n_r)^m (2\pi a^2)^{rm}} \le \frac{c_m r^m c^N}{(2\pi)^{rm}} \Big(\sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}_S^*} \frac{1}{(n_1 \cdots n_r)^m}\Big) a^{N-2rm} \\ &\le \frac{c_m r^m c^N}{(2\pi)^{rm}} \Big(\sum_{\underline{n}\in\mathbb{Z}_S^*} \frac{1}{(n_1 \cdots n_r)^m}\Big) \delta_B(g)^R\end{aligned}$$

となって左辺が急減少であることがわかる。 □

1.6 Petersson 内積と $\mathcal{L}(G)$

$G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$ 上の不変測度 dg を止める。$U(\mathbb{A})$, $T(\mathbb{A})^1$, $\boldsymbol{K}$ 上の不変測度 du, dt, dk を適当に選べば岩澤分解 (1.10) の積分公式

$$\int_{G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times} \phi(g)\, dg = \int_{\boldsymbol{K}} \int_{T(\mathbb{A})^1} \int_{\mathbb{R}_+^\times} \int_{U(\mathbb{A})} \phi\Big(u \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} tk\Big)\, du\, |a|_{\mathbb{A}}^{-1}\, da^\times\, dt\, dk \tag{1.16}$$

が成り立つ。ただし da を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度として $da^\times = da/a$ と書いている。これと事実 1.7 から $\phi \in \mathcal{A}(G)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{G(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})} |\phi(g)|^2\, dg &\le \int_{\mathfrak{S}(t_0)\mathbb{R}_+^\times/\mathbb{R}_+^\times} |\phi(g)|^2\, dg \\ &\le \int_{\boldsymbol{K}} \int_{\Omega_2} \int_{\mathbb{R}_{>t}} \int_{\Omega_1} \Big|\phi\Big(u \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} tk\Big)\Big|^2 du\, |a|_{\mathbb{A}}^{-1}\, da^\times\, dt\, dk\end{aligned} \tag{1.17}$$

である。これから直ちに次がわかる。

補題 1.11. (i) $G(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})$ はコンパクトではないが測度有限である。
(ii) 急減少な保型形式は $G(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})$ 上で二乗可積分である。

定義 1.12. $G(\mathbb{A})$ 上の可測函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ で

(i) $\phi(\gamma a g) = \phi(g)$, $(\forall \gamma \in G(F), a \in \mathbb{R}_+^\times, g \in G(\mathbb{A}))$;

(ii) ϕ は $G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})$ 上で二乗可積分。

を満たすものの空間を $\mathcal{L}(G)$ と書く。$\mathcal{L}(G)$ 上の L^2 内積

$$(\phi, \phi') := \int_{G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})} \phi(g)\overline{\phi'(g)}\, dg$$

を *Petersson* **内積**という。$\phi \in \mathcal{L}(G)$ で

(iii) ϕ の定数項 ϕ_B (定義 1.8 (v) 参照) は $G(\mathbb{A})$ 上ほとんど至るところで消えている。

を満たすものたちのなす閉部分空間を $\mathcal{L}_0(G)$ と書く。

上の議論と命題 1.10 から $\mathcal{A}_0(G) \subset \mathcal{L}_0(G)$ であるが、$\mathcal{A}(G)$ と $\mathcal{L}(G)$ の間には特に包含関係はない。しかし $\mathcal{L}(G)$ には $G(\mathbb{A})$ の右移動作用

$$R(g)\phi(x) = \phi(xg), \quad g \in G(\mathbb{A}),\ \phi \in \mathcal{L}(G)$$

で閉じているという利点がある。Petersson 内積はこの作用で不変だから $(R, \mathcal{L}(G))$ は $G(\mathbb{A})$ の**ユニタリ表現**[4]になっている。$\mathcal{L}_0(G)$ は $G(\mathbb{A})$ 作用 R で不変だから、$(R, \mathcal{L}_0(G))$ は $(R, \mathcal{L}(G))$ の部分ユニタリ表現である。$G(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合を $\Pi(G(\mathbb{A})^1)$[5]と書く。Hilbert 空間 H が可算個の閉部分空間 H_n, $(n \in \mathbb{N})$ の *Hilbert* **直和**とは

- 任意の $\phi \in H$ に対して $\{\phi_n \in H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ があって、級数 $\sum_{n=0}^\infty \phi_n$ は ϕ に絶対収束する。
- $H_n \cap H_m = \{0\}$, $(n \neq m \in \mathbb{N})$.

となることであった。

定理 1.13 (Piatetsky-Shapiro)**.** $(R, \mathcal{L}_0(G))$ は可算個の既約ユニタリ部分表現の Hilbert 直和に分解する。各 $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ の $\mathcal{L}^0(G)$ での重複度は有限である:

$$(R, \mathcal{L}_0(G)) \simeq \widehat{\bigoplus_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)}} \pi^{\oplus m(\pi)}, \quad m(\pi) \in \mathbb{N}.$$

[4] G を位相群とする。Hilbert 空間 H と $g \in G$ に対する H 上のユニタリ作用素の族 $\{\pi(g)\}_{g\in G}$ で

- $\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1) \circ \pi(g_2)$, $(g_1, g_2 \in G)$;
- $G \times H \ni (g, \phi) \mapsto \pi(g)\phi \in H$ は連続。

を満たすものを G の**ユニタリ表現**という。

[5] $G(\mathbb{A})^1 := \{g \in G(\mathbb{A}) \,|\, |\det g|_{\mathbb{A}} = 1\}$ とおけば、直積分解 $G(\mathbb{A}) = \mathbb{R}_+^\times \times G(\mathbb{A})^1$ が成り立つのでこう書いている。

証明. これは次の事実から従う。

主張 1.13.1 ([Lan76] 補題 3.2)**.** 局所コンパクト群 G のユニタリ表現 $(\rho, \mathcal{L})$ が次を満たすとする。「$1 \in G$ の任意の近傍 V に対して、可積分関数 $f : G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で

(a) $\operatorname{supp} f \subset V$;

(b) $f^\vee(g) := f(g^{-1}) = f(g), (g \in G)$ かつ $\displaystyle\int_G f(g)\, dg = 1$;

(c) $\rho(f) : \mathcal{L} \ni \xi \mapsto \displaystyle\int_G f(g)\rho(g)\xi\, dg \in \mathcal{L}$ は $\mathcal{L}$ 上の**コンパクト作用素**[6]。

を満たすものがある。」このとき $(\rho, \mathcal{L})$ は可算個の既約ユニタリ部分表現の Hilbert 直和に分解し、各 $\pi \in \Pi(G)$ の ρ での重複度は有限である。

$G(\mathbb{A})$ の 1 の近傍 V に対して、事実の条件 (a), (b) を満たす $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ が取れることは明らかだから、定理は次の主張から従う。

主張 1.13.2. $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ に対して作用素

$$R(f)\phi(x) := \int_{G(\mathbb{A})} f(g)\phi(xg)\, dg$$

の $\mathcal{L}_0(G)$ への制限はコンパクト作用素である。

一般に測度付き空間 (X, μ) で $\mu(X)$ が有限なものに対して Hilbert 空間 $L^2(X) = L^2(X, \mu)$ を考える。$K \in L^2(X \times X)$ に対して積分作用素

$$L^2(X) \ni \phi(x) \longmapsto \int_X K(x, y)\phi(y)\, d\mu(y) \in L^2(X)$$

が定まる。こうして得られる線型作用素を *Hilbert-Schmidt* **作用素**という。Hilbert-Schmidt 作用素はコンパクトであることが知られている [黒田 80, 例題 11.37]。よって主張 1.13.2 の形の作用素が Hilbert-Schmidt 型であることを示せばよい。

そこでまず

$$\begin{aligned} R(f)\phi(x) &= \int_{G(\mathbb{A})} f(x^{-1}y)\phi(y)\, dy = \int_{U(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \int_{U(\mathbb{A})} f(x^{-1}uy)\phi(uy)\, du\, dy \\ &= \int_{U(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \sum_{\nu \in U(F)} f(x^{-1}\nu uy)\phi(uy)\, du\, dy \end{aligned} \tag{1.18}$$

と積分を分ける。$\phi \in \mathcal{L}_0(G)$ に対しては

$$\begin{aligned} &\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \sum_{\nu \in U(F)} f(x^{-1}\nu u'uy)\, du'\, \phi(uy)\, du \\ &\qquad = \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \sum_{\nu \in U(F)} f(x^{-1}\nu u'y)\, du' \cdot \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \phi(uy)\, du = 0 \end{aligned}$$

[6]Hilbert 空間 H 上の有界作用素 T が**コンパクト**とは、任意の有界列 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ に対して $\{T\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束部分列を持つことだった。

だから、(1.18) の右辺の内側の積分からこれを差し引いて

$$\begin{aligned}R(f)\phi(x) &= \int_{U(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \\ &\qquad \sum_{\nu\in U(F)}\left(f(x^{-1}\nu uy) - \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} f(x^{-1}\nu u'uy)\,du'\right)\phi(uy)\,du\,dy \\ &= \int_{U(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} k_B(x,uy)\phi(uy)\,du\,dy\end{aligned} \tag{1.19}$$

を得る。ただし

$$k_B(x,y) := \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})}\sum_{\nu\in U(F)}(f(x^{-1}\nu y) - f(x^{-1}\nu u'y))\,du' \tag{1.20}$$

とした。主張 1.13.2 の証明には次の主張が必要である。

主張 1.13.3. $k_B(x,y)$ は $\mathfrak{S}(t_0)\times G(\mathbb{A})$ 上で有界である。

証明. 命題 1.10 の証明と同様に $x = ak_1 \in \mathfrak{S}(t_0)$, $(a\in\mathfrak{A}(t_0), k_1\in\Omega'$ と書く。$k_B(x,\nu y) = k_B(x,y)$, $(\nu\in U(F))$ であるから、$y = utk$, $(u\in\Omega_1, t\in T(\mathbb{A}), k\in\boldsymbol{K})$ であるとしてよい。
まず (1.20) の被積分函数の和

$$\sum_{\nu\in U(F)}\left(f(k_1^{-1}a^{-1}\nu utk) - f(k_1^{-1}a^{-1}\nu u'utk)\right). \tag{1.21}$$

の 0 でない項の数を評価する。$\nu\in U(F)$ の項が消えないためには

$$a^{-1}\nu ut \in (\Omega'\cdot\operatorname{supp} f\cdot\boldsymbol{K})\cap B(\mathbb{A}),\quad a^{-1}\nu u'ut \in (\Omega'\cdot\operatorname{supp} f\cdot\boldsymbol{K})\cap B(\mathbb{A}) \tag{1.22}$$

のいずれかが必要である。従って Levi 分解 $B(\mathbb{A}) = U(\mathbb{A})\rtimes T(\mathbb{A})$ の $U(\mathbb{A})$ 成分 $\mathrm{Ad}(a)^{-1}(\nu u)$, $\mathrm{Ad}(a)^{-1}(\nu u'u)$ も $(\Omega'\cdot\operatorname{supp} f\cdot\boldsymbol{K})\cap B(\mathbb{A})$ の $U(\mathbb{A})$ 成分 Ω'_f に属する。u に加え $u'\in U(F)\backslash U(\mathbb{A})$ も Ω_1 に属するとしてよいから、$\mathrm{Ad}(a)^{-1}u$, $\mathrm{Ad}(a)^{-1}(u'u)$ はともにコンパクト集合 $\Omega'' := \mathrm{Ad}(\mathfrak{A}(t_0))^{-1}(\Omega_1\cup\Omega_1^2)$ に属する。結局、(1.21) の $\nu\in U(F)$ の項が消えないためには、$\mathrm{Ad}(a)^{-1}\nu$ が $\Omega_f^U := \Omega'_f(\Omega'')^{-1}$ に属することが必要である。ここで

(a) $U(\mathbb{A})$ の 1 の近傍 V_1 で $V_1\cap U(F) = \{1\}$ となるもの、

(b) コンパクト部分集合 $V_2\subset U(\mathbb{A})$ で $\mathrm{Ad}(\mathfrak{A}(t_0))^{-1}V_1$ を含むもの

を取る。(b) から $\mathrm{Ad}(a)^{-1}\nu\in\Omega_f^U$ であるためには、$\mathrm{Ad}(a)^{-1}(\nu V_1)\subset\Omega_f^U V_2$ が必要である。よって (a) からそのような $\nu\in U(F)$ の個数は f のみによる $c_1 > 0$ があって

$$\begin{aligned}|\{\nu\in U(F)\,|\,\nu V_1\subset\mathrm{Ad}(a)(\Omega_f^U V_2)\}| &\le \frac{\mathrm{vol}\,(\mathrm{Ad}(a)(\Omega_f^U V_2))}{\mathrm{vol}\,V_1} \\ &= \frac{\delta_B(a)^d\mathrm{vol}\,(\Omega_f^U V_2)}{\mathrm{vol}\,V_1} \le c_1\delta_B(a)^d\end{aligned} \tag{1.23}$$

で抑えられる。

次に (1.22) の $T(\mathbb{A})$ 成分に注目すれば、

$$\text{(1.21) が消えないためには } a^{-1}t \text{ が } f \text{ のみによるコンパクト集合 } \Omega_f^T \subset T(\mathbb{A}) \text{ に属することが必要である。} \tag{1.24}$$

コンパクトな $C_{\mathrm{fin}}^B \subset B(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}), C_{\mathrm{fin}}^T \subset T(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ で $\Omega \subset B(F_\infty) \times C_{\mathrm{fin}}^B, \Omega_f^T \subset T(F_\infty) \times C_{\mathrm{fin}}^T$ となるものを取る。$f = f_\infty \otimes f_{\mathrm{fin}}, (f_\infty \in C_c^\infty(G(F_\infty)), f_{\mathrm{fin}} \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})))$ と書けるとしてよい。f_{fin} は $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ のある開コンパクト部分群で両側不変だから、

$$\mathrm{span}\,\{U(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \ni u \mapsto f_{\mathrm{fin}}(k_1^{-1}utk) \in \mathbb{C} \,|\, k_1 \in C_{\mathrm{fin}}^B,\, t \in C_{\mathrm{fin}}^T,\, k \in \boldsymbol{K}_{\mathrm{fin}}\}$$

は有限次元である。よってその任意の元が N 不変となる開コンパクト部分群 $N \subset U(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ が取れる。N をある開コンパクト部分群 $\bar{\mathfrak{N}} \subset \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ を使って命題 1.10 の証明中の (1.13) の形に書けば、$\mathfrak{N} := \bar{\mathfrak{N}} \cap F$ は F_∞ の $\mathbb{Z}$ 格子となる。

$$\mathbb{A}/F \ni x \longmapsto \sum_{\nu \in U(F)} f\left(k_1^{-1}a^{-1}\nu \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} utk\right) \in \mathbb{C}$$

は $F\backslash\mathbb{A}/\bar{\mathfrak{N}} = F^\infty/\mathfrak{N}$ 上の函数である。特に $u' \in U(F)\backslash U(\mathbb{A})/N$ はある $b \in F_\infty/\mathfrak{N}$ を使って $u' = \exp X = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), (X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}_\infty)$ と書ける。このとき微積分学の基本定理により、(1.20) の被積分函数中の和の $\nu \in U(F)$ の項は

$$\begin{aligned}
&|f(k_1^{-1}a^{-1}\nu y) - f(k_1^{-1}a^{-1}\nu u'y)| \\
&\quad= \left| f(k_1^{-1}a^{-1}\nu y \exp(\mathrm{Ad}(y)^{-1}X)) - f(k_1^{-1}a^{-1}\nu y) \right| \\
&\quad\le \int_0^1 |R(\mathrm{Ad}(y)^{-1}X) f(k_1^{-1}a^{-1}\nu y \exp(t\mathrm{Ad}(y)^{-1}X))|\, dt \\
&\quad= \int_0^1 |R(\mathrm{Ad}(y^{-1}a)\mathrm{Ad}(a)^{-1}X) f(k_1^{-1}a^{-1}\nu y \exp(t\mathrm{Ad}(y)^{-1}X))|\, dt \\
&\quad= \delta_B(a)^{-d} \int_0^1 |R(\mathrm{Ad}(y^{-1}a)X) f(k_1^{-1}a^{-1}\nu y \exp(t\mathrm{Ad}(y)^{-1}X))|\, dt \\
&\quad\le \delta_B(a)^{-d} \sup_{g \in G(\mathbb{A})} |R(\mathrm{Ad}(y^{-1}a)X) f(g)|
\end{aligned}$$

と評価される。(1.24) からこの項が消えないためには、$a^{-1}y = \mathrm{Ad}(a)^{-1}u \cdot a^{-1}tk$ がコンパクト集合 $\mathrm{Ad}(\mathfrak{A}(t_0))^{-1}\Omega_1 \cdot \Omega_f^T \boldsymbol{K}$ に属さねばならず、X は $F_\infty/\mathfrak{N}$ の基本領域から定まるコンパクト集合に属するから、f のみによる定数 $c_2 > 0$ があって、項 $f(x^{-1}\nu y) - f(x^{-1}\nu u'y)$ が消えないとき、

$$|f(x^{-1}\nu y) - f(x^{-1}\nu u'y)| \le c_2 \delta_B(a)^{-d}$$

である。これと (1.23) から (1.20) の被積分函数は有界である。$U(F)\backslash U(\mathbb{A})$ はコンパクトだから $k_B(x, y)$ 自身も $\mathfrak{S}(t_0) \times G(\mathbb{A})$ 上有界である。 □

(1.19) に戻って $x = ak_1 \in \mathfrak{S}(t_0)$, ($a \in \mathfrak{A}(t_0)$, $k_1 \in \Omega'$), $\phi \in \mathcal{L}_0(G)$ を取れば、

$$|R(f)\phi(x)| \leq \int_{U(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} |k_B(x, uy)\phi(uy)| \, du \, dy$$

(1.16) と (1.24) を使って

$$\leq \int_{\boldsymbol{K}} \int_{a\Omega_f^T} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} |k_B(x, utk)\phi(utk)| \, du \, \delta_B(t)^{-1} \, dt \, dk$$

主張 1.13.3 から f のみによる $c_3 > 0$ があって

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\boldsymbol{K}} \int_{a\Omega_f^T} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} c_3 |\phi(utk)| \, du \, \delta_B(t)^{-1} \, dt \, dk \\ &\leq c_3 \int_{\Omega_1 a \Omega_f^T \boldsymbol{K}} |\phi(y)| \, dy \end{aligned}$$

Schwartz の不等式を使って

$$\leq c_3 \left(\int_{\Omega_1 a \Omega_f^T \boldsymbol{K}} dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_1 a \Omega_f^T \boldsymbol{K}} |\phi(y)|^2 \, dy \right)^{1/2}$$

第一項を (1.16) を使って計算すれば

$$= c_3 \delta_B(a)^{-1/2} \mathrm{vol}\,(\Omega_1 \Omega_f^T \boldsymbol{K})^{1/2} \left(\int_{\Omega_1 a \Omega_f^T \boldsymbol{K}} |\phi(y)|^2 \, dy \right)^{1/2}$$

$\Omega_1 a \Omega_f^T \boldsymbol{K} \subset a \mathrm{Ad}(\mathfrak{A}(t_0))^{-1} \Omega_1 \cdot \Omega_f^T \boldsymbol{K}$ は有限個の $\mathfrak{S}(t_0)g$, ($g \in G(\mathbb{A})$) の形の集合で被覆され、その個数は a によらないから、結局 f のみによる $c_4 > 0$ があって

$$|R(f)\phi(x)| \leq c_4 \delta_B(x)^{-1/2} \|\phi\|, \quad \phi \in \mathcal{L}_0(G),\ x \in \mathfrak{S}(t_0) \tag{1.25}$$

である。

さて、主張 1.13.2 を証明しよう。$R(f)$ の $\mathcal{L}_0(G)$ への制限を、$\mathcal{L}(G)$ での $\mathcal{L}_0(G)$ の直交補空間上では 0 として $\mathcal{L}(G)$ 全体の上の有界作用素に延ばしたものを $R_0(f)$ と書く。ほとんど全ての $x \in G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})$ に対して $\mathcal{L}(G) \ni \phi \mapsto R_0(f)\phi(x) \in \mathbb{C}$ は有界線型汎函数だから、Riesz の表現定理 ([黒田 80, 定理 8.5]) によりある $k(x) \in \mathcal{L}(G)$ があって

$$R_0(f)\phi(x) = \int_{G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})} k(x, y)\phi(y) \, dy, \quad \phi \in \mathcal{L}(G)$$

が成り立つ。これと (1.25) を併せると

$$\left| \int_{G(F)\mathbb{R}_+^\times \backslash G(\mathbb{A})} k(x, y)\phi(y) \, dy \right| \leq c_4 \delta_B(x)^{-1/2} \|\phi\|, \quad \phi \in \mathcal{L}(G),\ x \in \mathfrak{S}(t_0)$$

を得る。特に $\phi = \overline{k(x)}$ として $\|k(x)\|^2 \le c_4\delta_B(x)^{-1/2}\|k(x)\|$, すなわち

$$\|k(x)\| \le c_4\delta_B(x)^{-1/2}, \quad x \in \mathfrak{S}(t_0)$$

である。ところが (1.17) から

$$\begin{aligned}\int_{G(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})} \delta_B(x)^{-1}\,dx &\le \int_{\boldsymbol{K}}\int_{t_0}^\infty\int_{\Omega_1} |a|_{\mathbb{A}}^{-1}\,du\,|a|_{\mathbb{A}}^{-1}\,da^\times\,dk \\ &\le \mathrm{vol}\,(\Omega_1\times\boldsymbol{K})\int_{\log t_0}^\infty e^{-2[F:\mathbb{Q}]x}\,dx < +\infty\end{aligned}$$

だから、これは $k(x,y)$ が $G(F)\mathbb{R}_+^\times\backslash G(\mathbb{A})$ 上で二乗可積分であることを意味し、$R_0(f)$ は Hilbert-Schmidt 作用素である。 □

定理 1.13 から、**各 $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ の構造と、それが $\mathcal{L}_0(G)$ に現れる重複度 $m(\pi)$ がわかれば、$\mathcal{A}_0(G)$ を含む $\mathcal{L}_0(G)$ が理解できたことになる**。$G(\mathbb{A})$ は各素点での局所体 F_v 上の有理点の群 $G(F_v)$ の "制限直積" であったから、$G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現は各 $G(F_v)$ の既約ユニタリ表現たちを用いて記述される。

2 局所体上の GL_2 の表現論

以下、この節を通して F は**局所体**、つまり離散的でない局所コンパクト体を表す。$G(F)$ の表現論は F が**アルキメデス的**、つまり $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合と**非アルキメデス的**な場合で大きく異なる。実 Lie 群の表現論については [Wal88] など多くの文献があるので、ここではもっぱら F が非アルキメデス局所体の場合を解説し、アルキメデス的な場合については結果に触れるだけにとどめる。

F の**モジュラス**を $|\ |_F$ で表す。F が非アルキメデス的な場合にはさらに、

- F の唯一の極大コンパクト部分環 $\mathcal{O} := \{x \in F \mid |x|_F \le 1\}$;
- $\mathcal{O}$ の唯一の極大イデアル $\mathfrak{p} := \{x \in F \mid |x|_F < 1\}$;
- $\mathfrak{p}$ の生成元 ϖ;
- 剰余体 $k_F := \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ とその位数 q;
- 付値 $\mathrm{val}_F : F^\times \ni x \mapsto -\log_q |x|_F \in \mathbb{Z}$

などの記号も断りなく使うことにする。これらについては例えば [Wei95, 1 章] を参照されたい。

2.1 局所体上の GL_2 の構造

前節と同様に $G := \mathrm{GL}_{2,F}$ と書き、$B = TU$ をその上三角 Borel 部分群とする。$F = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ のとき $G(F)$ はそれぞれ実、複素 Lie 群である。F が非アルキメデス的ならば $G(F)$ はコンパクト開部分群からなる単位元の基本近傍系

$$K(\mathfrak{p}^n) := \{g \in G(\mathcal{O}) \mid g \equiv \mathbf{1}_2 \pmod{\mathfrak{p}^n}\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

を持つ、**完全不連結局所コンパクト群** (*TDLC* **群**) すなわち [BZ76] の意味の ℓ **群**である。$G(F)$ の極大コンパクト部分群

$$\boldsymbol{K} := \begin{cases} \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) & F = \mathbb{R} \text{ のとき} \\ \mathrm{U}_2(\mathbb{R}) & F = \mathbb{C} \text{ のとき} \\ \{g \in \mathbb{M}_2(\mathcal{O}) \mid \det g \in \mathcal{O}^\times\} & F \text{ が非アルキメデスのとき} \end{cases}$$

を取る。

補題 2.1. (i) $w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ として *Bruhat* **分解** $G(F) = B(F) \sqcup B(F)wU(F)$ が成り立つ。

(ii) **岩澤分解** $G(F) = B(F)\boldsymbol{K}$ が成り立つ。

証明. (i) は行列の基本変形により容易に確かめられる。

(ii) アルキメデス的な場合には行列の QR 分解 (Gram-Schmidt の直交化) から直ちに従う。非アルキメデス的な場合を示そう。有限次元 F ベクトル空間 V 上の**高さ函数** (*height*) とは、函数 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって

(a) $\|v\| = 0$ となるためには $v = 0$ が必要十分。

(b) $\|a.v\| = |a|_F \cdot \|v\|$, $a \in F$, $v \in V$.

(c) 超距離不等式 $\|v + v'\| \leq \max(\|v\|, \|v'\|)$, $v, v' \in V$.

を満たすものとする。例えば

$$\|\ \|_0 : F^2 \ni (x, y) \longmapsto \max(|x|_F, |y|_F) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

は F^2 上の高さ函数である。$\|\ \|$ を V 上の高さ函数とする。$v, v' \in V$ が $\|\ \|$ **直交**するとは、v, v' のいずれかが 0 であるか、

(a) v, v' が一次独立で、

(b) $\|\lambda v + \lambda' v'\| = \max(\|\lambda v\|, \|\lambda' v'\|)$, $\forall \lambda, \lambda' \in F$

が成り立つこととする。$V \ni v \neq 0$ に対しては $F.v$ の $\| \, \|$ 直交補空間が存在する (一意ではないが)。実際、$F.v = \ker f$ となる線型形式 $f : V \to F$ を取れば、

$$V \setminus \{0\} \ni v \longmapsto \frac{|f(v)|_F}{\|v\|} \in \mathbb{R}$$

はコンパクト集合 $\mathbf{P}(V) := (V \setminus \{0\})/F^\times$ 上の連続函数だからその最大値 $|f(v')|_F/\|v'\|$ が存在する。このとき

- $\lambda v + \lambda' v' = 0$ なら $\lambda' f(v') = f(\lambda v + \lambda' v') = 0$ だから $\lambda' = 0$, よって λ も 0. つまり v, v' は一次独立。

- 定義から $\lambda' \neq 0$ に対して

$$\frac{|\lambda' f(v')|}{\|\lambda v + \lambda' v'\|} = \frac{|f(\lambda v + \lambda' v')|}{\|\lambda v + \lambda' v'\|} \leq \frac{|\lambda' f(v')|}{\|\lambda' v'\|}$$

  ゆえ、$\|\lambda v + \lambda' v'\| \geq \|\lambda' v'\|$. またこれと超距離不等式から

$$\|\lambda v\| = \|\lambda v + \lambda' v' - \lambda' v'\| \leq \max(\|\lambda v + \lambda' v'\|, \|\lambda' v'\|) = \|\lambda v + \lambda' v'\|.$$

  よって $\|\lambda v + \lambda' v'\| \leq \max(\|\lambda v\|, \|\lambda' v'\|)$ と併せて、$\|\lambda v + \lambda' v'\| = \max(\|\lambda v\|, \|\lambda' v'\|)$.

つまり v, v' は $\| \, \|$ 直交であることがわかる。

F^2 上の高さ函数の集合 $\mathfrak{B}(G(F))$ を $G(F)$ の *Bruhat-Tits* **ビル**という。これには $G(F) \ni g$ が $\|v\| \mapsto g.\|v\| := \|v.g\|$ と作用している。$\| \, \| \in \mathfrak{B}(G(F))$ が**スペシャル**であるとは、$\mathrm{im}\|F^2\| = |F|_F$ であることとする。スペシャルな高さ函数 $\| \, \|$ は付随する $\mathcal{O}$ **格子**[7] $\Lambda_{\| \, \|} := \{v \in F^2 \mid \|v\| \leq 1\}$ から

$$\|v\| := \inf\{|\lambda|_F \, ; \, \lambda^{-1} v \in \Lambda_{\| \, \|}\}$$

として一意に決まる。

さて $g \in G(F)$ を取る。先に挙げた高さ函数 $\| \, \|_0$ を g で移した $g.\| \, \|_0$ はスペシャルだから、$g.\|(0, d)\| = 1$ となる $d \in F^\times$ がある。上から $(0, d)$ と $g.\| \, \|$ 直交する $(1, -b/d), (b \in F)$ が取れるが、これも適当に定数倍して $g.\|(a^{-1}, -b/ad)\| = 1$ であるとしてよい。このとき

$$\mathcal{O}^2 \begin{pmatrix} a^{-1} & -b/ad \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} = \Lambda_{g.\| \, \|_0} = \Lambda_{\| \, \|_0}.g^{-1} = \mathcal{O}^2.g^{-1}$$

だから $\begin{pmatrix} a^{-1} & -b/ad \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} g \in \mathrm{Stab}(\mathcal{O}^2, G(F)) = \boldsymbol{K}$ である。つまり $g \in \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \boldsymbol{K}$. $\square$

2.2 非アルキメデス局所体上の GL_2 の表現 I

ここでは F を非アルキメデス局所体とする。非アルキメデス局所体上の簡約代数群の表現論については [BZ76], [Cas] などが基本的な文献である。

[7] 開コンパクト部分 $\mathcal{O}$ 加群のこと。

2.2.1 許容表現

$G(F)$ の**滑らかな表現** (*smooth representation*) とは、$\mathbb{C}$ ベクトル空間 V と群準同型 $\pi : G(F) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ の対 (π, V) であって、各 $v \in V$ の固定化群

$$\mathrm{Stab}(v, G(F)) := \{g \in G(F) \mid \pi(g)v = v\}$$

が $G(F)$ の開部分群であるものである。滑らかな表現 (π, V) が**許容表現** (*admissible representation*) とは、任意の開部分群 $K \subset G(F)$ の固定部分 $V^K := \{v \in V \mid \pi(k)v = v,\ k \in K\}$ が有限次元であることとする。

$G(F)$ は両側不変測度 dg を持つ。$G(F)$ 上のコンパクト台付き局所定数函数の空間 $\mathcal{S}(G(F))$ を**畳み込み積**

$$f_1 * f_2(x) := \int_{G(F)} f_1(xy) f_2(y^{-1})\, dy$$

に関して $\mathbb{C}$ 代数と見たものを $G(F)$ の ***Hecke* 環**と呼び、$\mathcal{H}(G(F))$ と書く。任意の $f \in \mathcal{H}(G(F))$ は、ある十分小さい開コンパクト部分群 $K \subset G(F)$ をに対して

$$f = \sum_{i=1}^{r} f(g_i) 1_{g_i K}, \quad g_i \in G(F)/K$$

と有限線型結合に書ける。ここで 1_X は X の特性函数を表す。特に $G(F)$ の滑らかな表現 (π, V) の元 $v \in V$ を固定するようさらに K を小さく取っておけば、

$$\pi(f)v = \int_{G(F)} f(g)\pi(g)v\, dg := \sum_{i=1}^{r} \mathrm{vol}\, K \cdot f(g_i)\pi(g_i)v \in V$$

は定義可能である。(十分小さい K の取り方によらない。) これにより $\mathcal{H}(G(F))$ の (π, V) への作用が定まり、V は $\mathcal{H}(G(F))$ 加群となる。すなわち $G(F)$ の滑らかな表現 (π, V) たちのなすアーベル圏は、**非退化**: $\pi(\mathcal{H}(G(F)))V = V$ な $\mathcal{H}(G(F))$ 加群のそれと圏同値である。

任意の $f \in \mathcal{H}(G(F))$ はある開コンパクト部分群 $K \subset G(F)$ で左不変である。このとき

$$\begin{aligned}\pi(k)\pi(f)v &= \int_{G(F)} f(g)\pi(kg)v\, dg = \int_{G(F)} f(k^{-1}g)\pi(g)v\, dg \\ &= \int_{G(F)} f(g)\pi(g)v\, dg = \pi(f)v\end{aligned}$$

なので $\mathrm{im}\,\pi(f) \subset V^K$ である。特に (π, V) が許容表現なら V^K は有限次元だから、トレース $\mathrm{tr}\pi(f)$ が定まる。こうして定まる線型汎函数 $\mathrm{tr}\pi : \mathcal{H}(G(F)) \ni f \mapsto \mathrm{tr}\pi(f) \in \mathbb{C}$ を (π, V) の**指標** ((*distribution*) *character*) という。

滑らかな表現 (π, V) から (π', V') への ***$G(F)$* 準同型**とは、線型写像 $\Phi : V \to V'$ であって任意の $g \in G(F)$ に対して可換図式

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi(g)"'] & V' \arrow[d, "\pi'(g)"] \\ V \arrow[r, "\Phi"] & V' \end{tikzcd}$$

が成り立つものである。さらに Φ が全単射のとき Φ は (π, V) から (π', V') への $G(F)$ **同型**と呼ばれる。滑らかな表現 (π, V) の部分空間 $V_1 \subset V$ が $\pi(g)V_1 = V_1$, $(\forall g \in G(F))$ を満たすとき、$\pi_1(g) := \pi(g)|_{V_1}$, $(g \in G(F))$ で定まる表現 (π_1, V_1) を (π, V) の**部分表現**という。また $V_2 := V/V_1$ 上に $\pi_2(g)(v + V_1) := \pi(g)v + V_1$, $(g \in G(F))$ で定まる表現を (π, V) の**商表現**という。(π, V) は 0 と自分自身以外に部分表現を持たないとき、**既約表現**と呼ばれる。$G(F)$ の滑らかな既約表現の同型類の集合を $\mathrm{Irr}\, G(F)$ と書く。同様の定義は $G(F)$ の任意の閉部分群にも適用できる。

事実 2.2 (Schur の補題)**.** $G(F)$ の既約で滑らかな表現 (π, V) の自己準同型環 $\mathrm{End}_{G(F)}(\pi)$ は $\mathbb{C}$ に同型。特に $G(F)$ の中心 $Z(F) = F^\times$ は (π, V) に定数倍で作用する: $\pi(z\mathbf{1}_2) = \omega_\pi(z)\mathrm{id}_V$, $(z \in F^\times)$. この $\omega_\pi \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ を π の**中心指標** (*central character*) という。

滑らかな表現 (π, V) の双対空間 V^* 上に $G(F)$ 作用 $\pi^* : G(F) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V^*)$ を

$$\langle \pi^*(g)v^*, v\rangle := \langle v^*, \pi(g^{-1})v\rangle, \quad g \in G(F),\ v^* \in V^*,\ v \in V$$

と定めて得られる**双対表現** (π^*, V^*) は必ずしも滑らかではない。代わりにその部分空間

$$V^\vee := \{v^* \in V^* \mid \mathrm{Stab}(v^*, G(F)) \subset G(F) \text{ は開部分群}\}$$

への制限を (π, V) の**反傾表現** (*contragredient representation*) と呼び $(\pi^\vee, V^\vee)$ と書く。(π, V) **が許容表現ならば** $V^\vee = V^*$ で $(\pi^\vee, V^\vee)$ の反傾表現は (π, V) 自身に標準同型であるが、一般には $(V^\vee)^\vee \subset V$ でしかない。

2.2.2 放物的誘導と Jacquet 加群

局所的な状況でも $B(F)$ の**モジュラス指標**を

$$\delta_B\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) := \left|\frac{a}{d}\right|_F$$

と書く。つまり $B(F)$ 上の左不変測度 db に対して $\delta_B(b)db$ は右不変測度である。$T(F)$ の滑らかな表現 (τ, V) に対して、

$$I_B^G(V) := \left\{ f : G(F) \to V \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & f(utg) = \delta_B(ut)^{1/2}\tau(t)f(g), \\ & u \in U(F),\ t \in T(F),\ g \in G(F), \\ \text{(ii)} & f \text{ は } G(F) \text{ のある開部分群による} \\ & \text{右移動で不変} \end{array} \right\}$$

とおき、その上の $G(F)$ の表現

$$I_B^G(\tau, g)f(x) := f(xg), \quad g \in G(F),\ f \in I_B^G(V)$$

を (τ, V) からの B に沿っての**放物的誘導表現** (*parabolically induced representation*) という。放物的誘導は $T(F)$ の滑らかな表現の圏から $G(F)$ のそれへの完全函手であり、(τ, V) が $T(F)$ の許容表現ならば $(I_B^G(\tau), I_B^G(V))$ は $G(F)$ の許容表現である。また

$$I_B^G(\tau)^\vee \simeq I_B^G(\tau^\vee) \tag{2.1}$$

である [BZ76, 命題 2.25]。

例 2.3. $T(F)$ はアーベル群なので任意の $\tau \in \operatorname{Irr} T(F)$ の元は 1 次元、つまり $\chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Irr} F^\times$ を使って

$$\tau = \chi_1 \boxtimes \chi_2 : T(F) \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \chi_1(a)\chi_2(d) \in \mathbb{C}^\times$$

と書ける[8]。これからの放物的誘導表現 $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ を**一般主系列表現**という。

逆に $G(F)$ の滑らかな表現 (π, V) に対して、

$$V_B := V/V(U), \quad V(U) := \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\pi(u)v - v \mid u \in U(F)\}$$

とおき $j_B : V \twoheadrightarrow V_B$ を自然な射影とする。

$$\pi_B(t) j_B(v) := \delta_B(t)^{-1/2} j_B(\pi(t)v), \quad t \in T(F),\, v \in V$$

により定まる $T(F)$ の滑らかな表現 (π_B, V_B) を (π, V) の B に沿っての ***Jacquet* 加群** (*Jacquet module*) という。この $\pi \mapsto \pi_B$ も $G(F)$ の滑らかな表現の圏から $T(F)$ のそれへの完全函手で、許容表現を許容表現に送ることが知られている (Jacquet の補題)。Jacquet 加群と放物的誘導の関係としては次の ***Frobenius* 相互律**が重要である。

補題 2.4. π が $G(F)$ の、τ が $T(F)$ の滑らかな表現のとき、

$$\operatorname{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\tau)) \simeq \operatorname{Hom}_{B(F)}(\pi, \delta_B^{1/2}\tau \otimes \mathbb{1}_{U(F)}) \simeq \operatorname{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \tau).$$

左の同型は通常の Frobenius 相互律、右は Jacquet 加群の定義から直ちに従う。$G(F)$ の滑らかな表現 (π, V) は $V_B = 0$ のとき**準カスプ表現** (*quasicuspidal representation*)、さらに許容的なとき**超カスプ表現** (*supercuspidal representation*) と呼ばれる。$\operatorname{Irr} G(F)$ 内の超カスプ的な同型類の集合を $\operatorname{Irr}_0 G(F)$ と書く。既約超カスプ表現は次のきわだった性質を持つ。

事実 2.5. (i) 長さ有限な準カスプ表現は許容的、特に超カスプ表現になる [BZ76, 定理 3.25]。
(ii) $G(F)$ の滑らかな表現 (τ, V) が $\pi \in \operatorname{Irr}_0 G(F)$ を既約部分商に持つならば、τ は π を部分表現および商表現に持つ [BZ76, 命題 3.30]。

---

[8] 群 H_1, H_2 の表現 $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2)$ に対して $V_1 \otimes V_2$ 上に定まる $H_1 \times H_2$ の表現

$$\pi(h_1, h_2)(v_1 \otimes v_2) := \pi_1(h_1)v_1 \otimes \pi_2(h_2)v_2$$

を π_1, π_2 の**外部テンソル積表現**と呼び、$\pi_1 \boxtimes \pi_2$ と書く。(これを単に $\pi_1 \otimes \pi_2$ と書く専門家も多い。)

超カスプ的でない既約表現については次の結果が基本的である。

系 2.6. 任意の $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F) \smallsetminus \mathrm{Irr}_0\, G(F)$ はある一般主系列表現 $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の部分表現である。特に π は許容表現である。

証明. 仮定から $\pi_B \neq 0$ でそれは有限生成表現である。よって Zorn の補題からその既約商 $\chi_1 \boxtimes \chi_2 \twoheadleftarrow \pi_B$ が取れる。このとき補題 2.4 から

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \chi_1 \boxtimes \chi_2) \simeq \mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)),$$

しかも π は既約だから $\pi \hookrightarrow I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ を得る。また $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ は許容表現だからその部分表現 π も同様である。 □

2.2.3 Weil 表現

E を標数が 2 でない局所体 F の二次拡大、または F^2 とする。$\mathrm{Aut}_F(E)$ の生成元を σ と書けば、$\mathrm{N}_{E/F} : E \ni z \mapsto z\sigma(z) \in F$ は二次形式である。その直交群

$$\mathrm{O}(E) := \{g \in \mathrm{End}_F(E) \,|\, \mathrm{N}_{E/F}(g.z) = \mathrm{N}_{E/F}(z),\ z \in E\}$$

は $\mathrm{SO}(E) = \{g \in E^\times \,|\, \mathrm{N}_{E/F}(g) = 1\}$ の $\mathrm{Aut}_F(E) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ による半直積である。

非自明指標 $\psi : F \to \mathbb{C}^1$ を選び、$\psi_E(z) := \psi \circ \mathrm{Tr}_{E/F}(z) = \psi(z + \sigma(z))$ と書く。このとき $\mathrm{O}(E) \times \mathrm{SL}_2(F)$ の *ψ-Weil* **表現**と呼ばれる滑らかな表現 $(\omega_{E,\psi}, \mathcal{S}(E))$ がある。ただし $\mathcal{S}(E)$ は E 上の *Schwartz-Bruhat* **函数**、つまり F がアルキメデス的なら Schwartz 函数の、非アルキメデス的ならコンパクト台付き局所定数函数の空間を表す。$(\omega_{E,\psi}, \mathcal{S}(E))$ は次の明示公式で一意に特徴付けられる [Kud94, §5]:

$$\begin{aligned}
&\omega_{E,\psi}(g)\Phi(v) = \Phi(g^{-1}.v), \quad g \in \mathrm{O}(E),\\
&\omega_{E,\psi}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right)\Phi(v) = \omega_{E/F}(a)|a|_F \Phi(v.a), \quad a \in F^\times,\\
&\omega_{E,\psi}\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi(v) = \psi(b\mathrm{N}_{E/F}(v))\Phi(v), \quad b \in F,\\
&\omega_{E,\psi}(w)\Phi(v) = \lambda(E/F,\psi) \int_E \Phi(v')\psi_E(v\sigma(v'))\, dv'.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

ただし $\omega_{E/F} : F^\times/\mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$ は E/F に局所類体論で対応する二次指標、$\lambda(E/F,\psi)$ は E/F の ψ に関する *Langlands* λ **因子**と呼ばれる定数で $\lambda(E/F,\psi)^2 = \omega_{E/F}(-1)$ を満たす。最後の式の Haar 測度は双対性 $(v, v') \mapsto \psi_E(v\sigma(v'))$ に関する**自己双対測度**、つまり *Fourier* **逆公式**

$$\int_E \int_E \phi(x)\psi_E(x\sigma(y))\, dx\, \psi_E(-y\sigma(z))\, dy = \phi(z)$$

が成り立つものである。

2.3 非アルキメデス局所体上の GL_2 の表現 II

引き続き F は非アルキメデス局所体であるとする。ここでは $G(F)$ の既約許容表現の同型類の集合 $\mathrm{Irr}\,G(F)$ を記述する。まず $\mathrm{Irr}\,G(F) \smallsetminus \mathrm{Irr}_0\,G(F)$ の元を分類しよう。

2.3.1 無限小指標 (超カスプ台)

$\pi \in \mathrm{Irr}\,G(F) \smallsetminus \mathrm{Irr}_0\,G(F)$ はある一般主系列表現の部分表現だった (系 2.6)。

補題 2.7 (Bruhat フィルタ)**.** (i) $T(F)$ の滑らかな表現 (τ, V) に対して

$$I_B^{BwB}(\tau) := \{f \in I_B^G(V) \,|\, \mathrm{supp} f \subset B(F)wU(F)\},$$
$$I_B^B(\tau) := \left\{ f : B(F) \to V \;\middle|\; f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \left|\frac{a}{d}\right|_F^{1/2} \tau\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) f(1) \right\}$$

とおけば、$B(F)$ の表現の完全列 $0 \to I_B^{BwB}(\tau) \to I_B^G(\tau) \to I_B^B(\tau) \to 0$ がある。
(ii) 特に Jacquet 加群の完全列 $0 \to w(\tau) \to I_B^G(\tau)_B \to \tau \to 0$ がある。ただし

$$w(\tau)\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) := \tau\left(\mathrm{Ad}(w)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \tau\left(\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$$

と書いている。

証明. (i) 制限写像 $I_B^G(V) \ni f \mapsto f|_{B(F)} \in I_B^B(\tau)$ が全射であること、その核が $I_B^{BwB}(\tau)$ であることは容易に確かめられる。

(ii) $I_B^B(\tau)$ の $U(F)$ 不変商は明らかに τ である。一方、同型

$$U(F) \ni u \longmapsto B(F)w^{-1}u \in B(F)\backslash B(F)wU(F)$$

は $U(F)$ の右移動作用で同変である。不変測度の一意性から、Jacquet 加群への自然な射影 $j_B : I_B^{BwB}(\tau) \twoheadrightarrow I_B^{BwB}(\tau)_B$ は

$$\begin{aligned}
j_B(f)(t) &:= \int_{U(F)} f(w^{-1}ut)\,du = \int_{U(F)} f(w^{-1}tw \cdot w^{-1} \cdot t^{-1}ut)\,du \\
&= \int_{U(F)} \delta_B(w^{-1}tw) w(\tau)(t) f(w^{-1}u)\,d(tut^{-1}) \\
&= \int_{U(F)} \delta_B(t)^{-1} w(\tau)(t) f(w^{-1}u) \delta_B(t)\,du \\
&= w(\tau)(t) j_B(f)(1)
\end{aligned}$$

で与えられる。つまり $I_B^{BwB}(\tau)_B \simeq w(\tau)$ である。 □

命題 2.8. (i) 一般主系列表現 $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ は超カスプ的な部分商を持たない。
(ii) $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の長さは高々2である。
(iii) 次は互いに同値。

(a) $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ と $I_B^G(\chi_1' \boxtimes \chi_2')$ がある既約部分商を共有する。

(b) $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ と $I_B^G(\chi_1' \boxtimes \chi_2')$ の組成因子は一致する。

(c) (χ_1, χ_2) と (χ_1', χ_2') は並べ替えを除いて一致する。

証明. (i) $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ が超カスプ既約部分商 π を持てば、事実 2.5 から π は $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の部分表現である。すると補題 2.4 から

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \chi_1 \boxtimes \chi_2)$$

だが、これは $\pi_B = 0$ に矛盾する。

(ii) (i) から $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の任意の既約部分商 π は $\pi_B \neq 0$ を満たす。Jacquet 加群函手の完全性からそのような既約部分商の Jacquet 加群は $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)_B$ の既約部分商 $\chi_1 \boxtimes \chi_2$, $\chi_2 \boxtimes \chi_1$ を分け合うから、高々2つしかない。

(iii) (b) $\Rightarrow$ (a) は自明である。

(a) $\Rightarrow$ (c) $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の既約部分商 π を考える。(i) から $\pi_B \neq 0$ ゆえその既約部分商 τ が取れる。補題 2.7 から τ は $\chi_1 \boxtimes \chi_2$ か $\chi_2 \boxtimes \chi_1$ に一致する。$I_B^G(\chi_1' \boxtimes \chi_2')$ が π を部分商に持てば、同様の議論から $\tau \simeq \chi_1' \boxtimes \chi_2'$ または $\chi_2' \boxtimes \chi_1'$ である。

(c) $\Rightarrow$ (b) $(\chi_1', \chi_2') = (\chi_2, \chi_1)$, $\chi_1 \neq \chi_2$ だとしてよい。補題 2.7 から

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{T(F)}(I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)_B, \chi_2 \boxtimes \chi_1) \simeq \mathrm{Hom}_{G(F)}(I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2), I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1))$$

などとなって

$$\begin{aligned} A \neq 0, &\in \mathrm{Hom}_{G(F)}(I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2), I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1)), \\ A' \neq 0, &\in \mathrm{Hom}_{G(F)}(I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1), I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)) \end{aligned}$$

が取れる。もし $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ が既約なら A は単射で、補題 2.7 から $I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1)/\mathrm{im}A$ は超カスプ的である。これは (i) から $I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1) = \mathrm{im}A \simeq I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ を意味するから (b) が成り立つ。$I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1)$ が既約な場合も同様である。

そこで $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$, $I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1)$ がそれぞれ真部分表現 π, π' を持つ場合を考える。(ii) の証明の議論から Jacquet 加群 π_B, π_B' は既約で、Frobenius 相互律から

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \chi_1 \boxtimes \chi_2)$$

などとなるから、$\pi_B = \chi_1 \boxtimes \chi_2$, $\pi_B' = \chi_2 \boxtimes \chi_1$ がわかる。すると

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi, I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1)) \simeq \mathrm{Hom}_{T(F)}(\pi_B, \chi_2 \boxtimes \chi_1) = 0$$

などとなって $A(\pi)=0, A'(\pi')=0$ が従う。つまり $\pi=\ker A\subset I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2), \pi'=\ker A'\subset I_B^G(\chi_2\boxtimes\chi_1)$ はそれぞれ唯一の真部分表現である。ところがこれは

$$A: I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2)/\pi \xrightarrow{\sim} \pi', \quad A': I_B^G(\chi_2\boxtimes\chi_1)/\pi' \xrightarrow{\sim} \pi$$

がともに同型であることを意味するから、やはり (b) が従う。 □

命題から $\pi\in\mathrm{Irr}(G(F))\setminus\mathrm{Irr}_0(G(F))$ を部分商に持つ $I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2)$ における**重複度付き集合** (*multiset*) $[\chi_1,\chi_2]$ は π から一意に定まる。対 $(T,[\chi_1,\chi_2])$ を π の**無限小指標** (*infinitesimal character*) または**超カスプ台** (*cuspidal support*) という。なお $\pi\in\mathrm{Irr}_0\,G(F)$ の無限小指標は (G,π) 自身とする。

2.3.2 Whittaker 模型

F の非自明指標 ψ を固定する。大域的な場合 (1.5 節) と同様に F の指標 $\psi^a(x):=(ax)$, $(a\in F)$ は $U(F)$ の指標

$$\psi_U^a: U(F)\ni\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\longmapsto\psi^a(b)\in\mathbb{C}^1$$

を定める。つまり $U(F)$ の Pontrjagin 双対 $U(F)^D$ は、同型 $F\ni a\mapsto\psi_U^a\in U(F)^D$ により F と同一視される。$U(F)$ は $B(F)$ の正規部分群だから $B(F)$ は $U(F)^D$ に共役で作用し、その軌道は自明な指標からなる閉軌道 $\{0\}\subset F$ と非自明指標たちのなす開軌道 $F^\times$ である。よって完全列

$$0\longrightarrow C_c^\infty(F^\times)\longrightarrow C_c^\infty(F)\longrightarrow C_c^\infty(\{0\})\longrightarrow 0 \tag{†}$$

がある [BZ76, 命題 1.8]。ただし非アルキメデス的な状況では、$C_c^\infty(X)$ は X 上のコンパクト台付き局所定数函数の空間を表す。

さて、$U(F)$ の非自明な指標 ψ_U から $G(F)$ への誘導表現 $\mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)}\psi_U$ は

$$\mathcal{W}_\psi(G(F)):=\left\{W:G(F)\to\mathbb{C}\;\middle|\;\begin{array}{ll}\text{(i)} & W(ug)=\psi_U(u)W(g),\ u\in U(F),\ g\in G(F)\\ \text{(ii)} & W\text{ はある開コンパクト部分群で右不変}\end{array}\right\}$$

上に $\mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)}(\psi_U,g)W(x):=W(xg)$, $(W\in\mathcal{W}_\psi(G(F)),\ g\in G(F))$ と実現される。$\pi\in\mathrm{Irr}\,G(F)$ は $\mathcal{W}_\psi(G(F))$ の部分表現として実現できるとき**非退化** (*generic*) と呼ばれる。その実現を π の ***ψ-Whittaker* 模型**といい、$\mathcal{W}_\psi(\pi)$ で表す。

π の実現 (π,V) に対して、その ψ_U **等型商**を

$$\pi_{U,\psi}:=V/V(U,\psi),\quad V(U,\psi):=\mathrm{span}\{\pi(u)v-\psi_U(u)v\,|\,v\in V, u\in U(F)\}$$

と定めれば、補題 2.4 と同様に *Frobenius* **相互律**

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(\pi,\mathcal{W}_\psi(G(F)))\simeq\mathrm{Hom}_{U(F)}(\pi,\psi_U)\simeq\pi_{U,\psi}^* \tag{2.3}$$

が成り立つ。特に π が非退化であるためには $\pi_{U,\psi}\neq 0$ が必要十分である。

例 2.9. $I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2)$ の場合を考えてみよう。補題 2.7 (i) の完全列で $I_B^B(\chi_1\boxtimes\chi_2)_{U,\psi}=0$ だから、$\dim I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2)_{U,\psi}\le\dim I_B^{BwB}(\chi_1\boxtimes\chi_2)_{U,\psi}$ である。再び $U(F)$ 同変な同型 $U(F)\ni u\mapsto B(F)w^{-1}u\in B(F)\backslash B(F)wB(F)$ とその上の $U(F)$ 不変測度の一意性から標準射影 $I_B^{BwB}(\chi_1\boxtimes\chi_2)\twoheadrightarrow I_B^{BwB}(\chi_1\boxtimes\chi_2)_{U,\psi}$ は

$$j_{U,\psi}(f):=\int_{U(F)}f(w^{-1}u)\overline{\psi_U(u)}\,du$$

を経由する。つまり $I_B^{BwB}(\chi_1\boxtimes\chi_2)_{U,\psi}$ は 1 次元で、$I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2)$ の Whittaker 模型は高々一つしかない。

2.3.3 非超カスプ既約表現の分類

超カスプ的でない既約表現を分類するには $I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2)$ たちの組成因子を記述すればよい。

補題 2.10. $\chi_1\chi_2^{-1}\neq|\ |_F^{\pm1}$ のとき、$I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2)$ は既約である。

証明. $B(F)$ の表現の完全列

$$0\longrightarrow I_B^{BwB}(\chi_1\boxtimes\chi_2)\longrightarrow I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2)\longrightarrow\delta_B^{1/2}(\chi_1\boxtimes\chi_2)\longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

を思い出す。この左の表現をさらに調べよう。$f\in I_B^{BwB}(\chi_1\boxtimes\chi_2)$ にその “Fourier 変換” $U(F)^D\ni\psi^a\to j_{U,\psi^a}(f)\in\mathbb{C}$ (例 2.9) を対応させることで、$B(F)$ 同型

$$I_B^{BwB}(\chi_1\boxtimes\chi_2)\xrightarrow{\sim}C_c^\infty(U(F)^D)\xrightarrow{\sim}C_c^\infty(F)$$

が得られる。この同型で 2.3.2 節の完全列 (†) を引き戻して完全列

$$0\to\mathrm{ind}_{ZU(F)}^{B(F)}(I_B^{BwB}(\chi_1\boxtimes\chi_2)_{U,\psi}\otimes\psi_U)\to I_B^{BwB}(\chi_1\boxtimes\chi_2)\to\delta_B^{1/2}(\chi_2\boxtimes\chi_1)\to 0 \tag{2.5}$$

が得られる[9]。

さて $I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2)$ が可約だとすれば、命題 2.8 からその既約部分商は 2 つである。それを $\pi,\pi'\in\mathrm{Irr}(G(F))$ と書けば、補題 2.7 から $\pi_B\simeq\chi_1\boxtimes\chi_2$, $\pi'_B\simeq\chi_2\boxtimes\chi_1$ であるとしてよい。また例 2.9 から $\pi_{U,\psi}$ か $\pi'_{U,\psi}$ のいずれかは 0 だから、必要なら χ_1,χ_2 を並べ替えて $\pi_{U,\psi}=0$ であるとしてよい。すると (2.4), (2.5) にある $I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2)|_{B(F)}$ の部分商のうち $\pi|_{B(F)}$ に現れる可能性があるのは

$$\delta_B^{1/2}(\chi_1\boxtimes\chi_2)=\chi_1|\ |_F^{1/2}\boxtimes\chi_2|\ |_F^{-1/2},\quad \delta_B^{1/2}(\chi_2\boxtimes\chi_1)=\chi_2|\ |_F^{1/2}\boxtimes\chi_1|\ |_F^{-1/2} \tag{2.6}$$

---

[9] $I_B^{BwB}(\chi_1\boxtimes\chi_2)\xrightarrow{\sim}C_c^\infty(F)$ の軌道 $\{0\}$ への制限 $j_{U,\psi^0}=j_B$ は Jacquet 加群 $I_B^{BwB}(\chi_1\boxtimes\chi_2)_B\simeq\delta_B^{1/2}(\chi_2\boxtimes\chi_1)$ への射影である。一方、その核は $B(F)$ 上の函数 $\varphi_f(b):=j_{U,\psi}(R(b)f)$, $(f\in I_B^{BwB}(\chi_1\boxtimes\chi_2))$ たちから成り、これは $\mathrm{ind}_{ZU(F)}^{B(F)}(I_B^{BwB}(\underline{\chi})_{U,\psi}\otimes\psi_U)$ そのものである。

のみである。一方、Frobenius 相互律 (補題 2.4) から $\pi \subset I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ であるから、反傾表現 $\pi^\vee$ は $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)^\vee \overset{(2.1)}{\simeq} I_B^G(\chi_1^{-1} \boxtimes \chi_2^{-1})$ の商である。$\chi_1^{-1} \boxtimes \chi_2^{-1}$ に対する (2.4), (2.5) から、$I_B^G(\chi_1^{-1} \boxtimes \chi_2^{-1})|_{B(F)}$ の部分商のうち $U(F)$ が自明に作用するものは

$$\chi_1^{-1}|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi_2^{-1}|\ |_F^{-1/2}, \quad \chi_2^{-1}|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi_1^{-1}|\ |_F^{-1/2}$$

のみである。(2.6) の擬指標のいずれかが、これらのどちらかの反傾表現、つまり逆元になっていなくてはならない。すなわち

- $\chi_1|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi_2|\ |_F^{-1/2} = (\chi_2^{-1}|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi_1^{-1}|\ |_F^{-1/2})^{-1}$、つまり $\chi_1\chi_2^{-1} = |\ |_F^{-1}$;
- $\chi_2|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi_1|\ |_F^{-1/2} = (\chi_1^{-1}|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi_2^{-1}|\ |_F^{-1/2})^{-1}$、つまり $\chi_1\chi_2^{-1} = |\ |_F$

のいずれかでなくてはならない。 □

定理 2.11. (i) $\mathrm{Irr}(G(F)) \smallsetminus \mathrm{Irr}_0(G(F))$ は以下の元からなる。

(a) 一般主系列表現 $\pi(\chi_1, \chi_2) := I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$, $(\chi_1\chi_2^{-1} \neq |\ |_F^{\pm 1})$.

(b) $I_B^G(\chi|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi|\ |_F^{-1/2})$ の唯一の既約部分表現 $\mathrm{St}(\chi)$. これを中心指標 χ の**スペシャル表現**または ***Steinberg* 表現**という。

(c) 一次元表現 $\chi(\det) := \chi \circ \det$.

ただし、χ_i, χ は $F^\times$ の擬指標である。
(ii) 上の既約表現のうち互いに同型なものは $\pi(\chi_1, \chi_2)$ と $\pi(\chi_2, \chi_1)$ だけである。

証明. まず $\chi_1\chi_2^{-1} \neq |\ |_F^{\pm 1}$ のとき $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ は既約 (補題 2.10)。しかも補題 2.7 から

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}(I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2), I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1)) \simeq \mathrm{Hom}_{G(F)}(I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)_B, \chi_2 \boxtimes \chi_1) \neq 0$$

ゆえ $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \simeq I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1)$ である。命題 2.8 (iii) から、これ以外の場合に既約な一般主系列表現が互いに同型になることはない。

次に $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ が可約ならば、$(\chi_1, \chi_2) = (\chi|\ |_F^{\pm 1/2}, \chi|\ |_F^{\mp 1/2})$ と書ける。$I_B^G(\chi|\ |_F^{-1/2} \boxtimes \chi|\ |_F^{1/2})$ が 1 次元表現 $\chi(\det)$ を含むことは放物的誘導表現の定義からすぐわかる。そこで $\chi^{-1}(\det) \subset I_B^G(\chi^{-1}|\ |_F^{-1/2} \boxtimes \chi^{-1}|\ |_F^{1/2})$ の反傾表現 $I_B^G(\chi|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi|\ |_F^{-1/2})$ での零化域を $\mathrm{St}(\chi)$ と書く。この定義と

$$\begin{aligned} 0 &\neq \mathrm{Hom}_{G(F)}(\chi^{-1}(\det), I_B^G(\chi^{-1}|\ |_F^{-1/2} \boxtimes \chi^{-1}|\ |_F^{1/2})) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{G(F)}(I_B^G(\chi|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi|\ |_F^{-1/2}), \chi(\det)) \end{aligned}$$

から、完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{St}(\chi) \longrightarrow I_B^G(\chi|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi|\ |_F^{-1/2}) \longrightarrow \chi(\det) \longrightarrow 0 \tag{2.7}$$

を得る。これと命題 2.8 (iii) から

$$0 \longrightarrow \chi(\det) \longrightarrow I_B^G(\chi|\ |_F^{-1/2} \boxtimes \chi|\ |_F^{1/2}) \longrightarrow \mathrm{St}(\chi) \longrightarrow 0 \tag{2.8}$$

もわかる。 □

2.3.4　二面体型表現

分類の最後に $\mathrm{Irr}_0\, G(F)$ の大部分をなす表現を構成しておこう。

E/F を分離二次拡大として 2.2.3 節で用意した $\mathrm{O}(E) \times \mathrm{SL}_2(F)$ の Weil 表現 $(\omega_{E,\psi}, \mathcal{S}(E))$ を考える。$\omega \in \mathrm{Irr}(E^\times)$ の $\mathrm{SO}(E)$ への制限を $\omega_\circ$ と書き、$\omega_{E,\psi}$ の $\omega_\circ^{-1}$ 等型商

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}} &:= (\mathcal{S}(E) \otimes \omega_\circ)^{\mathrm{SO}(E)} \\ &= \{\Phi \in \mathcal{S}(E) \,|\, \Phi(g^{-1}v) = \omega_\circ^{-1}(g)\Phi(v),\, g \in \mathrm{SO}(E),\, v \in E\}.\end{aligned}$$

上の $\mathrm{SL}_2(F)$ の表現を $\pi(\omega_\circ, \psi)$ と書く。これは既約であることが知られている [Sha04]。それを $G(F)_E := \{g \in G(F) \,|\, \det g \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)\}$ の表現 $\pi(\omega, \psi)$ に

$$\pi(\omega,\psi)\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\Phi(v) := \omega(z)|z|_E^{1/2}\Phi(vz), \quad a = \mathrm{N}_{E/F}(z) \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times).$$

により延ばす。右辺は a をノルムに持つ $z \in E^\times$ の取り方によらないことに注意する。以上のもとで $\pi(\omega) := \mathrm{ind}_{G(F)_E}^{G(F)}\, \pi(\omega, \psi)$ と定める。

定理 2.12. (i) $\pi(\omega) \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ であり、これは ψ によらない。$\chi(\det)\pi(\omega) = \pi(\omega(\chi \circ \mathrm{N}_{E/F}))$, $\omega_{\pi(\omega)} = (\omega|_{F^\times})\omega_{E/F}$ である。
(ii) $\mathrm{Gal}(E/F)$ の生成元を σ と書く。$\sigma(\omega) := \omega \circ \sigma \neq \omega$ のとき、$\pi(\omega)$ は超カスプ表現である。$\sigma(\omega) = \omega$ のときには、ある $\chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ に対して $\omega = \chi \circ \mathrm{N}_{E/F}$, $\pi(\omega) \simeq \pi(\chi, \chi\omega_{E/F})$ である。
(iii) 二つのデータ (E, ω), (E', ω') に対して $\pi(\omega) \simeq \pi(\omega')$ となるためには、$\mathrm{ind}_{W_E}^{W_F}(\omega) \simeq \mathrm{ind}_{W_{E'}}^{W_F}(\omega')$ となることが必要十分である。ただし W_F は F の Weil 群 (A.2 節参照) であり、$\omega \in \mathrm{Irr}\, E^\times$ は定理 A.5 により $\omega : W_E \to \mathbb{C}^\times$ と同一視されている。

注意 2.13. (i) F の剰余標数が 2 でなければ $\mathrm{Irr}_0\, G(F)$ の任意の元はある (E, ω) に対する $\pi(\omega)$ である。剰余標数 2 の場合には *extraordinary* **表現**と呼ばれる、二面体型でない既約超カスプ表現が存在する。
(ii) 定理 2.12 の (i), (ii) は [JL70, 定理 4.6] で証明されている。しかし (iii) の証明は難しく、$GL(2)$ の局所ベースチェンジリフト [Lan80] が必要である。
(iii) $\pi(\omega)$ は**局所 *Langlands* 対応**で (無限次) 二面体群に像を持つ W_F の表現 $\mathrm{ind}_{W_E}^{W_F}(\omega)$ に対応するため、二面体型表現と呼ばれる。
(iv) $E/F = \mathbb{C}/\mathbb{R}$ の場合にも類似の構成により二面体型表現 $\pi(\omega)$, $(\omega \in \mathrm{Irr}\, \mathbb{C}^\times)$ が得られ、上の定理が成り立つ。

2.3.5　補足

$\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ が**不分岐** (*unramified*) とは $\pi(\boldsymbol{K})$ で不変なベクトルを持つこととする。

- $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}\, F^\times$, $\chi_1\chi_2^{-1} \neq |\;|_F^{\pm 1}$ が**不分岐**、つまり $\chi_i|_{\mathcal{O}^\times}$ が自明なとき、

$$f^0\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} k\right) := \chi_1(a)\chi_2(d)\left|\frac{a}{d}\right|_F^{1/2}, \quad k \in \boldsymbol{K}$$

  は定義可能な $\boldsymbol{K}$ 不変ベクトル $f^0 \in \pi(\chi_1, \chi_2)$ を与える。

- $\chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ が不分岐のとき、$\chi(\det)$ は $\boldsymbol{K}$ 上自明である。

$G(F)$ の不分岐な既約表現は上の二種しかないことが知られている。

$G(F)$ の滑らかな表現 (π, V) が**ユニタリ化可能** (*unitarizable*) とは、$\mathbb{R}$ 双線型形式 $(\;,\;) : V \otimes_{\mathbb{R}} V \to V$ で

- $(\xi, \xi) = 0$ となるのは $\xi = 0$ の場合に限る。
- $(z\xi_1, \xi_2) = z\overline{(\xi_2, \xi_1)}$, $z \in \mathbb{C}$, $\xi_i \in V$;
- $(\pi(g)\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \pi(g^{-1})\xi_2)$, $g \in G(F)$, $\xi_i \in V$

を満たすものが存在することとする。つまり $(\;,\;)$ は V 上 $G(F)$ 不変な内積であり、それに関して V を完備化したものを H と書けば π はユニタリ表現 (π, H) に延びる。逆に $G(F)$ のユニタリ表現 (π, H) に対して

$$V := \{\xi \in H \,|\, \xi \text{ はある開部分群 } K_\xi \subset G(F) \text{ で不変}\}$$

とおけば (π, V) は $G(F)$ の滑らかな表現になる。

事実 2.14 ([BZ76] 定理 4.21)**.** 上の $(\pi, V) \mapsto (\pi, H)$, $(\pi, V) \leftarrow\!\shortmid (\pi, H)$ は $\mathrm{Irr}\, G(F)$ 内のユニタリ化可能な同型類の集合と $G(F)$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合 $\Pi(G(F))$ の間の全単射を与える。

この事実を受けて $\mathrm{Irr}\, G(F)$ 内のユニタリ化可能な同型類の集合を $\Pi(G(F))$ と書くことにする。同様に $F^\times$ のユニタリ指標の群を $\Pi(F^\times) \subset \mathrm{Irr}\, F^\times$ で表す。

命題 2.15. $\Pi(G(F))$ は次の 5 タイプの同型類からなる。(a), (b) をまとめて既約**二乗可積分**表現、または**離散系列** (*discrete series*) 表現と呼び、(a)–(c) を既約**緩増加** (*tempered*) 表現という。

(a) 中心指標 ω_π がユニタリな $\pi \in \mathrm{Irr}_0\, G(F)$;

(b) $\mathrm{St}(\chi)$, $(\chi \in \Pi(F^\times))$;

(c) $\pi(\chi_1, \chi_2)$, $(\chi_i \in \Pi(F^\times))$;

(d) $\chi(\det)$, $(\chi \in \Pi(F^\times))$;

(e) **補系列表現** $\pi(\chi|\;|_F^s, \chi|\;|_F^{-s})$, $(\chi \in \Pi(F^\times), 0 < s < 1/2)$.

最後に反傾表現について補足しておこう。$\theta_2(g) := w^t g^{-1} w^{-1}$ とおけば、$\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ に対して $\pi^\vee \simeq \pi \circ \theta_2$ であることが知られている [BZ76, 定理 7.3]。$\theta_2(g) = \det g^{-1} \cdot g$ だから、これは

$$\pi^\vee \simeq \omega_\pi(\det)^{-1}\pi \tag{2.9}$$

とも書ける。

2.4 アルキメデス局所体上の GL_2 の表現

ここでは $F = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ の場合の $\mathrm{GL}_2(F)$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合 $\Pi(G(F))$ を記述する。実 Lie 群の表現論の文献は数多いが、ここでは [Wal88] を参照する。

2.4.1 Harish-Chandra 加群

$G(F)$ を実 Lie 群と見てその Lie 環を $\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathbb{M}_2(F)$, その複素化を

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_\mathbb{R} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} \simeq \begin{cases} \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) & F = \mathbb{R} \text{ のとき} \\ \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) & F = \mathbb{C} \text{ のとき} \end{cases}$$

と書く。$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ で $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 (1.4 節参照) を、$\boldsymbol{K}$ の Lie 環を $\mathfrak{k}_\mathbb{R}$ で表す。

(π, V) が **$(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群**とは、複素ベクトル空間 V 上の

- $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ 加群構造 $\pi : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_\mathbb{C}(V)$ と
- $\boldsymbol{K}$ の表現 $\pi : \boldsymbol{K} \to \mathrm{GL}_\mathbb{C}(V)$ で**局所有限**、つまり任意の $v \in V$ に対して $\mathrm{span}\,\pi(\boldsymbol{K})v$ が有限次元であるもの[10]

の対であって条件

$$\frac{d}{dt}\pi(\exp tX)v\Big|_{t=0} = \pi(X)v, \quad X \in \mathfrak{k}_\mathbb{R},\ v \in V, \tag{2.10}$$
$$\pi(k) \circ \pi(X) \circ \pi(k^{-1}) = \pi(\mathrm{Ad}(k)X), \quad k \in \boldsymbol{K},\ X \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \tag{2.11}$$

を満たすもののこととする。特にこのとき $\pi|_{\boldsymbol{K}}$ は既約 (ユニタリまたは有理) 表現の直和に分解する。$\boldsymbol{K}$ の各既約表現 τ の $\pi|_{\boldsymbol{K}}$ での等型部分空間 $V[\tau]$ が有限次元のとき (π, V) は**許容 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群**であるという。さらに長さが有限な $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群を $G(F)$ の ***Harish-Chandra* 加群**という。このノートでは $G(F)$ の既約 Harish-Chandra 加群の同型類の集合を $\mathrm{Irr}\, G(F)$ と書くことにする。

Harish-Chandra 加群 (π, V) が**ユニタリ化可能** (*unitarizable*) とは、エルミート内積 $(\ ,\ ) : V \otimes_\mathbb{R} V \to \mathbb{C}$ であって

- $(\pi(X)\xi, \xi') = -(\xi, \pi(X)\xi'), (X \in \mathfrak{g}, \xi, \xi' \in V)$;

[10] $\boldsymbol{K}$ の有限次元表現 (ρ, E) は $\mathbb{C}$ 代数群の準同型 $\rho : \boldsymbol{K}_\mathbb{C} \to \mathrm{GL}_\mathbb{C}(E)$ の制限にほかならないから、これは $\boldsymbol{K} \ni k \mapsto \pi(k)v \in \mathrm{span}\,\pi(\boldsymbol{K})v$ が多項式写像であることを保証する。

- $(\pi(k)\xi, \xi') = (\xi, \pi(k^{-1})\xi')$, $(k \in \boldsymbol{K}, \xi, \xi' \in V)$

を満たすものが存在することとする。(実際は一つ目を満たす (,) があれば、それを $\boldsymbol{K}$ 上で平均して二つ目も成り立つようにできる。) $G(F)$ のユニタリ表現 (π, H) に対して

$$H_{\boldsymbol{K}} := \left\{ \xi \in H \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(i)} & G(F) \ni g \mapsto \pi(g)\xi \in H \text{ は } C^\infty \text{ 級} \\ \text{(ii)} & \dim \operatorname{span} \pi(\boldsymbol{K})\xi < +\infty \end{array} \right\}$$

をその $\boldsymbol{K}$ **有限ベクトル**の空間という。$H_{\boldsymbol{K}}$ には

$$\pi(X)\xi := \frac{d}{dt}\pi(\exp tX)\xi\Big|_{t=0}, \quad X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$$

により自然に $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群の構造が入る。

事実 2.16 ([HC53], [Wal88] の 3.4 節)**.** (i) $G(F)$ の既約ユニタリ表現 (π, H) に対して $(\pi, H_{\boldsymbol{K}})$ は既約 Harish-Chandra 加群である。
(ii) $H \mapsto H_{\boldsymbol{K}}$ は $\Pi(G(F))$ から $\operatorname{Irr} G(F)$ 内のユニタリ化可能な元の集合 $\operatorname{Irr}_{\text{unit}} G(F)$ への単射である。

2.4.2 $G(F)$ の既約 Harish-Chandra 加群

$T(F)$ の有限次元表現 (τ, V) に対して

(i) $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \tau\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) \left|\frac{a}{d}\right|_F^{1/2} f(g)$,

(ii) $\operatorname{span}\{G(F) \ni g \mapsto f(gk) \in \mathbb{C} \,|\, k \in \boldsymbol{K}\}$ は有限次元。

を満たす函数の空間を $I_B^G(V)$ と書けば、これは右移動作用

$$R(X)f(g) := \frac{d}{dt}f(g \exp tX)\Big|_{t=0}, \quad X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$$

により自然に Harish-Chandra 加群になる。これを (τ, V) からの (B に沿っての) **放物的誘導 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群**といい、$(I_B^G(\tau), I_B^G(V))$ と書く。

事実 2.16 から $\Pi(G(F))$ を記述するには $\operatorname{Irr}_{\text{unit}} G(F)$ を把握することが必要である。それを含む $\operatorname{Irr} G(F)$ を記述するには次の事実が出発点となる。(系 2.6 と比較せよ。)

事実 2.17 (Casselman の部分表現定理, [Wal88] の 3.8.3)**.** $\operatorname{Irr} G(F)$ の任意の元はある $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$, $(\chi_i \in \operatorname{Irr} F^\times)$ の部分表現に同型である。

そこで一般主系列表現 $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の組成因子を決定したい。これは Cartan-Weyl 理論と同様の手筋でできる。例として $F = \mathbb{R}$ の場合を解説しよう。

$\chi_1\chi_2^{-1} = |\,|_{\mathbb{R}}^{s}\mathrm{sgn}^{\epsilon}$, $(s \in \mathbb{C}, \epsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ と書く。パリティ条件 $n \equiv \epsilon \pmod 2$ を満たす $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f_n\Bigl(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\Bigr) := \chi_1(a)\chi_2(d)\left|\frac{a}{d}\right|_{\mathbb{R}}^{1/2} e^{in\theta}$$

は岩澤分解の取り方によらず定義可能な $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の元で、$\{f_n \,|\, n \in \epsilon + 2\mathbb{Z}\}$ は $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の基底をなす。$\mathfrak{g}$ は 1.3 節の (1.3) の元とスカラー行列で生成される。スカラー行列は $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ 全体に中心指標 $\chi_1\chi_2$ の微分で作用する。それ以外の元は

$$R(U)f_n = in\varphi_n, \quad R(X)f_n = \frac{s+1+n}{2}f_{n+2}, \quad R(Y)f_n = \frac{s+1-n}{2}f_{n-2}$$

と作用することは容易に確かめられる [JL70, 補題 5.6]。従って $s \notin \epsilon - 1 + 2\mathbb{Z}$ のときは $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ は $\mathfrak{g}$ 加群としてすでに既約である。そうでないとき

(i) $s \geq 0$ のとき。$s = k - 1$, $(k \in \epsilon + 2\mathbb{Z})$ と書けば $R(X)f_{-k} = R(Y)f_k = 0$ より、$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の真部分 $\mathfrak{g}$ 加群は

$$V_+ := \mathrm{span}\,\{f_n \,|\, n \in k + 2\mathbb{N}\}, \quad V_- := \mathrm{span}\,\{f_n \,|\, n \in -k - 2\mathbb{N}\}$$

と、$k \geq 2$ のときには $V_+ \oplus V_-$ である。

(ii) $s < 0$ のとき。$s = 1 - k$, $(k \in \epsilon + 1 + 2\mathbb{Z})$ と書くと $R(X)f_{k-2} = 0$, $R(Y)f_{2-k} = 0$ より、$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の真部分 $\mathfrak{g}$ 加群は

$$V_+ := \mathrm{span}\,\{f_n \,|\, n \in 2 - k + 2\mathbb{N}\}, \quad V_- := \mathrm{span}\,\{f_n \,|\, n \in k - 2 - 2\mathbb{N}\}$$

と $V_+ \cap V_- = \mathrm{span}\,\{f_{k-2}, f_{k-4}, \ldots, f_{2-k}\}$ のみである。

一方 $\boldsymbol{K} = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \rtimes \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ の作用は

$$R\Bigl(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\Bigr)f_n = e^{in\theta}f_n, \quad R\Bigl(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Bigr)f_n = \chi_2(-1)f_{-n}$$

となり、上の $V_\pm$ は後者の作用で移り合うことがわかる。以上の考察から次の命題は容易に従う。

命題 2.18. (i) $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}\,\mathbb{R}^\times$ が $\chi_1\chi_2^{-1} \neq |\ |_{\mathbb{R}}^n \mathrm{sgn}^{n+1}, (\forall n \neq 0, \in \mathbb{Z})$ を満たすとき、$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ は既約。これを $\pi(\chi_1, \chi_2)$ と書く。
(ii) そうでないとき、必要なら χ_1, χ_2 を並べ替えて $\chi_1\chi_2^{-1} = |\ |_{\mathbb{R}}^{k-1}\mathrm{sgn}^k, (k \in 2 + \mathbb{N})$ と書ける。このとき完全列

$$0 \longrightarrow \pi(\omega_\lambda^{k-1}) \longrightarrow I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \longrightarrow \chi_2(\det)|\det|_{\mathbb{R}}^{1/2}\rho_{k-1} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \chi_2(\det)|\det|_{\mathbb{R}}^{1/2}\rho_{k-1} \longrightarrow I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1) \longrightarrow \pi(\omega_\lambda^{k-1}) \longrightarrow 0$$

がある。ただし $\lambda \in \mathbb{C}$ は $\chi_2(a) = a^{\lambda+(1-k)/2}, (a \in \mathbb{R}_+^\times)$ となるもので、$\pi(\omega_\lambda^{k-1})$ は $\mathbb{C}^\times$ の擬指標 $\omega_\lambda^{k-1}(z) := (z/\bar{z})^{(k-1)/2}(z\bar{z})^\lambda$ に対応する既約二面体型表現である。また ρ_n は 2 変数 $n-1$ 次斉次多項式の空間 $S^{n-1}[X, Y]$ に $G(\mathbb{R})$ を

$$\rho_n\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) f(X, Y) := f(aX + cY, bX + dY)$$

と作用させて得られる n 次元既約表現を表す。
(iii) $\mathrm{Irr}\,G(\mathbb{R})$ の任意の元は (i), (ii) に現れた既約表現のいずれかに同型である。また (i), (ii) の既約表現のうち互いに同型なものは $\pi(\chi_1, \chi_2) \simeq \pi(\chi_2, \chi_1)$ だけである。

注意 2.19. (i) $\pi(\omega_\lambda^{k-1})$ の中心指標は $|\ |_{\mathbb{R}}^{2\lambda}\mathrm{sgn}^k$ で、その $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ への制限はウェイト k の正則離散系列表現とウェイト $-k$ の反正則離散系列表現の直和である。記号の示すとおり $\pi(\omega_\lambda^{k-1})$ はこの二つの条件で特徴づけられる。
(ii) 命題の (ii) の状況で $\{\chi_1, \chi_2\} \neq \{\chi_1\mathrm{sgn}, \chi_2\mathrm{sgn}\}$ であるが、$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ と $I_B^G(\chi_1\mathrm{sgn} \boxtimes \chi_2\mathrm{sgn})$ は組成因子 $\pi(\omega_\lambda^{k-1})$ を共有する。つまりアルキメデス的な場合には命題 2.8 (iii) の類似は成り立たない。

$F = \mathbb{C}$ の場合の分類結果は次のようになる。上の命題の $(\rho_n, S^{n-1}[X, Y])$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の既約表現に延びるが、その

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \,\middle|\, z\bar{z} + w\bar{w} = 1\right\}$$

への制限をやはり ρ_n で表す。$\Pi(\mathrm{SU}_2(\mathbb{R})) = \{\rho_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ である。この ρ_n の行列成分の空間を $\mathcal{A}(\rho_n)$ と書く。$f \in I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ で任意の $g \in G(\mathbb{C})$ に対して $\mathrm{SU}_2(\mathbb{R}) \ni k \mapsto f(gk) \in \mathbb{C}$ が $\mathcal{A}(\rho_n)$ に属するようなものたちのなす空間を $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)[\rho_n]$ で表す。$\chi_1\chi_2^{-1}(z) = (z\bar{z})^s(z/\bar{z})^{k/2}, (s \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z})$ と書けば、$\boldsymbol{K}$ 加群としての分解

$$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) = \bigoplus_{n \in |k|+1+2\mathbb{N}} I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)[\rho_n]$$

がある。

命題 2.20. (i) $\chi_1\chi_2^{-1}(z) \neq z^p\bar{z}^q, (\forall p,\ q \in \mathbb{Z}, pq > 0)$ のとき、$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ は既約である。これを $\pi(\chi_1, \chi_2)$ と書く。
(ii) そうでないとき、必要なら χ_1, χ_2 を入れ替えて、$\chi_1\chi_2^{-1}(z) = z^p\bar{z}^q, (p,\ q \in \mathbb{Z}_{>0})$ であるとしてよい。このとき完全列

$$0 \longrightarrow \sigma(\chi_1, \chi_2) \longrightarrow I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \longrightarrow \chi_2(\det)|\det|_{\mathbb{C}}^{1/2}\rho_p \otimes \bar{\rho}_q \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \chi_2(\det)|\det|_{\mathbb{C}}^{1/2}\rho_p \otimes \bar{\rho}_q \longrightarrow I_B^G(\chi_2 \boxtimes \chi_1) \longrightarrow \sigma(\chi_1, \chi_2) \longrightarrow 0$$

がある。ただし $\sigma(\chi_1, \chi_2)$ は既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 $\bigoplus_{k \in p+q+1+2\mathbb{N}} I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)[\rho_k]$ であり、$\bar{\rho}_q$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の表現 ρ_q の複素共役を表す。
(iii) $\mathrm{Irr}\, G(\mathbb{C})$ の任意の元は (i), (ii) に現れた既約 Harish-Chandra 加群のいずれかに同型である。また (i), (ii) に現れた既約 Harish-Chandra 加群のうち互いに同型なものは $\pi(\chi_1, \chi_2) \simeq \pi(\chi_2, \chi_1), \sigma(\chi_1, \chi_2) \simeq \sigma(\chi_2, \chi_1)$ のみである。

次にユニタリ化可能既約 Harish-Chandra 加群を記述する。

命題 2.21. (i) $\mathrm{Irr}_{\mathrm{unit}}\, G(\mathbb{R})$ は次の 4 タイプの Harish-Chandra 加群からなる。(a), (b) のタイプをまとめて既約**緩増加**Harish-Chandra 加群という。

(a) **離散系列** $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 $\pi(\omega_\lambda^{k-1}), (\lambda \in i\mathbb{R}, k \geq 2, \in \mathbb{Z})$;

(b) **主系列** $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 $\pi(\chi_1, \chi_2), (\chi_1, \chi_2 \in \Pi(\mathbb{R}^\times))$;

(c) 指標 $\chi(\det), (\chi \in \Pi(\mathbb{R}^\times))$;

(d) **補系列** $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 $\pi(\chi|\,|_{\mathbb{R}}^s, \chi|\,|_{\mathbb{R}}^{-s}), (\chi \in \Pi(\mathbb{R}^\times), 0 < s < 1/2)$.

(ii) $\mathrm{Irr}_{\mathrm{unit}}\, G(\mathbb{C})$ は次の Harish-Chandra 加群からなる。(a) の表現のみが緩増加である。

(a) 主系列 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 $\pi(\chi_1, \chi_2), (\chi_1, \chi_2 \in \Pi(\mathbb{C}^\times))$;

(b) 指標 $\chi(\det), (\chi \in \Pi(\mathbb{R}^\times))$;

(c) 補系列 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 $\pi(\chi|\,|_{\mathbb{C}}^s, \chi|\,|_{\mathbb{C}}^{-s}), (\chi \in \Pi(\mathbb{C}^\times), 0 < s < 1/2)$.

これらのユニタリ化可能 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群はいずれも $G(F)$ の既約ユニタリ表現の $\boldsymbol{K}$ 有限ベクトルの空間として得られることが容易に確かめられる。事実 2.16 と併せて、アルキメデス的な場合にも $\mathrm{Irr}_{\mathrm{unit}}\, G(F)$ と $\Pi(G(F))$ を同一視してよいことがわかる。

3　GL_2 の標準 L 因子

ここでは前節で分類した $G(F)$ の既約表現 (アルキメデス的な場合には Harish-Chandra 加群) に標準 L 因子、ε 因子という Euler 因子を対応させ、それによって前節では捉えきれなかった超カスプ表現も含めてすべての既約表現にラベル付けができることを見る。

3.1 Hecke の量指標 L 因子

Hecke の量指標は "$\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$ 上の保型形式" であるが、Hecke 自身によるその定義は不分岐およびアルキメデス局所成分だけを記述するためわかりにくいものだった。それがイデール類群の指標であることを看破したのは Weil であり、量指標に付随する L 函数の基本性質は [Wei95, VII 章] で詳説されている。しかし現代整数論、保型 L 函数の研究に必要となる分岐素点での局所因子 (特に ε 因子) および局所函数等式を確立したのは Tate の学位論文 [Tat86] である。ここではこの Tate の結果を [Tat79] に述べられている形で解説する。

3.1.1 非アルキメデス局所理論

F を非アルキメデス局所体とし、2 節で用意した記号は断りなく用いる。F 上の Schwartz-Bruhat 函数の空間を $\mathcal{S}(F)$ と書く。非自明指標 $\psi: F \to \mathbb{C}^1$ を固定し、$d_\psi x$ を ψ **自己双対**、すなわち $\Phi \in \mathcal{S}(F)$ の Fourier 変換

$$\widehat{\Phi}(x) := \int_F \Phi(y)\psi(xy)\, d_\psi y$$

が Fourier 逆公式

$$\int_F \widehat{\Phi}(y)\psi(-xy)\, d_\psi y = \Phi(x)$$

を満たすような F 上の不変測度とする。ψ の**位数**、つまり ψ が $\mathfrak{p}^{-n}$ 上で自明であるような最大の $n \in \mathbb{Z}$ を $\mathrm{ord}\psi$ と書くとき、$\int_{\mathcal{O}} d_\psi x = q^{-\mathrm{ord}\psi/2}$ であることを覚えておくと計算上便利である。

局所ゼータ積分　$F^\times$ 上の任意の不変測度 $dx^\times$ を固定し、$\chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times, \Phi \in \mathcal{S}(F)$ に対する *Tate* **のゼータ積分**を

$$Z(s, \chi, \Phi) := \int_{F^\times} \Phi(x)\chi(x)|x|_F^s\, dx^\times$$

と定める。形式的にこれは

$$\begin{aligned} Z(s, \chi, \Phi) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\varpi^n \mathcal{O}^\times} \Phi(x)\chi(x)|x|_F^s\, dx^\times \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\chi(\varpi)q^{-s})^n \int_{\mathcal{O}^\times} \Phi(\varpi^n x)\chi(x)\, dx^\times \end{aligned}$$

と書ける。また $\Phi \in \mathcal{S}(F)$ に対して $N \in \mathbb{N}$ で $\mathrm{supp}\Phi \subset \mathfrak{p}^{-N}$ かつ Φ が $\mathfrak{p}^N$ 剰余類上で定数となるものが取れる。よって χ が不分岐ならば

$$\begin{aligned}
Z(s,\chi,\Phi) &= \sum_{n=-N}^{N-1} (\chi(\varpi)q^{-s})^n \int_{\mathcal{O}^\times} \Phi(\varpi^n x)\chi(x)\,dx^\times \\
&\qquad\qquad + \mathrm{meas}(\mathcal{O}^\times)\Phi(0) \sum_{n=N}^{\infty} (\chi(\varpi)q^{-s})^n \\
&= \sum_{n=-N}^{N-1} \left(\chi(\varpi)^n \int_{\mathcal{O}^\times} \Phi(\varpi^n x)\chi(x)\,dx^\times\right) q^{-ns} \\
&\qquad\qquad + \frac{\mathrm{meas}(\mathcal{O}^\times)\Phi(0)\chi(\varpi)^N q^{-Ns}}{1-\chi(\varpi)q^{-s}};
\end{aligned} \tag{3.1}$$

χ が分岐しているならば

$$\begin{aligned}
Z(s,\chi,\Phi) &= \sum_{n=-N}^{N-1} (\chi(\varpi)q^{-s})^n \int_{\mathcal{O}^\times} \Phi(\varpi^n x)\chi(x)\,dx^\times \\
&\qquad\qquad + \sum_{n=N}^{\infty} (\chi(\varpi)q^{-s})^n \Phi(0) \int_{\mathcal{O}^\times} \chi(x)\,dx^\times \\
&= \sum_{n=-N}^{N-1} \left(\chi(\varpi)^n \int_{\mathcal{O}^\times} \Phi(\varpi^n x)\chi(x)\,dx^\times\right) q^{-ns}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

と書ける。

定理 3.1. (i) $Z(s,\chi,\Phi)$ は $\Re s \gg 0$ で絶対収束し q^{-s} の有理函数を定める。
(ii) L 因子

$$L(s,\chi) := \begin{cases} \dfrac{1}{1-\chi(\varpi)q^{-s}} & \chi \text{ が不分岐のとき} \\ 1 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

は $Z(s,\chi,\Phi)/L(s,\chi) \in \mathbb{C}[q^s, q^{-s}]$ を満たす。しかも $Z(s,\chi,\Phi_\chi) = L(s,\chi)$ となる $\Phi_\chi \in \mathcal{S}(F)$ がある。
(iii) 特に χ が不分岐で Φ が $\mathcal{O}$ の特性函数 $1_\mathcal{O}$ なら、$Z(s,\chi,1_\mathcal{O}) = \mathrm{vol}\,\mathcal{O}^\times \cdot L(s,\chi)$.
(iv) s の指数函数 $\varepsilon(s,\chi,\psi)$ で**局所函数等式**

$$\frac{Z(1-s,\chi^{-1},\widehat{\Phi})}{L(1-s,\chi^{-1})} = \varepsilon(s,\chi,\psi)\frac{Z(s,\chi,\Phi)}{L(s,\chi)}$$

が成り立つものがただ一つある。

局所定数の計算　(i) ψ を $\psi^a(x) := \psi(ax), (a \in F^\times)$ で取り替えると、Fourier 変換は

$$\mathcal{F}_{\psi^a}\Phi(x) = \int_F \Phi(y)\psi^a(xy)\,d_{\psi^a}y = \int_F \Phi(y)\psi(axy)|a|_F^{1/2}\,d_\psi y = |a|_F^{1/2}\widehat{\Phi}(ax)$$

になるから、

$$\begin{aligned} Z(1-s,\chi^{-1},\mathcal{F}_{\psi^a}\Phi) = &\int_{F^\times} |a|_F^{1/2}\widehat{\Phi}(x)\chi^{-1}(a^{-1}x)|a^{-1}x|_F^{1-s}\,dx^\times \\ =&\chi(a)|a|_F^{s-1/2}Z(1-s,\chi^{-1},\widehat{\Phi}). \end{aligned}$$

よって

$$\boxed{\varepsilon(s,\chi,\psi^a) = \chi(a)|a|_F^{s-1/2}\varepsilon(s,\chi,\psi)} \tag{3.3}$$

である。特に χ が不分岐ならば

$$\boxed{\varepsilon(s,\chi,\psi) = \chi(\varpi)^{\operatorname{ord}\psi}q^{(1/2-s)\operatorname{ord}\psi}} \tag{3.4}$$

である。

(ii) χ が分岐している場合。簡単のために $\mathcal{O}^\times$ の測度が 1 となる $dx^\times$ を取る。

$$\Phi_\chi(x) := \begin{cases} \chi^{-1}(x) & x \in \mathcal{O}^\times \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

とおけば明らかに $Z(s,\chi,\Phi_\chi) = 1 = L(s,\chi)$ である。一方、χ の**導手** (*conductor*)[11] $a(\chi) \in \mathbb{N}$ を使うと、

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_\chi(x) &= \int_{\mathcal{O}^\times} \chi^{-1}(y)\psi(xy)\,d_\psi y = \sum_{\gamma\in\mathcal{O}^\times/(1+\mathfrak{p}^{a(\chi)})} \int_{1+\mathfrak{p}^{a(\chi)}} \chi^{-1}(\gamma y)\psi(x\gamma y)\,d_\psi y \\ &= \sum_{\gamma\in\mathcal{O}^\times/(1+\mathfrak{p}^{a(\chi)})} \chi^{-1}(\gamma)\int_{\mathfrak{p}^{a(\chi)}} \psi(x\gamma(1+y))\,d_\psi y \\ &= \sum_{\gamma\in\mathcal{O}^\times/(1+\mathfrak{p}^{a(\chi)})} \chi^{-1}(\gamma)\psi(\gamma x)\int_{\mathfrak{p}^{a(\chi)}} \psi(\gamma xy)\,d_\psi y \end{aligned}$$

を得る。右辺の積分は $\mathfrak{p}^{a(\chi)}$ の ψ 双対格子 $\mathfrak{p}^{-a(\chi)-\operatorname{ord}\psi}$ の特性函数の $(\operatorname{vol}\mathfrak{p}^{a(\chi)} = q^{-a(\chi)-\operatorname{ord}\psi/2})$ 倍に等しい。よって

$$\begin{aligned} \varepsilon(s,\chi,\psi) =&\frac{Z(1-s,\chi^{-1},\widehat{\Phi}_\chi)L(s,\chi)}{L(1-s,\chi^{-1})Z(s,\chi,\Phi_\chi)} = Z(1-s,\chi^{-1},\widehat{\Phi}_\chi) \\ =&\int_{F^\times}\sum_{\gamma\in\mathcal{O}^\times/(1+\mathfrak{p}^{a(\chi)})} \frac{\chi^{-1}(\gamma)\psi(\gamma x)\mathbb{1}_{\mathfrak{p}^{-a(\chi)-\operatorname{ord}\psi}}(x)}{q^{a(\chi)+\operatorname{ord}\psi/2}}\chi^{-1}(x)|x|_F^{1-s}\,dx^\times \\ =&q^{-a(\chi)-\operatorname{ord}\psi/2}\sum_{\gamma\in\mathcal{O}^\times/(1+\mathfrak{p}^{a(\chi)})}\int_{\mathfrak{p}^{-a(\chi)-\operatorname{ord}\psi}} \chi^{-1}(\gamma x)\psi(\gamma x)|\gamma x|_F^{1-s}\,dx^\times \\ =&(1-q^{-1})q^{-\operatorname{ord}\psi/2}\int_{\mathfrak{p}^{-a(\chi)-\operatorname{ord}\psi}} \chi^{-1}(x)\psi(x)|x|_F^{1-s}\,dx^\times. \end{aligned} \tag{3.5}$$

[11] $\chi|_{1+\mathfrak{p}^{a(\chi)}} = \mathbb{1}$ となる最小の $a(\chi) \in \mathbb{N}$ のこと。$\mathfrak{c}(\chi) := \mathfrak{p}^{a(\chi)}$ を χ の導手と呼ぶこともある。

ここで (3.2) から右辺の積分は

$$\int_{\mathfrak{p}^{-a(\chi)-\mathrm{ord}\psi}} \chi^{-1}(\gamma x)\psi(\gamma x)|\gamma x|_F^{1-s}\, dx^\times$$
$$= \sum_{n=\mathrm{ord}\psi+1}^{\mathrm{ord}\psi+a(\chi)} q^{n(1-s)} \int_{\mathfrak{p}^{-n}\smallsetminus\mathfrak{p}^{1-n}} \chi^{-1}(\gamma x)\psi(\gamma x)\, dx^\times$$

$n > \mathrm{ord}\psi$ から剰余類分解 $\mathfrak{p}^{-n} \smallsetminus \mathfrak{p}^{1-n} = \coprod_{\xi\in(\mathfrak{p}^{-n}\smallsetminus\mathfrak{p}^{1-n})/\mathfrak{p}^{-\mathrm{ord}\psi}} \xi + \mathfrak{p}^{-\mathrm{ord}\psi}$ があるので

$$= \sum_{n=\mathrm{ord}\psi+1}^{\mathrm{ord}\psi+a(\chi)} q^{n(1-s)} \sum_{\xi\in(\mathfrak{p}^{-n}\smallsetminus\mathfrak{p}^{1-n})/\mathfrak{p}^{-\mathrm{ord}\psi}} \psi(\gamma\xi) \int_{\xi+\mathfrak{p}^{-\mathrm{ord}\psi}} \chi^{-1}(\gamma x)\, dx^\times$$

$\xi \in \varpi^{-n}\mathcal{O}^\times$ から $\xi + \mathfrak{p}^{-\mathrm{ord}\psi} = \xi(1+\mathfrak{p}^{n-\mathrm{ord}\psi})$ ゆえ

$$= \sum_{n=\mathrm{ord}\psi+1}^{\mathrm{ord}\psi+a(\chi)} q^{n(1-s)} \sum_{\xi\in(\mathfrak{p}^{-n}\smallsetminus\mathfrak{p}^{1-n})/\mathfrak{p}^{-\mathrm{ord}\psi}} \psi(\gamma\xi)\chi^{-1}(\gamma\xi) \int_{1+\mathfrak{p}^{n-\mathrm{ord}\psi}} \chi^{-1}(x)\, dx^\times$$

となる。この積分は $\mathfrak{p}^{n-\mathrm{ord}\psi} \subset \mathfrak{p}^{a(\chi)}$, つまり $n = \mathrm{ord}\psi + a(\chi)$ のとき以外は消えている。これを (3.5) に代入して

$$\boxed{\varepsilon(s,\chi,\psi) = q^{a(\chi)+\mathrm{ord}\psi/2} q^{-(a(\chi)+\mathrm{ord}\psi)s}(1-q^{-1}) \int_{\varpi^{-a(\chi)-\mathrm{ord}\psi}\mathcal{O}^\times} \chi^{-1}(x)\psi(x)\, dx^\times} \tag{3.6}$$

を得る。

3.1.2 アルキメデス局所理論

F をアルキメデス局所体とする。F 上の *Schwartz* **空間**、つまり滑らかで急減少な函数の空間を $\mathcal{S}(F)$ とする。非自明指標 $\psi : F \to \mathbb{C}^1$ はある $a \in F^\times$ を使って

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp(2\pi i a x) & F = \mathbb{R}\text{ のとき} \\ \exp(2\pi i \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(ax)) & F = \mathbb{C}\text{ のとき} \end{cases}$$

と書け、対する ψ 自己双対測度は Lebesgue 測度を使って

$$d_\psi x = \begin{cases} |a|_{\mathbb{R}}^{1/2} dx & F = \mathbb{R}\text{ のとき} \\ |a|_{\mathbb{C}}^{1/2} |dx \wedge d\bar{x}| & F = \mathbb{C}\text{ のとき} \end{cases}$$

となる。このとき [Wei95] の意味の ψ **標準函数**の空間を

$$\mathcal{S}_\psi(F) := \begin{cases} \{e^{-\pi|a|_{\mathbb{R}}x^2} P(x) \mid P(x) \in \mathbb{C}[x]\} & F = \mathbb{R}\text{ のとき} \\ \{e^{-2\pi|a|_{\mathbb{C}}^{1/2} x\bar{x}} P(x,\bar{x}) \mid P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]\} & F = \mathbb{C}\text{ のとき} \end{cases}$$

と定める[12]。

Tate の局所ゼータ積分を計算しよう。$F=\mathbb{R}$ のとき、$\chi\in\mathrm{Irr}\,\mathbb{R}^\times$ は $\chi(x)=|x|_\mathbb{R}^\lambda\mathrm{sgn}(x)^\epsilon$, $(\lambda\in\mathbb{C},\epsilon=0,1)$ と書ける。$dx^\times:=dx/|x|_\mathbb{R}$ とする。$\Phi_n(x):=e^{-\pi|a|_\mathbb{R}x^2}x^n$, $(n\in\mathbb{N})$ たちは $\mathcal{S}_\psi(\mathbb{R})$ の基底をなす。このとき

$$Z(s,\chi,\Phi_n)=\int_{\mathbb{R}^\times}e^{-\pi|a|_\mathbb{R}x^2}x^n\mathrm{sgn}^\epsilon(x)|x|_\mathbb{R}^{\lambda+s-1}\,dx$$

は $n\not\equiv\epsilon\pmod 2$ なら奇函数の積分となって 0, $n\equiv\epsilon\pmod 2$ なら $n+\Re(\lambda+s)>0$ の範囲で

$$\begin{aligned}Z(s,\chi,\Phi_n)=&2\int_0^\infty e^{-\pi|a|_\mathbb{R}x^2}x^{n+\lambda+s}\,dx^\times\\=&2(\pi|a|_\mathbb{R})^{-(n+\lambda+s)/2}\int_0^\infty e^{-y^2}y^{n+\lambda+s}\,dy^\times\\=&(\pi|a|_\mathbb{R})^{-(n+\lambda+s)/2}\int_0^\infty e^{-t}t^{(n+\lambda+s)/2}\,dt^\times\\=&|a|_\mathbb{R}^{-(n+\lambda+s)/2}\cdot\pi^{-(n+\lambda+s)/2}\Gamma\Big(\frac{n+\lambda+s}{2}\Big)\end{aligned}\tag{3.7}$$

となる。$\Gamma(s)$ は勿論ガンマ函数である。

$F=\mathbb{C}$ のとき、$\chi\in\mathrm{Irr}\,\mathbb{C}^\times$ は $\chi(z)=|z|_\mathbb{C}^\lambda(z/\bar z)^{m/2}$, $(\lambda\in\mathbb{C}, m\in\mathbb{Z})$ と書ける。やはり $\Phi_{n,n'}(z):=e^{-2\pi|a|_\mathbb{C}^{1/2}z\bar z}z^n\bar z^{n'}$, $(n,n'\in\mathbb{N})$ は $\mathcal{S}_\psi(\mathbb{C})$ の基底をなす。乗法群 $\mathbb{C}^\times$ 上の不変測度は $dz^\times=dx\,dy/|z|_\mathbb{C}$, $(z=x+iy)$ と選んでおく。ゼータ積分を極座標で書くと

$$\begin{aligned}Z(s,\chi,\Phi_{n,n'})=&\int_{\mathbb{C}^\times}e^{-2\pi|a|_\mathbb{C}^{1/2}z\bar z}|z|_\mathbb{C}^{(n+n')/2+\lambda+s-1}\Big(\frac{z}{\bar z}\Big)^{(m+n-n')/2}\,dx\,dy\\=&\int_0^\infty e^{-2\pi|a|_\mathbb{C}^{1/2}r^2}r^{n+n'+2(\lambda+s-1)}r\,dr\int_0^{2\pi}e^{i(m+n-n')\theta}\,d\theta\end{aligned}$$

となる。これは $n'\neq m+n$ のとき 0, $n'=m+n$ のときは (i) と同様の変形を使って $m/2+n+\Re(\lambda+s)>0$ で

$$\begin{aligned}Z(s,\chi,\Phi_{n,m+n})=&2\pi\int_0^\infty e^{-2\pi|a|_\mathbb{C}^{1/2}r^2}r^{m+2(n+\lambda+s)}\,dr^\times\\=&|a|_\mathbb{C}^{-m/4-(n+\lambda+s)/2}\pi(2\pi)^{-(m/2+\lambda+s+n)}\Gamma\Big(\frac{m}{2}+\lambda+s+n\Big)\end{aligned}\tag{3.8}$$

となる。$n'\in\mathbb{N}$ から $n\geq\max(0,-m)$ でなくてはならないことに注意する。

---

[12] $F=\mathbb{R}$ とする。Gauss 分布の積分式 $\int_\mathbb{R}e^{-\pi x^2}\,dx=1$ の左辺に Cauchy の積分定理を用いて

$$e^{\pi y^2}\int_\mathbb{R}e^{-\pi x^2}e^{2\pi ixy}\,dx=\int_{\mathbb{R}+iy}e^{-\pi z^2}\,dz=1$$

を得る。(等高線積分の評価は簡単である。) これを変数変換して $e^{-\pi|a|_\mathbb{R}x^2}$ の ψ についての Fourier 変換は自分自身であることが確かめられる。その式を順次微分すれば $\mathcal{S}_\psi(\mathbb{R})$ が ψ についての Fourier 変換で保たれることがわかる。$F=\mathbb{C}$ の場合も上の議論を 2 変数にすることで同じ主張が示される。

定理 3.2. (i) $\chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times$, $\Phi \in \mathcal{S}(F)$ に対して $Z(s,\chi,\Phi)$ は $\Re s \gg 0$ で絶対収束し、$s \in \mathbb{C}$ の有理型函数に延びる。
(ii) $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ として

$$L(s,\chi) := \begin{cases} \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\lambda+\epsilon) & F=\mathbb{R},\ \chi = |\ |_{\mathbb{R}}^{\lambda}\mathrm{sgn}^{\epsilon} \text{ のとき} \\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s+\lambda-|m|/2) & F=\mathbb{C},\ \chi(z) = |z|_{\mathbb{C}}^{\lambda}(z/\bar{z})^{m/2} \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくと、$Z(s,\chi,\Phi)/L(s,\chi)$, $(\Phi \in \mathcal{S}(F))$ は $s \in \mathbb{C}$ の整函数であり、ある $\Phi_\chi \in \mathcal{S}_\psi(F)$ に対して $Z(s,\chi,\Phi_\chi) = L(s,\chi)$ となる。
(iii) ある指数函数 $\varepsilon(s,\chi,\psi) \in \mathbb{C}^\times$ があって、定理 3.1 (iv) と同じ局所函数等式が成り立つ。

局所定数の計算　関係式 (3.3) は常に成り立つから、計算は

$$\psi_0 := \begin{cases} \exp(2\pi i \cdot) & F=\mathbb{R} \text{ のとき} \\ \exp(2\pi i \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\cdot)) & F=\mathbb{C} \text{ のとき} \end{cases}$$

の場合に帰着される。

(i) $F=\mathbb{R}$ のとき。$dx^\times := dx/|x|_{\mathbb{R}}$ (dx は Lebesgue 測度) と取れば、(3.7) から $\chi = |\ |_{\mathbb{R}}^{\lambda}\mathrm{sgn}^{\epsilon}$, $(\lambda \in \mathbb{C}, \epsilon = 0,1)$ に対して $\Phi_\chi := \Phi_\epsilon$ が定理 3.2 (ii) を満たすことがわかる。一方 $\psi = \psi_0$ のときには

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} e^{2\pi i x y}\, dy = e^{-\pi x^2}$$

の両辺を x について微分して $\widehat{\Phi}_1 = i\Phi_1$ がわかるから、$\widehat{\Phi}_\chi = i^\epsilon \Phi_\chi$ である。よって $\Phi_{\chi^{-1}} = \Phi_\chi$ と取れることに注意すれば

$$\begin{aligned} \boxed{\varepsilon(s,\chi,\psi)} &= \chi(a)|a|_{\mathbb{R}}^{s-1/2}\varepsilon(s,\chi,\psi_0) \\ &= \mathrm{sgn}(a)^\epsilon |a|_{\mathbb{R}}^{\lambda+s-1/2}\frac{Z(1-s,\chi^{-1},i^\epsilon\Phi_\chi)}{L(1-s,\chi^{-1})} \boxed{= (\mathrm{sgn}(a)i)^\epsilon |a|_{\mathbb{R}}^{\lambda+s-1/2}.} \end{aligned} \tag{3.9}$$

(ii) $F=\mathbb{C}$ のとき。やはり $dz^\times = |dz \wedge d\bar{z}|/|z|_{\mathbb{C}} = 2dx\,dy/|z|_{\mathbb{C}}$ とすれば、(3.8) から $\chi(z) = |z|_{\mathbb{C}}^{\lambda}(z/\bar{z})^{m/2}$, $(\lambda \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{Z})$ に対して

$$\Phi_\chi(z) = \begin{cases} (2\pi)^{-1}\Phi_{0,m}(z) & m \geq 0 \text{ のとき} \\ (2\pi)^{-1}\Phi_{-m,0}(z) & m < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と取ることができる。特に $\Phi_{\chi^{-1}} = \bar{\Phi}_\chi$ である。一方

$$e^{-2\pi z\bar{z}} = \int_{\mathbb{C}} e^{-2\pi w\bar{w}} e^{2\pi i(zw+\bar{z}\bar{w})}\, |dw \wedge d\bar{w}|$$

の両辺を $z, \bar{z}$ それぞれについて n 回微分して

$$i^n\Phi_{0,n}(z) = \int_{\mathbb{C}} \Phi_{n,0}(w)\psi_0(zw)\,|dw \wedge d\bar{w}|,$$
$$i^n\Phi_{n,0}(z) = \int_{\mathbb{C}} \Phi_{0,n}(w)\psi_0(zw)\,|dw \wedge d\bar{w}|$$

を得る。これらから

$$\begin{aligned}\boxed{\varepsilon(s,\chi,\psi)} &= \chi(a)|a|_{\mathbb{C}}^{s-1/2}\varepsilon(s,\chi,\psi_0) \\ = (a/\bar{a})^{m/2}|a|_{\mathbb{C}}^{\lambda+s-1/2}\frac{Z(1-s,\chi^{-1},i^{|m|}\bar{\Phi}_\chi)}{L(1-s,\chi^{-1})} &\boxed{= i^{|m|}(a/\bar{a})^{m/2}|a|_{\mathbb{C}}^{\lambda+s-1/2}}\end{aligned} \tag{3.10}$$

が従う。

3.2 非アルキメデス標準 L 因子

再び F を標数が 2 でない非アルキメデス局所体とする。ここでは $G(F)$ の既約表現の標準 L 因子、ε 因子を定義し、次いで 2.3.3, 2.3.4 節で分類した $G(F)$ の既約許容表現に付随する L, ε 因子を計算する。

3.2.1 不分岐因子

上半平面上の保型形式に付随する標準 L 函数は Mordell により、Mellin 変換という Fourier 変換の一種で定義された [石井, 2.2]。その後 Hecke がいわゆる Hecke 作用素を用いてその Euler 積展開を与えた。歴史的順序とは逆になるが、保型 L 函数の概念の一般化の道筋が見やすくなるので、ここでは Hecke 作用素による不分岐 L 因子の定義をまず解説し、次の 3.2.2 節で Mellin 変換の局所類似による定義を与える。

$G(F)$ の**不分岐 *Hecke* 環**とは、$G(F)$ 上のコンパクト台付き両側 $\boldsymbol{K}$ 不変函数のなす畳み込み代数 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) \subset \mathcal{H}(G(F))$ のことである。ただし $G(F)$ 上の両側不変測度は $\mathrm{vol}\,\boldsymbol{K} = 1$ となるものに取る。$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ は

$$T_{\mathfrak{p}} := \boldsymbol{K}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi\end{pmatrix}\boldsymbol{K} \text{ の特性函数}, \quad R_{\mathfrak{p}} := \varpi\boldsymbol{K} \text{ の特性函数}$$

で生成される可換 $\mathbb{C}$ 代数である。さて $T(F)$ の不分岐な擬指標の群は

$$\mathrm{Irr}\,(T(F)/T(\mathcal{O})) \ni \chi_1 \boxtimes \chi_2 \longmapsto (\chi_1(\varpi), \chi_2(\varpi)) \in (\mathbb{C}^\times)^2 =: \widehat{T}$$

によって複素トーラス $\widehat{T}$ と同一視される。$(\chi_1(\varpi), \chi_2(\varpi)) \in \widehat{T}$ から誘導される不分岐主系列表現 $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の同型類は (χ_1, χ_2) の並べ替えによらないから、写像

$$S : \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) \ni h \longmapsto [(\chi_1(\varpi), \chi_2(\varpi)) \mapsto \mathrm{tr} I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2, h)] \in \mathbb{C}[\widehat{T}]^{\mathfrak{S}_2}$$

が得られる。ここで $\mathrm{tr} I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ は $I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の指標 (2.2.1 節参照) である[13]。また $\mathbb{C}[\widehat{T}]$ は $\widehat{T}$ 上の多項式函数の環、$\mathbb{C}[\widehat{T}]^{\mathfrak{S}_2}$ はその並べ替え $(z_1, z_2) \mapsto w(z_1, z_2) := (z_2, z_1)$ で不変な元からなる部分環である。これは定義可能な同型であり、**佐武同型**と呼ばれている。

例 3.3. 佐武同型を具体的に計算してみよう。大域的な場合と同様にレベル $\mathfrak{p}^n$ の Hecke 部分群

$$K_0(\mathfrak{p}^n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K} \,\middle|\, c \in \mathfrak{p}^n \right\}$$

を導入する。ここでは特に標準**岩堀部分群** $K_0(\mathfrak{p})$ を使う。

(i) $S(T_{\mathfrak{p}})$ の計算。

$$\begin{aligned} I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2, T_{\mathfrak{p}}) f^0(1) &= \int_{G(F)} T_{\mathfrak{p}}(g) f^0(g)\, dg = \int_{\boldsymbol{K}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{K}} f^0(g)\, dg \\ &= \sum_{\gamma \in \boldsymbol{K}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{K}/\boldsymbol{K}} f^0(\gamma) \end{aligned}$$

である。$\boldsymbol{K} \cap \mathrm{Ad}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{smallmatrix}\right) \boldsymbol{K} = K_0(\mathfrak{p})$ および剰余体 k_F 上の Bruhat 分解 $G(k_F) = B(k_F) \sqcup U(k_F) w^{-1} B(k_F)$ に注意して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \boldsymbol{K}/\boldsymbol{K} &= \left(\boldsymbol{K} \cdot \mathrm{Ad}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}\right)\boldsymbol{K} / \mathrm{Ad}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}\right)\boldsymbol{K}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \\ &= \left(\boldsymbol{K}/K_0(\mathfrak{p})\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} = \left(\{\mathbf{1}_2\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w^{-1} \,\middle|\, \alpha \in \mathcal{O}/\mathfrak{p} \right\}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w^{-1} \,\middle|\, \alpha \in \mathcal{O}/\mathfrak{p} \right\} \end{aligned}$$

を得る。これから

$$\begin{aligned} I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2, T_{\mathfrak{p}}) f^0(1) &= f^0\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}\right) + \sum_{\alpha \in \mathcal{O}/\mathfrak{p}} f^0\left(\begin{pmatrix} \varpi & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w^{-1}\right) \\ &= q^{1/2} \chi_2(\varpi) + \sum_{\alpha \in \mathcal{O}/\mathfrak{p}} q^{-1/2} \chi_1(\varpi) \\ &= q^{1/2} (\chi_1(\varpi) + \chi_2(\varpi)) f^0(1), \end{aligned} \tag{3.11}$$

つまり $S(q^{-1/2} T_{\mathfrak{p}})$ は $\mathrm{tr} : \widehat{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto t_1 + t_2 \in \mathbb{C}$ に一致する。

(ii) 同様に $S(R_{\mathfrak{p}})$ が $\det : \widehat{T} \ni (t_1, t_2) \mapsto t_1 t_2 \in \mathbb{C}$ に対応することも確かめられる。

[13] $h \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ に対する作用素

$$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2, h)\phi(x) := \int_{G(F)} h(g) \phi(xg)\, dg$$

の像は、2.3.5 節の不分岐ベクトル $f^0 \in I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の定数倍だから、$I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2, h) f^0 = \mathrm{tr} I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2, h) \cdot f^0$ である。

定義 3.4. 不分岐な $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ (2.3.5 節) に対して、$X^2 - \mathrm{tr}\pi(q^{-1/2}T_{\mathfrak{p}})X + \mathrm{tr}\pi(R_{\mathfrak{p}})$ の二つの根を $\alpha(\pi), \beta(\pi)$ とする。つまり $[\alpha(\pi), \beta(\pi)] = [\chi_1(\varpi), \chi_2(\varpi)]$ (重複度付き集合の等式) である。このとき π の**標準 L 因子**を次で定める。

$$L(s,\pi) := \frac{1}{(1-\alpha(\pi)q^{-s})(1-\beta(\pi)q^{-s})} = \frac{1}{1-\pi(T_{\mathfrak{p}})q^{-s-1/2}+\pi(R_{\mathfrak{p}})q^{-2s}}$$

3.2.2 標準 L 因子の定義

一般の $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ に対して L, ε 因子を定義するには Whittaker 模型 (2.3.2 節) を使う。

定理 3.5. 無限次元の $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ はただ一つの ψ-Whittaker 模型を持つ。

証明. (スケッチ) $\mathcal{W}_\psi(\pi)$ の存在を示す。任意の $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ に対して、補題 2.10 の証明の完全列 (2.5)

$$0 \longrightarrow \mathrm{ind}_{ZU(F)}^{B(F)}(\pi_{U,\psi} \otimes \psi_U) \longrightarrow \pi|_{B(F)} \longrightarrow \delta_B^{1/2}\pi_B \otimes \mathbb{1}_{U(F)} \longrightarrow 0 \tag{3.12}$$

が成り立つ。無限次元の π が ψ-Whittaker 模型を持たない、つまり $\pi_{U,\psi} = 0$ だとすると、$\pi|_{B(F)} = \delta_B^{1/2}\pi_B \otimes \mathbb{1}_{U(F)}$ である。π が超カスプ的ならこれは 0 となって矛盾。そうでないときも系 2.6, 補題 2.7 から $\dim \pi \leq 2$ となって仮定に矛盾する。

超カスプ的でない $\pi(\chi_1, \chi_2), \mathrm{St}(\chi) \hookrightarrow I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の Whittaker 模型の一意性は、例 2.9 から直ちに従う。超カスプ表現の場合の一意性については [BZ76, III 章] を見よ。 □

系 3.6. 任意の $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ に対して完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{ind}_{ZU(F)}^{B(F)}(\omega_\pi \otimes \psi_U) \longrightarrow \pi|_{B(F)} \longrightarrow \delta_B^{1/2}\pi_B \otimes \mathbb{1}_{U(F)} \longrightarrow 0$$

が成り立つ。

無限次元の $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ の ψ-Whittaker 模型 $\mathcal{W}_\psi(\pi)$ を取る。$W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$, $\chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times$, $s \in \mathbb{C}$ に対して *Jacquet-Langlands* **のゼータ積分**を

$$Z(s,\chi,W;g) := \int_{F^\times} W\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\chi(a)|a|_F^{s-1/2}\, da^\times$$

と定める。ここで $da^\times$ は $F^\times$ 上の任意の不変測度である。

定理 3.7. (i) $Z(s,\chi,W;g)$ は $\Re s \gg 0$ で絶対収束し、q^{-s} の有理函数になる。
(ii) $L(s,\pi\times\chi) \in \{Z(s,\chi,W;g) \mid W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)\}$ で次の条件を満たすものがただ一つある。

(a) 任意の $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$ に対して $Z(s,\chi,W;g)/L(s,\pi\times\chi)$ は s の整型函数。

(b) $L(s,\pi\times\chi)$ は定数項が 1 の q^{-s} の多項式の逆数。

(iii) 指数函数 $\varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi)$ で、任意の $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$ に対して**局所函数等式**

$$Z(1-s,\chi^{-1},W^\vee;wg) = \gamma(s,\pi\times\chi,\psi)\omega_\pi^{-1}(\det g)Z(s,\chi,W;g),$$
$$\gamma(s,\pi\times\chi,\psi) := \frac{\varepsilon(s,\pi\times\chi,\psi)L(1-s,\pi^\vee\times\chi^{-1})}{L(s,\pi\times\chi)}$$

が成り立つものがただ一つある。$W^\vee(g) := \omega_\pi(\det g)^{-1}W(g)$ は $\pi^\vee$ の Whittaker 模型に属することに注意する ((2.9) 参照)。

Jacquet-Langlands によるこの定理の証明はゼータ積分の具体的な計算によっている [JL70]。これは、無限小指標や極小 $\boldsymbol{K}$ タイプによるシンプルな既約表現の分類があるアルキメデス的な場合と異なり、L,ε 因子の構成と同時にそれを用いて非アルキメデス的な $\mathrm{GL}_2(F)$ の既約表現の分類をしなければならなかったからである。以下ではその計算を解説する。まず上の定義からすぐわかるように

$$L(s,\pi\times\chi\mu) = L(s,\mu(\det)\pi\times\chi), \quad \varepsilon(s,\pi\times\chi\mu,\psi) = \varepsilon(s,\mu(\det)\pi\times\chi,\psi) \tag{3.13}$$

であるから、$L(s,\pi) := L(s,\pi\times\mathbb{1})$, $\varepsilon(s,\pi,\psi) := \varepsilon(s,\pi\times\mathbb{1},\psi)$ を計算すれば十分である。

3.2.3 準備—局所 Hecke 写像

$\mathrm{O}(F^2)\times\mathrm{SL}_2(F)$ の Weil 表現 $(\omega_{F^2,\psi},\mathcal{S}(F^2))$ を思い出す (2.2.3 節)。

$$\begin{aligned}
\omega_{F^2,\psi}(g)\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \Phi\left(g^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right), \quad g\in\mathrm{O}(F^2),\\
\omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\right)\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= |a|_F\Phi\begin{pmatrix}ax\\ay\end{pmatrix}, \quad a\in F^\times,\\
\omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\right)\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \psi(bxy)\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \quad b\in F,\\
\omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right)\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \int_{F^2}\Phi\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\psi(-xy'-x'y)\,dx'\,dy'.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$G(F)$ は $\mathrm{SL}_2(F)$ と $\{\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \mid a\in F^\times\}$ で生成される。今の場合には

$$\omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} := \Phi\begin{pmatrix}ax\\y\end{pmatrix}$$

と定めることにより、$\omega_{F^2,\psi}$ を $G(F)$ の表現に延ばせることに注意しよう。上の $\omega_{F^2,\psi}$ の実現 (*Schrödinger* **模型**という) の部分 Fourier 変換

$$\widetilde{\Phi}(x,y) := \int_F \Phi\begin{pmatrix} x \\ y' \end{pmatrix} \psi(yy')\,dy'$$

を取ることで、**混合模型**と呼ばれる実現 $(\omega_{F^2,\psi}, \mathcal{S}(F^2))$ に移る。混合模型に対する以下の公式は容易に確かめられる。ただし

$$\mathrm{O}(F^2) = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, t \in F^\times \right\} \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と実現している。

$$\begin{aligned} \omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\right)\widetilde{\Phi}(x,y) =& |t|_F^{-1}\widetilde{\Phi}(t^{-1}(x,y)), \quad \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(F^2), \\ \omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\widetilde{\Phi}(x,y) =& \int_{F^2} \widetilde{\Phi}(x',y')\psi(x'y - xy')\,dx'\,dy', \\ \omega_{F^2,\psi}(g)\widetilde{\Phi}(x,y) =& \widetilde{\Phi}((x,y)g), \quad g \in G(F). \end{aligned} \tag{3.14}$$

補題 3.8. $\Phi \in \mathcal{S}(F^2)$, $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ に対して、$f_{\Phi,\chi_1,\chi_2} : G(F) \to \mathbb{C}$ を次の積分で定める。

$$\begin{aligned} f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}(g) :=& \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})} \int_{F^\times} \omega_{F^2,\psi}\left(\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, g\right)\widetilde{\Phi}(0,1)\chi_1\chi_2^{-1}(t)\,dt^\times \\ =& \chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2} \frac{Z(1,\chi_1\chi_2^{-1},\omega_{F^2,\psi}(g)\widetilde{\Phi}(0,\cdot))}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})} \end{aligned}$$

(i) $|\chi_1\chi_2^{-1}| = |\ |_F^\sigma$ として、$\sigma > -1$ のとき上の積分は絶対収束して全射 $G(F)$ 準同型 $(\omega_{F^2,\psi}, \mathcal{S}(F^2)) \ni \Phi \mapsto f_{\Phi,\chi_1,\chi_2} \in I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ を与える。
(ii) 任意の (χ_1,χ_2) で $(\omega_{F^2,\psi}, \mathcal{S}(F^2)) \ni \Phi \mapsto f_{\Phi,\chi_1,\chi_2} \in I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ は非自明な $G(F)$ 準同型である。
(iii) 任意の $g \in G(F)$ に対して $\mathbb{C}^2 \ni (s,t) \mapsto f_{\Phi,\chi_1|\ |_F^s,\chi_2|\ |_F^t}(g) \in \mathbb{C}$ は整型である。

証明. (i) f_{Φ,χ_1,χ_2} の定義の二行目は補題の条件下で絶対収束する。そのとき

$$f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \frac{\chi_1(ad\det g)|ad\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})} \int_{F^\times} \widetilde{\Phi}((0,dt)g)\chi_1\chi_2^{-1}(t)|t|\,dt^\times$$

dt を t とおいて

$$\begin{aligned}
&=\chi_1(ad)|ad|_F^{1/2}\chi_1^{-1}\chi_2(d)|d|_F^{-1}f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}(g)\\
&=\chi_1(a)\chi_2(d)\left|\frac{a}{d}\right|_F^{1/2}f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}(g)
\end{aligned}$$

だから $f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}\in I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2)$ である。$\Phi\mapsto f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}$ が $G(F)$ 準同型であることは明らか。
最後に $f\in I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2)$ に対して $\Phi\in\mathcal{S}(F^2)$ を

$$\widetilde{\Phi}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}{\chi_1(\det k)\mathrm{vol}\,\mathcal{O}^\times}f(k) & (x,y)=(0,1)k,\ (k\in\boldsymbol{K})\ \text{と書けるとき}\\ 0 & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

と定める。$\boldsymbol{K}$ での $(0,1)$ の固定化群は $U(\mathcal{O})$ だからこれは定義可能である。このとき

$$\begin{aligned}
f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}(k)=&\frac{1}{\mathrm{vol}\,\mathcal{O}^\times}\int_{F^\times}\widetilde{\Phi}\Big((0,1)\begin{pmatrix}t^{-1}&0\\0&t\end{pmatrix}k\Big)\chi_1\chi_2^{-1}(t)|t|_F\,dt^\times\\
=&\frac{1}{\mathrm{vol}\,\mathcal{O}^\times}\int_{\mathcal{O}^\times}f(k)\,dt^\times=f(k)
\end{aligned}$$

だから上は全射である。

$Z(s,\chi_1\chi_2^{-1},\varphi)$ の主要部が $L(s+1,\chi_1\chi_2^{-1})$ だから、(ii), (iii) は定理 3.1 から従う。 □

3.2.4 非超カスプ既約表現の L,ε 因子

まず主系列表現 $\pi(\chi_1,\chi_2)$ の標準 L 因子を計算しよう。

命題 3.9. $\chi_1,\chi_2\in\mathrm{Irr}\,F^\times$ が $\chi_1\chi_2^{-1}\neq|\ |_F^{\pm1}$ を満たすとする。
(i) 次の積分は収束し、*Whittaker* **汎函数** $\Lambda_{\psi,\chi_1,\chi_2}:\pi(\chi_1,\chi_2)\xrightarrow{\sim}\mathcal{W}_\psi(\pi(\chi_1,\chi_2))$ を与える。

$$\Lambda_{\psi,\chi_1,\chi_2}(f)(g):=\int_F f\Big(w^{-1}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}g\Big)\overline{\psi(x)}\,dx,\quad f\in I_B^G(\chi_1\boxtimes\chi_2).$$

(ii) $L(s,\pi(\chi_1,\chi_2))=L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)$, $\varepsilon(s,\pi(\chi_1,\chi_2),\psi)=\varepsilon(s,\chi_1,\psi)\varepsilon(s,\chi_2,\psi)$.
(iii) 特に χ_1,χ_2 が不分岐で $\mathrm{ord}\,\psi=0$ なら、

$$Z(s,\chi,\Lambda_{\psi,\chi_1,\chi_2}(f^0);1)=\mathrm{vol}\,\mathcal{O}^\times\cdot L(s,\pi).$$

証明. (i) まず $|\chi_1\chi_2^{-1}|=|\ |_F^\sigma,\ \sigma>-1$ の場合を考える。形式的には

$$\begin{aligned}
&W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}(g):=\Lambda_{\psi,\chi_1,\chi_2}(f_{\Phi,\chi_1,\chi_2})(g)\\
=&\frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\int_F\int_{F^\times}\widetilde{\Phi}\Big((0,t)\begin{pmatrix}0&-1\\1&x\end{pmatrix}g\Big)\chi_1\chi_2^{-1}(t)|t|_F\,dt^\times\,\overline{\psi(x)}\,dx
\end{aligned}$$

積分順序を変えて

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\int_{F^\times}\int_F \widetilde{\Phi}((t,tx)g)\overline{\psi(x)}\,dx\,\chi_1\chi_2^{-1}(t)|t|_F\,dt^\times \\
&= \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\int_{F^\times}\int_F \widetilde{\Phi}((t,x)g)\psi(-t^{-1}x)\,dx\,\chi_1\chi_2^{-1}(t)\,dt^\times
\end{aligned}
$$

Fourier 逆変換公式を使うと

$$
= \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\int_{F^\times}\omega_{F^2,\psi}(g)\Phi\begin{pmatrix} t \\ t^{-1}\end{pmatrix}\chi_1\chi_2^{-1}(t)\,dt^\times \tag{3.15}
$$

である。ここで右辺の被積分函数は $F^\times$ 上のコンパクト台付き局所定数函数だから積分は収束し、この等式も正当化される。これが $G(F)$ 準同型 $\pi(\chi_1,\chi_2)\to\mathcal{W}_\psi(G(F))$ を与えることは容易にわかる。右辺は条件 $|\chi_1\chi_2^{-1}| = |\ |_F^\sigma, \sigma > -1$ がなくても収束しているので、この等式は (χ_1,χ_2) の正則函数の等式として常に成り立つ。これと $\Lambda_{\psi,\chi_1,\chi_2}\neq 0, \pi(\chi_1,\chi_2)$ の既約性から、$\Lambda_{\psi,\chi_1,\chi_2}$ は $G(F)$ 同型 $\pi(\chi_1,\chi_2)\to\mathcal{W}_\psi(\pi(\chi_1,\chi_2))$ を与える。

(ii) $|\chi_i| = |\ |_F^{\sigma_i}$ と書く。まず $s\in\mathbb{C}$ が $\Re s > -\min(\sigma_1,\sigma_2)$ を満たす場合を考える。$\Phi' := \omega_{F^2,\psi}(g)\Phi$ と書けば、(3.15) からやはり形式的に

$$
\begin{aligned}
Z(s,\mathbb{1},W_{\Phi,\chi_1,\chi_2};g) &= \int_{F^\times} W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)|a|_F^{s-1/2}\,da^\times \\
&= \int_{F^\times}\frac{\chi_1(a\det g)|a\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\int_{F^\times}\Phi'\begin{pmatrix} at \\ t^{-1}\end{pmatrix}\chi_1\chi_2^{-1}(t)\,dt^\times\,|a|_F^{s-1/2}\,da^\times
\end{aligned}
$$

積分順序を入れ替えて

$$
= \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\int_{F^\times}\int_{F^\times}\Phi'\begin{pmatrix} at \\ t^{-1}\end{pmatrix}\chi_1(a)|a|_F^s\,da^\times\,\chi_1\chi_2^{-1}(t)\,dt^\times
$$

at を a と置き直すと

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\int_{F^\times}\int_{F^\times}\Phi'\begin{pmatrix} a \\ t^{-1}\end{pmatrix}\chi_1(a)|a|_F^s\,da^\times\,\chi_2^{-1}(t)|t|_F^{-s}\,dt^\times \\
&= \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\iint_{F^{\times 2}}\Phi'\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}\chi_1(a)|a|_F^s\chi_2(b)|b|_F^s\,da^\times db^\times
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ところがこの右辺は現在の条件下では絶対収束しているので、この等式は実際に成り立っている。特に $\Phi'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) = \Phi_1(x)\Phi_2(y)$ となる Φ を取れば、

$$
Z(s,\mathbb{1},W_{\Phi,\chi_1,\chi_2};g) = \frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}Z(s,\chi_1,\Phi_1)Z(s,\chi_2,\Phi_2) \tag{3.16}
$$

であるから $L(s,\pi)=L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)$ が従う。また $\Phi\in\mathcal{S}(F^2)$ の双対性 $((x,y),(x'y'))\mapsto\psi(xx'+yy')$ に関する Fourier 変換を $\widehat{\Phi}$ と書けば、

$$\omega_{F^2,\psi}(w)\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\iint_{F^2}\Phi\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\psi(x'y+xy')\,dx'dy'=\widehat{\Phi}\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$$

に注意して

$$\begin{aligned}W^\vee_{\Phi,\chi_1,\chi_2}\Big(\begin{pmatrix}b&0\\0&1\end{pmatrix}wg\Big)=&\chi_1\chi_2(b\det g)^{-1}\frac{\chi_1(b\det g)|b\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\\&\times\int_{F^\times}\omega_{F^2,\psi}(w)\Phi'\begin{pmatrix}bt\\t^{-1}\end{pmatrix}\chi_1\chi_2^{-1}(t)\,dt^\times\\=&\frac{\chi_2^{-1}(b\det g)|b\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\int_{F^\times}\widehat{\Phi}'\begin{pmatrix}t^{-1}\\bt\end{pmatrix}\chi_1\chi_2^{-1}(t)\,dt^\times\end{aligned}$$

を得る。よって $\Re s\ll 0$ とすれば、先ほどと同様にして

$$\begin{aligned}&Z(1-s,\mathbb{1},W^\vee_{\Phi,\chi_1,\chi_2};wg)\\&=\int_{F^\times}\frac{\chi_2^{-1}(b\det g)|b\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\int_{F^\times}\widehat{\Phi}'\begin{pmatrix}t^{-1}\\bt\end{pmatrix}\chi_1\chi_2^{-1}(t)\,dt^\times\,|b|_F^{1/2-s}\,db^\times\\&=\frac{\chi_2^{-1}(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\iint_{F^{\times 2}}\widehat{\Phi}'\begin{pmatrix}t^{-1}\\b\end{pmatrix}\chi_2^{-1}(bt^{-1})|bt^{-1}|_F^{1-s}\chi_1\chi_2^{-1}(t)\,db^\times dt^\times\\&=\frac{\chi_2^{-1}(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\iint_{F^{\times 2}}\widehat{\Phi}'\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\chi_1^{-1}(a)|a|_F^{1-s}\chi_2^{-1}(b)|b|_F^{1-s}\,da^\times db^\times\\&=\frac{\chi_1(\det g)|\det g|_F^{1/2}}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}\omega_\pi(\det g)^{-1}Z(1-s,\chi_1^{-1},\widehat{\Phi}_1)Z(1-s,\chi_2^{-1},\widehat{\Phi}_2)\end{aligned}$$

がわかる。これと定理 3.1 (iv) から $\varepsilon(s,\pi,\psi)=\varepsilon(s,\chi_1,\psi)\varepsilon(s,\chi_2,\psi)$ が従う。

(iii) Φ として $\mathcal{O}^2\subset F^2$ の特性函数 $1_{\mathcal{O}^2}$ を取れば定義から

$$f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}(1)=\frac{Z(1,\chi_1\chi_2^{-1},1_{\mathcal{O}})}{L(1,\chi_1\chi_2^{-1})}=\mathrm{meas}(\mathcal{O}^\times)$$

ゆえ、$f^0=f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}/\mathrm{vol}\,\mathcal{O}^\times$ である。これを (3.16) に代入して定理 3.1 (iii) から

$$\begin{aligned}Z(s,\mathbb{1},\Lambda_{\psi,\underline{\chi}}(f^0);1)=&\frac{Z(s,\mathbb{1},W_{\Phi,\underline{\chi}};1)}{\mathrm{vol}\,\mathcal{O}^\times}=\frac{Z(s,\chi_1,1_{\mathcal{O}})Z(s,\chi_2,1_{\mathcal{O}})}{\mathrm{vol}\,\mathcal{O}^\times}\\=&\mathrm{vol}\,\mathcal{O}^\times\cdot L(s,\chi_1)L(s,\chi_2).\end{aligned}$$

である。 □

Steinberg 表現 $\mathrm{St}(\chi) \hookrightarrow I_B^G(\chi|\ |_F^{1/2} \boxtimes \chi|\ |_F^{-1/2})$ の場合は次のように欠けた L 因子が現れる。

命題 3.10. (i) 簡単のために $\chi_1 := \chi|\ |_F^{1/2}$, $\chi_2 := \chi|\ |_F^{-1/2}$ と書けば

$$\mathcal{W}_\psi(\mathrm{St}(\chi)) = \left\{ W_{\Phi,\chi_1,\chi_2} \,\middle|\, \Phi \in \mathcal{S}(F^2) \text{ s.t. } \int_F \Phi\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0 \right\}.$$

(ii) $L(s, \mathrm{St}(\chi)) = L(s+1/2, \chi)$. また

$$\varepsilon(s, \mathrm{St}(\chi), \psi) = \varepsilon(s+1/2, \chi, \psi)\varepsilon(s-1/2, \chi, \psi)\frac{L(1/2-s, \chi^{-1})}{L(s-1/2, \chi)}.$$

証明. (i) 定義と (2.1) から $\mathrm{St}(\chi)$ は

$$\langle f, \chi^{-1}(\det)\rangle = \int_{B(F)\backslash G(F)} f(g)\chi^{-1}(\det g)\, d\nu_{B\backslash G}(g) = \exists c \int_F f\left(w^{-1}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) dx$$

が消えている $f \in I_B^G(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ からなる。ただし $\nu_{B\backslash G}$ は、$f(bg) = \delta_B(b)f(g), (b \in B(F))$ を満たし $B(F)$ を法としてコンパクトな台を持つ $G(F)$ 上の連続函数空間上の、右 $G(F)$ 不変線型形式である [BZ76, 定理 1.21]。$f = f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}$ とすると

$$\begin{aligned}
\int_F f_{\Phi,\chi_1,\chi_2}\left(w^{-1}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) dx &= \int_F \int_{F^\times} \widetilde{\Phi}\left((0,t)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\right)|t|_F^2\, dt^\times\, dx \\
&= \int_{F^\times} \int_F \widetilde{\Phi}(t,x)\, dx\, |t|_F\, dt^\times
\end{aligned}$$

Fourier 逆変換公式から

$$= \int_{F^\times} \Phi\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

ゆえ主張が従う。

(ii) まず (3.15) は今の場合

$$W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \frac{\chi(\det g)|\det g|_F}{\zeta(2)} \int_{F^\times} \omega_{F^2,\psi}(g)\Phi\begin{pmatrix} t \\ t^{-1} \end{pmatrix} dt$$

となる。右辺の積分を $\varphi(a)$ と書けばこれは Schwartz-Bruhat 函数だから、

$$\frac{Z(s, \chi, W_{\Phi,\chi_1,\chi_2}; g)}{L(s+1/2, \chi)} = \frac{\chi(\det g)|\det g|_F}{\zeta(2)} \frac{Z(s+1/2, \chi, \varphi)}{L(s+1/2, \chi)}$$

は s に関する整型函数になる。一方、$\varepsilon(s,\mathrm{St}(\chi),\psi)$ を主張の通りとすると、

$$\varepsilon(s,\mathrm{St}(\chi),\psi)=\varepsilon(s+1/2,\chi,\psi)\varepsilon(s-1/2,\chi,\psi)$$
$$\times\begin{cases}\dfrac{1-\chi(\varpi)q^{1/2-s}}{1-\chi(\varpi)^{-1}q^{s-1/2}}=-\chi(\varpi)q^{1/2-s} & \chi\text{ が不分岐のとき}\\ 1 & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

となってこれは指数函数である。さらに命題 3.9 (ii) の証明の議論は現在の (χ_1,χ_2) にも適用できるから、この $\varepsilon(s,\mathrm{St}(\chi),\psi)$ は函数等式を満たす。 □

さて、一次元表現 $\pi=\chi(\det)$ は Whittaker 模型を持たない。そこでこれを既約商に持つ $I_B^G(\chi|\ |_F^{1/2}\boxtimes\chi|\ |_F^{-1/2})$ の L,ε 因子を割り当てる。

$$\begin{aligned}L(s,\chi(\det)) &:=L(s+1/2,\chi)L(s-1/2,\chi),\\ \varepsilon(s,\chi(\det),\psi) &:=\varepsilon(s+1/2,\chi,\psi)\varepsilon(s-1/2,\chi,\psi).\end{aligned}\tag{3.17}$$

3.2.5 二面体型超カスプ表現の L,ε 因子

既約超カスプ表現に対する定理 3.7 は [JL70, §2] で証明されている。ここでは例として二面体型超カスプ表現の場合を扱う。一般に既約超カスプ表現 π の標準 L 因子 $L(s,\pi)$ は 1 であることが知られている。

命題 3.11. E/F を分離二次拡大、σ をその Galois 群の生成元とし、$\omega\in\mathrm{Irr}\,E^\times$ が $\sigma(\omega)\neq\omega$ を満たすとする。$G(F)_E=\{g\in G(F)\mid\det g\in\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)\}$ を思い出す。
(i) $G(F)_E$ の既約表現 $\pi(\omega,\psi)$ を $\mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}\subset\mathcal{S}(E)$ に実現して

$$\mathcal{W}(\pi(\omega,\psi)):=\{W_\Phi(g):=\omega_{E,\psi}(g)\Phi(1)\mid\Phi\in\mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}\}$$

とおくとき、$\mathcal{W}_\psi(\pi(\omega))=\mathrm{ind}_{G(F)_E}^{G(F)}\mathcal{W}(\pi(\omega,\psi))$ である。
(ii) $L(s,\pi(\omega))=L_E(s,\omega)$, $\varepsilon(s,\pi(\omega),\psi)=\lambda(E/F,\psi)\varepsilon_E(s,\omega,\psi_E)$. ここで右辺の L,ε 因子は $\omega\in\mathrm{Irr}\,E^\times$ の L,ε 因子である。

証明. (i) まず $\mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}\ni\Phi\mapsto W_\Phi(g):=\omega_{E,\psi}(g)\Phi(1)\in\mathcal{W}_\psi(\mathrm{SL}_2(F))=\mathrm{Ind}_{U(F)}^{\mathrm{SL}_2(F)}\psi_U$ は単射 $\mathrm{SL}_2(F)$ 準同型である。さらに $\pi(\omega,\psi)$ の定義からこれが $\pi(\omega,\psi)\hookrightarrow\mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)_E}\psi_U$ に延びることは容易にわかる。表現の誘導が完全函手であることから

$$\pi(\omega)=\mathrm{Ind}_{G(F)_E}^{G(F)}\pi(\omega,\psi)\longrightarrow\mathrm{Ind}_{G(F)_E}^{G(F)}(\mathrm{Ind}_{U(F)}^{G(F)_E}\psi_U)=\mathcal{W}_\psi(G(F))$$

が得られる。

(ii) 誘導表現の定義から $\pi(\omega)$ の Whittaker 模型は

$$\mathcal{W}_\psi(\pi(\omega))=\left\{W:G(F)\to\mathbb{C}\;\middle|\;\begin{array}{l}\text{任意の } g\in G(F)\text{ に対して}\\ (G(F)_E\ni h\mapsto W(hg)\in\mathbb{C})\in\mathcal{W}(\pi(\omega,\psi))\end{array}\right\}$$

で与えられる。特に $\gamma \in F^\times \smallsetminus \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ を止めれば、$W \in \mathcal{W}_\psi(\pi(\omega))$ はある $\Phi, \Phi^\gamma \in \mathcal{S}(E)_{\omega_\circ^{-1}}$ を使って

$$W(g) = \begin{cases} \pi(\omega,\psi)(g)\Phi(1) & g \in G(F)_E \text{ のとき} \\ \pi(\omega,\psi)\Bigl(g\begin{pmatrix}\gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\Bigr)\Phi^\gamma(1) & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

と書ける。よって $\Re s \gg 0$ のとき

$$\begin{aligned} Z(s,\mathbb{1},W,1) = &\int_{\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)} W\Bigl(\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\Bigr)|a|_F^{s-1/2}\,da^\times \\ &\qquad + \int_{\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)} W\Bigl(\begin{pmatrix}a\gamma & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\Bigr)|a\gamma|_F^{s-1/2}\,da^\times \\ =&\int_{E^\times} W\Bigl(\begin{pmatrix}\mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\Bigr)|z|_E^{s-1/2}\,dz^\times \\ &+ \int_{E^\times} W\Bigl(\begin{pmatrix}\gamma\mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\Bigr)|z|_E^{s-1/2}|\gamma|_F^{s-1/2}\,dz^\times \\ =&\int_{E^\times} \Phi(z)\omega(z)|z|_E^s\,dz^\times + |\gamma|_F^{s-1/2}\int_{E^\times} \Phi^\gamma(z)\omega(z)|z|_E^s\,dz^\times \\ =&Z(s,\omega,\Phi) + |\gamma|_F^{s-1/2}Z(s,\omega,\Phi^\gamma) \end{aligned}$$

であるから $L(s,\pi(\omega)) = L_E(s,\omega)$ が従う。

同様に $\Re s \ll 0$ のときには

$$\begin{aligned} Z(1-s,&\mathbb{1},W^\vee;w) = \int_{F^\times} (\omega\omega_{E/F})^{-1}(a)W\Bigl(\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}w\Bigr)|a|_F^{1/2-s}\,da^\times \\ &= \int_{\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)} W\Bigl(\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}w\Bigr)\omega(a)^{-1}|a|_F^{1/2-s}\,da^\times \\ &\qquad - \int_{\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)} W\Bigl(\begin{pmatrix}a\gamma & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}w\Bigr)\omega(a\gamma)^{-1}|a\gamma|_F^{1/2-s}\,da^\times \\ &= \int_{E^\times} W\Bigl(\begin{pmatrix}\mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}w\Bigr)\omega(\mathrm{N}_{E/F}(z))^{-1}|z|_E^{1/2-s}\,dz^\times \\ &\quad - \int_{E^\times} W\Bigl(\begin{pmatrix}\mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1}\end{pmatrix}w\begin{pmatrix}\gamma & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\Bigr)\omega(\mathrm{N}_{E/F}(z))^{-1}|z|_E^{1/2-s}\,dz^\times \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times\omega(\gamma)^{-1}|\gamma|_F^{1/2-s}. \end{aligned}$$

ここで $\Phi \in \mathcal{S}(E)$ の双対性 $(z, z') \mapsto \psi_E(zz')$ に関する Fourier 変換を $\widehat{\Phi}$ と書けば、(2.2) から

$$
\begin{aligned}
W\Bigl(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w\Bigr) = \pi(\omega, \psi)\Bigl(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigr)\lambda(E/F, \psi)\widehat{\Phi}(\sigma(\cdot)) \\
=\lambda(E/F, \psi)\widehat{\Phi}(\sigma(z))\omega(z)|z|_E^{1/2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&W\Bigl(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigr) \\
&\qquad =\pi(\omega, \psi)\Bigl(\begin{pmatrix} \mathrm{N}_{E/F}(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigr)\omega_{E/F}(\gamma)|\gamma|_F\lambda(E/F, \psi)\widehat{\Phi}^{\gamma}(\gamma\sigma(\cdot)) \\
&\qquad = -\lambda(E/F, \psi)\widehat{\Phi}^{\gamma}(\gamma\sigma(z))\omega(z)|z|_E^{1/2}|\gamma|_F
\end{aligned}
$$

である。これらを代入して

$$
\begin{aligned}
Z(1-s, \mathbb{1}, W^{\vee}; w) = \lambda(E/F, \psi)\int_{E^{\times}} \widehat{\Phi}(\sigma(z))\omega(\sigma(z))^{-1}|z|_E^{1-s}\, dz^{\times} \\
+ \lambda(E/F, \psi)\int_{E^{\times}} \widehat{\Phi}^{\gamma}(\gamma\sigma(z))\omega(\sigma(z))^{-1}|z|_E^{1-s}\, dz^{\times} \cdot \omega(\gamma)^{-1}|\gamma|_F^{3/2-s}
\end{aligned}
$$

第一項で $\sigma(z)$, 第二項で $\gamma\sigma(z)$ をそれぞれ z と置き直して

$$
\begin{aligned}
=&\lambda(E/F, \psi)\Bigl(\int_{E^{\times}} \widehat{\Phi}(z)\omega(z)^{-1}|z|_E^{1-s}\, dz^{\times} \\
&\qquad + \int_{E^{\times}} \widehat{\Phi}^{\gamma}(z)\omega(z)^{-1}|z|_E^{1-s}\, dz^{\times}|\gamma|_F^{s-1/2}\Bigr) \\
=&\lambda(E/F, \psi)\Bigl(Z(1-s, \omega^{-1}, \widehat{\Phi}) + |\gamma|_F^{s-1/2}Z(1-s, \omega^{-1}, \widehat{\Phi}^{\gamma})\Bigr)
\end{aligned}
$$

を得る。これと先の計算を比較すれば $\varepsilon(s, \pi(\omega), \psi) = \lambda(E/F, \psi)\varepsilon_E(s, \omega, \psi_E)$ が従う。 □

3.3 アルキメデス標準 L 因子

$F = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ であるとする。この場合にも前節と類似の結果が成り立つ。ここではその結果のみを概説しておく。

アルキメデス的な場合には Whittaker 模型には増大度の条件が必要になる。これは一つの既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群に複数の $G(F)$ の既約表現が対応する問題を避けるためである。次の結果は [JL70] では Whittaker 函数の満たす微分方程式を具体的に解くことによって確かめられている。

補題 3.12. 任意の無限次元の $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ に対して

(i) $W(ug) = \psi_U(u)W(g), (u \in U(F), g \in G(F))$;

(ii) $\mathrm{span}\,\{G(F) \ni g \mapsto W(gk) \in \mathbb{C} \,|\, k \in \boldsymbol{K}\}$ は有限次元;

(iii) ある $C, r > 0$ があって $W\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = C|a|_F^r, (a \in F^\times)$

を満たす $G(F)$ 上の滑らかな函数の空間 $\mathcal{W}_\psi(\pi)$ で、$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \times \boldsymbol{K}$ の右移動作用で閉じていて、$(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群として π に同型なものがただ一つある。これを π の *ψ-Whittaker* **模型**という。

補題の状況で $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi), \chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ に対して、局所ゼータ積分 $Z(s, \chi, W; g)$ が 3.2.2 節と同様に定義される。

定理 3.13. 無限次元の $\pi \in \mathrm{Irr}\, G(F)$ を取る。
(i) $Z(s, \chi, W; g), (W \in \mathcal{W}_\psi(\pi))$ は $\Re s \gg 0$ で絶対収束し、$s \in \mathbb{C}$ の有理型函数に解析接続される。
(ii) $L(s, \pi \times \chi) \in \{e^{\lambda s} Z(s, \chi, W; g) \,|\, \lambda \in \mathbb{R},\ W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)\}$ および指数函数 $\varepsilon(s, \pi \times \chi, \psi)$ で

(i) 任意の $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$ に対して $Z(s, \chi, W; g)/L(s, \pi \times \chi)$ は整型。

(ii) $L(s, \pi \times \chi)$ は $\Gamma_\mathbb{R}(s + a), \Gamma_\mathbb{C}(s + b)$ の形の函数の有限積。

(iii) 任意の $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$ に対して局所函数等式

$$Z(1 - s, \chi^{-1}, W^\vee; wg) = \gamma(s, \pi \times \chi, \psi)\omega_\pi^{-1}(\det g) Z(s, \chi, W; g),$$
$$\gamma(s, \pi \times \chi, \psi) := \frac{\varepsilon(s, \pi \times \chi, \psi) L(1 - s, \pi^\vee \times \chi^{-1})}{L(s, \pi \times \chi)}$$

が成り立つ。

を満たすものがただ一つある。

具体的に $L(s, \pi), \varepsilon(s, \pi, \psi)$ は次の表で与えられる。ただし

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp(2\pi i a x), (a \in \mathbb{R}^\times) & F = \mathbb{R} \text{ のとき} \\ \exp(2\pi i (tx + \overline{tx})), (t \in \mathbb{C}^\times) & F = \mathbb{C} \text{ のとき} \end{cases}$$

と書いており、$\lambda(\mathbb{C}/\mathbb{R}, \psi) = i^{\mathrm{sgn}(a)}$ である。

π	$L(s,\pi)$	$\varepsilon(s,\pi,\psi)$
$\pi(\omega_\lambda^{k-1})$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $k\geq 2, \in\mathbb{Z}$	$L_{\mathbb{C}}(s,\omega_\lambda^{k-1})$ $=\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\lambda+(k-1)/2)$	$\lambda(\mathbb{C}/\mathbb{R},\psi)\varepsilon_{\mathbb{C}}(s,\omega_\lambda^{k-1},\psi_{\mathbb{C}})$ $=i^{\mathrm{sgn}(a)}(\mathrm{sgn}(a)i)^{k-1}\lvert a\rvert_{\mathbb{R}}^{2(s+\lambda)-1}$
$\pi(\chi_1,\chi_2)$, $(F=\mathbb{R})$ $\chi_i=\lvert\ \rvert_{\mathbb{R}}^{\lambda_i}\mathrm{sgn}^{\epsilon_i}$	$L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)$ $=\prod_{i=1,2}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\lambda_i+\epsilon_i)$	$\varepsilon(s,\chi_1,\psi)\varepsilon(s,\chi_2,\psi)$ $=(\mathrm{sgn}(a)i)^{\epsilon_1+\epsilon_2}\lvert a\rvert_{\mathbb{R}}^{2s+\lambda_1+\lambda_2-1}$
$\pi(\chi_1,\chi_2)$, $(F=\mathbb{C})$ $\chi_i(z)=\lvert z\rvert_{\mathbb{C}}^{\lambda_i}(z/\bar{z})^{k_i/2}$	$L_{\mathbb{C}}(s,\chi_1)L_{\mathbb{C}}(s,\chi_2)$ $=\prod_{i=1,2}\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\lambda_i+\lvert k_i\rvert/2)$	$\varepsilon_{\mathbb{C}}(s,\chi_1,\psi)\varepsilon_{\mathbb{C}}(s,\chi_2,\psi)$ $=i^{\lvert k_1\rvert+\lvert k_2\rvert}(t/\bar{t})^{(k_1+k_2)/2}$ $\times\lvert t\rvert_{\mathbb{C}}^{2s+\lambda_1+\lambda_2-1}$

3.4 局所逆定理

F を局所体とする。ここまで $G(F)$ の既約表現 π に付随する標準 L,ε 因子を定義してきた。実はこれらの局所因子で π は一意に決まる。つまり標準 L,ε 因子で既約表現が分類できるのである。

定理 3.14 ([JL70] 系 2.19)**.** $\mathrm{Irr}\,G(F)\ni\pi,\pi'$ がともに無限次元で $\omega_\pi=\omega_{\pi'}$ を満たすとする。このとき $\pi\simeq\pi'$ であるためには、任意の $\chi\in\mathrm{Irr}\,F^\times$ に対して $\gamma(s,\pi\times\chi,\psi)=\gamma(s,\pi'\times\chi,\psi)$ となることが必要十分である。

証明. (スケッチ) 任意の無限次元の $\pi\in\mathrm{Irr}\,G(F)$ が $\gamma(s,\pi\times\chi,\psi)$, $(\chi\in\mathrm{Irr}\,F^\times)$ で決まることを見ればよい。

まず F が非アルキメデス的な場合を考える。$\chi\in\mathrm{Irr}\,F^\times$ に対して

$$\mathbb{C}^\times\ni q^s\longmapsto\chi\lvert\ \rvert_F^s\in\mathrm{Irr}\,F^\times$$

の像を χ の同値類という。これには $\mathbb{C}^\times$ の複素構造を上の同型で移した複素構造が入る。$\mathrm{Irr}\,F^\times$ は $\mathbb{C}^\times$ に解析同相な同値類たちを連結成分とする複素多様体と見なせる。$\gamma(s,\pi\times\chi,\psi)=\gamma(0,\pi\times\chi\lvert\ \rvert_F^s,\psi)$ だから、$\gamma(s,\pi\times\chi,\psi)$ の代わりに $\chi\in\mathrm{Irr}\,F^\times$ の有理型函数 $\gamma(\pi\times\chi,\psi):=\gamma(0,\pi\times\chi,\psi)$ を考えれば十分である。

証明の鍵は Kirillov 模型である。

$$\mathrm{Ind}_{ZU(F)}^{B(F)}(\omega\otimes\psi_U)=\left\{f:B(F)\to\mathbb{C}\ \middle|\ \begin{array}{ll}\text{(i)} & f(zub)=\omega(z)\psi_U(u)f(b),\\ & z\in F^\times,\ u\in U(F),\ b\in B(F)\\ \text{(ii)} & \text{ある開コンパクト部分群}\\ & K_f\subset G(F)\text{ で右不変}\end{array}\right\}$$

と書く。これは右移動作用により $B(F)$ の滑らかな表現になる。Whittaker 模型 $\mathcal{W}_\psi(\pi)$ を使って

$$A_\pi:\pi\xrightarrow{\sim}\mathcal{W}_\psi(\pi)\ni W\longmapsto W|_{B(F)}\in\mathrm{Ind}_{ZU(F)}^{B(F)}(\omega_\pi\otimes\psi_U)$$

とおけば、これは単射 $B(F)$ 準同型になることが知られている。A_π の像を π の *Kirillov* **模型**と呼んで $\mathcal{K}_\psi(\pi)$ と書く。定義から $\mathcal{K}_\psi(\pi)$ はその制限

$$\left\{ \varphi_W : F^\times \ni x \mapsto W\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{C} \,\middle|\, W \in \mathcal{W}_\psi(\pi) \right\}$$

から一意に定まり、$\varphi_W \in \mathcal{K}_\psi(\pi)$ への $B(F)$ 作用は

$$\begin{aligned} \pi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right)\varphi_W(x) =& W\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = W\left(d\begin{pmatrix} 1 & bx/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax/d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ =& \omega_\pi(d)\psi\left(\frac{bx}{d}\right)\varphi_W\left(\frac{ax}{d}\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

で与えられる。

$\gamma(\pi \times \chi, \psi)$ が $\operatorname{Irr} F^\times$ 上で極も零点も持たない場合、π は超カスプ表現である。このとき定理 3.5 の証明中の (3.12) で右の項は消えているから、上の A_π は自然な埋め込み $\operatorname{ind}_{ZU(F)}^{B(F)}(\omega_\pi \otimes \psi_U) \hookrightarrow \operatorname{Ind}_{ZU(F)}^{B(F)}(\omega_\pi \otimes \psi_U)$ である。特に $\mathcal{K}_\psi(\pi)$ は $\mathcal{S}(F^\times)$ にほかならない。一方、すぐわかるように $Z(s, \chi, W; 1) = Z(s - 1/2, \chi, \varphi_W)$ だから、定理 3.7 (iii) 局所函数等式は

$$Z(1/2 - s, (\chi\omega_\pi)^{-1}, \pi(w)\varphi_W) = \gamma(s, \pi \times \chi, \psi)Z(s - 1/2, \chi, \varphi_W)$$

となる。よって φ_W と $\gamma(s, \pi \times \chi, \psi)$ から $Z(1/2 - s, (\chi\omega_\pi)^{-1}, \pi(w)\varphi_W)$ は決まる。ところがこのゼータ積分は $\pi(w)\varphi_W \in \mathcal{S}(F^\times)$ の “Fourier 変換” の $(\chi\omega_\pi)^{-1}$ での値だから、$\chi \in \operatorname{Irr} F^\times$ に対する $Z(1/2 - s, (\chi\omega_\pi)^{-1}, \pi(w)\varphi_W)$ たちから $\pi(w)\varphi_W$ も決まる。$G(F)$ は $B(F)$ と w で生成されるから、(3.18) とこれから $\mathcal{S}(F^\times) = \mathcal{K}_\psi(\pi)$ 上の表現 π は決まってしまう。

$\gamma(\pi \times \chi, \psi)$ が $\operatorname{Irr} F^\times$ 上に重複度も込めてただ一つの零点を持つとき、その零点を $\mu^{-1}|\,|_F^{-1/2}$ として $\pi \simeq \operatorname{St}(\mu)$ である。同様に $\gamma(\pi \times \chi, \psi)$ が重複度も込めて 2 つの零点 χ_1^{-1}, χ_2^{-1} を持つとき $\pi \simeq \pi(\chi_1, \chi_2)$ である。

次に F がアルキメデス的な場合を考える。$F = \mathbb{C}$ のときはより簡単なので $F = \mathbb{R}$ の場合を証明する。やはり $\gamma(s, \pi, \psi) := \gamma(s, \pi \times \mathbb{1}, \psi)$ の極と零点によって次のように場合分けされる。

(i) $\gamma(s, \pi, \psi)$ が $z - \mathbb{N}$ で零点を、$p + \mathbb{N}$ で極を持ち、それ以外の $s \in \mathbb{C}$ で正則なとき、

$$k := p - z - 1 \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad \lambda := \frac{1 - p - z}{2}$$

として $\pi \simeq \pi(\omega_\lambda^k)$ である。

(ii) 上の場合以外で $\gamma(s, \pi, \psi)$ が $z_1 - 2\mathbb{N}, z_2 - 2\mathbb{N}$ で零点、$p_1 + 2\mathbb{N}, p_2 + 2\mathbb{N}$ で極を持ち、それ以外の $s \in \mathbb{C}$ で正則なとき。

(a) π が偶: $\omega_\pi(-1) = 1$ のとき、$\Re z_1 \leq \Re z_2, \Re p_1 \leq \Re p_2$ となるように z_i, p_i をラベル付けする。

$$\lambda_i := \frac{1 - z_i - p_i}{2}, \quad \epsilon_i := \frac{p_i - z_i - 1}{2} \in \{0, 1\}$$

として $\pi \simeq \pi(\chi_1, \chi_2)$, $\chi_i = |\,|_{\mathbb{R}}^{\lambda_i}\mathrm{sgn}^{\epsilon_i}$, $(i = 1, 2)$.

(b) π が奇: $\omega_\pi(-1) = -1$ で $z_1 \neq z_2, p_1 \neq p_2$ のとき。$z_2 - z_1 - p_2 + p_1 = 2$ となる z_i, p_i のラベル付けがただ一つある。このラベル付けについて (a) と同じ結論が成り立つ。

(c) π が奇で $z_1 = z_2$ のとき、$p_2 - p_1 = 2$ となるラベル付けが決まる。このとき

$$\lambda_i := \frac{1 - z_i - p_i}{2}, \quad \epsilon_1 = 0, \quad \epsilon_2 = 1$$

として (a) と同じ結論が成り立つ。

(d) π が奇で $p_1 = p_2$ のとき。$z_2 - z_1 = 2$ となるラベル付けがただ一つある。このとき

$$\lambda_i := \frac{1 - z_i - p_i}{2}, \quad \epsilon_1 = 1, \quad \epsilon_2 = 0$$

として (a) と同じ結論が成り立つ。

アルキメデス的な場合には $\chi \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ によるひねりは必要ない事に注意する。 $\square$

4 Hecke-Jacquet-Langlands 理論

1.4 節の大域的な設定に戻って F は代数体とする。この節では 2 節で記述した局所体上の GL_2 の既約表現と標準 L 函数を用いて $\mathcal{L}_0(G)$ を記述する。

4.1 $G(\mathbb{A})$ の既約表現

アルキメデス素点での極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K}_v \subset G(F_v)$ (1.4 節) たちの直積を $\boldsymbol{K}_\infty := \prod_{v|\infty} \boldsymbol{K}_v$ と書く。$G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ は局所コンパクト完全不連結群だから、2.2.1 節の場合と同様に滑らかな表現や許容表現が定義される。$G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ の滑らかな表現を単に $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ **加群**と呼ぶ。$(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty)$ 加群と $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 加群双方の構造を持ち、しかも $(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty)$ 作用と $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 作用が可換であるものを $(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ **加群**という。$(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 加群 (π, V) が**許容的** (*admissible*) とは、$\boldsymbol{K}$ の任意の既約ユニタリ表現 τ に対して

$$\dim \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(\tau, \pi|_{\boldsymbol{K}}) < +\infty$$

であることとする。

F の各素点 v での $\pi_v \in \mathrm{Irr}\, G(F_v)$ の族 $(\pi_v)_v$ が**連接** (*coherent*) とは、アルキメデス素点を全て含む素点の有限集合 S_π があって、任意の $v \notin S_\pi$ で π_v が不分岐: $\pi_v^{\boldsymbol{K}_v} \neq 0$ であることとする。そのような族 $(\pi_v)_v$ の各 π_v の実現 (π_v, V_v) と $v \notin S_\pi$ での $\xi_v^0 \neq 0, \in V_v^{\boldsymbol{K}_v}$ を固定する。このとき S_π を含む素点の有限集合 S に対して

$$\Big(\bigotimes_{v \in S} \pi_v \otimes \bigotimes_{v \notin S} \mathbb{1}_{\boldsymbol{K}_v}, \bigotimes_{v \in S} V_v \otimes \bigotimes_{v \notin S} \xi_v^0\Big)$$

は定義可能な既約 $(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty)\times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}(S))$ 加群である。そこで $(V_v)_v$ の $(\xi_v^0)_{v\notin S_\pi}$ に関する**制限テンソル積** (*restricted tensor product*) を

$$\bigotimes_v V_v := \bigcup_S \Big(\bigotimes_{v\in S} V_v \otimes \bigotimes_{v\notin S} \xi_v^0\Big)$$

と定めれば、これは定義可能な既約 $(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty)\times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 加群である。これを $(\pi_v)_v$ の**制限テンソル積**と呼んで $\bigotimes_v \pi_v$ と書く。その同型類は $\boldsymbol{K}_v$ 不変ベクトル ξ_v^0 たちの取り方によらない。

$G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ も局所コンパクト完全不連結群であるから、2.2.1 節と同様にその Hecke 環 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}))$ が考えられる。定義から $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}))$ は $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 上のコンパクト台付き局所定数函数のなす畳み込み代数である。一方、各非アルキメデス素点 v でも $G(F_v)$ の Hecke 環 $\mathcal{H}(G(F_v))$ が考えられる。$G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ の位相の定義から

$$\varinjlim_S \Big(\bigotimes_{v\in S} \mathcal{H}(G(F_v)) \otimes \bigotimes_{v\notin S} 1_{\boldsymbol{K}_v}\Big) \ni \bigotimes_v h_v \longmapsto \prod_v h_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}))$$

は自然な同型である。$G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ の既約で滑らかな表現を単純な非退化 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}))$ 加群と見て、上の同型を使えば次が得られる。詳しい証明については [JL70] か [Bum97, 3.4] を見よ。

定理 4.1 ([JL70] 命題 9.1)**.** 任意の既約許容 $(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty)\times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 加群 π はある連接な族 $(\pi_v)_v$, $(\pi_v \in \mathrm{Irr}\, G(F_v))$ の制限テンソル積である: $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$.

次に $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現 (π, H) を考える。よく知られているように [Wal92, 定理 14.10.8]、(π, H) は実 Lie 群 $G(F_\infty)$ の既約ユニタリ表現 (π_∞, H_∞) と $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ の既約ユニタリ表現 $(\pi_{\mathrm{fin}}, H_{\mathrm{fin}})$ の *Hilbert* **テンソル積**[14]に分解する: $(\pi, H) = (\pi_\infty, H_\infty)\widehat{\otimes}(\pi_{\mathrm{fin}}, H_{\mathrm{fin}})$. 事実 2.16 から (π_∞, H_∞) の $\boldsymbol{K}_\infty$ 有限ベクトルの空間 V_∞ は H_∞ で稠密な既約ユニタリ化可能 $(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty)$ 加群である。また事実 2.14 の証明は $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ にも適用できるので、$(\pi_{\mathrm{fin}}, H_{\mathrm{fin}})$ は $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ のある既約ユニタリ化可能許容表現 $(\pi_{\mathrm{fin}}, V_{\mathrm{fin}})$ の完備化になっている。これらの議論と定理 4.1 から次を得る。

系 4.2. 任意の $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ に対してユニタリ化可能な連接族 $(\pi_v)_v$, $(\pi_v \in \Pi(G(F_v)))$ があって、π は $\bigotimes_v \pi_v$ の完備化に同値である。

さて、定理 1.13 の分解を思い出す。

$$\mathcal{L}_0(G) \simeq \widehat{\bigoplus_{\pi\in\Pi(G(\mathbb{A})^1)}} \pi^{\oplus m(\pi)}, \quad m(\pi) \in \mathbb{N}.$$

各 $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ に対して、$\mathcal{L}_0(G)$ 中の $G(\mathbb{A})$ が $\pi^{\oplus m(\pi)}$ で作用する閉部分空間を $\mathcal{L}_0(G)_\pi$, その $\boldsymbol{K}$ 有限ベクトルの空間を $\mathcal{A}_0(G)_\pi$ と書く。 すると任意の $\phi \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$ は自動的に滑

[14] テンソル積 $H_\infty \otimes H_{\mathrm{fin}}$ 上にはそれぞれの空間の内積のテンソル積として内積が定まる。この内積で $H_\infty \otimes H_{\mathrm{fin}}$ を完備化したものを *Hilbert* **テンソル積**という。

らかであり、$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)$ は ϕ に π_∞ の無限小指標と呼ばれる準同型 $\chi_{\pi_\infty}:\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_\infty)\to\mathbb{C}$ を経由して作用する。特に ϕ は定義 1.8 の条件を満たすから、(記号が示唆するとおり)

$$\mathcal{A}_0(G)_\pi=\mathcal{L}_0(G)_\pi\cap\mathcal{A}_0(G)$$

である。よって定理 1.13 と併せて次が従う。

命題 4.3. $\mathcal{A}_0(G)$ は $\mathcal{L}_0(G)$ の稠密部分空間である。

4.2　重複度一定理

命題 4.3 から、$\mathcal{A}_0(G)$ を記述するには $\mathcal{L}_0(G)$ の定理 1.13 の分解における各 $\pi\in\Pi(G(\mathbb{A})^1)$ の重複度 $m(\pi)$ を決定すればよい。そのためにまず $m(\pi)$ を上から評価しよう。

非自明な指標 $\psi:\mathbb{A}/F\to\mathbb{C}^\times$ を取り、その F_v への制限を ψ_v と書く。ψ は $\mathbb{A}$ の指標として制限テンソル積分解 $\psi=\bigotimes_v\psi_v$ を持つ。(有限個を除く非アルキメデス素点では $\operatorname{ord}\psi_v=0$ なので右辺は定義可能であることに注意する。) 函数 $W:G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ で

(i) $G(F_\infty)$ 成分について滑らかで、右 $\boldsymbol{K}$ 有限。

(ii) $W(ug)=\psi_U(u)W(g),(u\in U(\mathbb{A}),g\in G(\mathbb{A}))$;

(iii) アルキメデス素点 v に対して $r_v\in\mathbb{N},C>0$ があって、

$$\left|W\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}g\right)\right|\le C|a|_v^{r_v},\quad a\in F_v^\times.$$

を満たすものの空間を $\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ と書く。

命題 4.4. (i) 既約許容 $(\mathfrak{g}_\infty,\boldsymbol{K}_\infty)\times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 加群 $\pi\simeq\bigotimes_v\pi_v$ の全ての局所成分 π_v が無限次元ならば、$\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ の部分空間 $\mathcal{W}_\psi(\pi)$ で $(\mathfrak{g}_\infty,\boldsymbol{K}_\infty)\times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 加群として π に同型なものがただ一つある。これを π の *Whittaker* **模型**という。
(ii) 既約許容 $(\mathfrak{g}_\infty,\boldsymbol{K}_\infty)\times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 加群 $\pi\simeq\bigotimes_v\pi_v$ のある π_v が有限次元なら π は $\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ の部分空間には実現されない。

証明. (i) 各素点 v で π_v の Whittaker 模型 $\mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v)$ を取る。ある素点の有限集合 S_π があって、$v\notin S_\pi$ は非アルキメデス的で π_v は不分岐である。そのような v では $W_v^0\in\mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v)$ で $W_v^0(k)=1,(\forall k\in\boldsymbol{K}_v)$ となるものがある。すると素点の有限集合 $S\supset S_\pi$ に対して

$$W(g)=\prod_{v\in S}W_v(g_v)\times\prod_{v\notin S}W_v^0(g_v),\quad W_v\in\mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v)$$

は定義可能な $\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ の元である。$W_v \in \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v), S \supset S_\pi$ を走らせたときのこの $W(g)$ の張る $\mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ の部分空間を $\mathcal{W}_\psi(\pi)$ とすれば、制限テンソル積の定義から

$$\textstyle\prod_v : \pi \simeq \bigotimes_v \pi_v \simeq \bigotimes_v W_{\psi_v}(\pi_v) \xrightarrow{\sim} W_\psi(\pi)$$

は $(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 同型である。

次に部分空間 $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ が命題の条件を満たせば、$(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 同型 $A : \bigotimes_v \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v) \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}'$ が取れる。素点の有限集合 S に対して

$$F_S := \prod_{v \in S} F_v, \quad \mathbb{A}^S := \{(x_v)_v \in \mathbb{A} \,|\, x_v = 0, \forall v \in S\}$$

などと書く。素点 $v_1 \in S$ に対して、Whittaker 模型の一意性からある函数 $\alpha^{v_1} : G(\mathbb{A}^v) \times \bigotimes_{v \neq v_1} \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v) \to \mathbb{C}$ があって

$$A\Big(W_{v_1} \otimes \bigotimes_{v \neq v_1} W_v\Big)(g) = \alpha^{v_1}\Big(g^{v_1}, \bigotimes_{v \neq v_1} W_v\Big) W_{v_1}(g_{v_1})$$

と書ける。さらに $|S|$ について帰納的に議論すれば、函数 $\alpha^S : G(\mathbb{A}^S) \times \bigotimes_{v \notin S} \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v) \to \mathbb{C}$ があって

$$A\Big(\bigotimes_{v \in S} W_v \otimes \bigotimes_{v \notin S} W_v\Big)(g) = \alpha^S\Big(g^S, \bigotimes_{v \notin S} W_v\Big) \prod_{v \in S} W_v(g_v)$$

が成り立つことがわかる。今、$v \notin S$ で π_v は不分岐で $g_v \in \boldsymbol{K}_v$ となるよう S を十分大きく取れば、任意の $S' \supset S$ に対して

$$\begin{aligned} c :=& \alpha^S\Big(g^S, \bigotimes_{v \notin S} W_v^0\Big) = \alpha^{S'}\Big(g^{S'}, \bigotimes_{v \notin S'} W_v^0\Big) \prod_{v \in S' \smallsetminus S} W_v^0(g_v) \\ =& \alpha^{S'}\Big(g^{S'}, \bigotimes_{v \notin S'} W_v^0\Big) \end{aligned}$$

は S' によらず一定である。このとき任意の $\bigotimes_v W_v \in \bigotimes_v \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v), g \in G(\mathbb{A})$ に対して、S の外では $W_v = W_v^0, g_v \in \boldsymbol{K}_v$ となる S を取れば、

$$A\Big(\bigotimes_v W_v\Big)(g) = \alpha^S\Big(g^S, \bigotimes_{v \notin S} W_v^0\Big) \prod_{v \in S} W_v(g_v) = c \prod_v W_v(g_v)$$

となって $A = c \prod_v, \mathcal{W}' = \mathcal{W}_\psi(\pi)$ がわかる。

(ii) もし非自明な $(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 準同型 $A : \bigotimes_v \pi_v \to \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$ があれば、各素点 v に対して適当な $\bigotimes_{v' \neq v} \xi_{v'} \in \bigotimes_{v' \neq v} \pi_{v'}$ を取ることにより、非自明な $G(F_v)$ (あるいは $(\mathfrak{g}_v, \boldsymbol{K}_v)$ 準同型)

$$\pi_v \ni \xi_v \longmapsto W_{\xi_v}(g_v) := A\Big(\pi_v(g_v)\xi_v \otimes \bigotimes_{v' \neq v} \xi_{v'}\Big) \in \mathcal{W}_{\psi_v}(G(F_v))$$

が得られる。これは有限次元の π_v が Whittaker 模型を持たないことに矛盾する。 □

さて $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ を取る。ψ-Fourier 係数を取る写像

$$\mathcal{A}_0(G)_\pi \ni \phi \longmapsto W_\psi(\phi) \in \mathcal{W}_\psi(G(\mathbb{A}))$$

は明らかに定義可能な $(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 準同型であり、さらに Fourier 展開 (1.11) から単射である。ところが π に同型な右辺の部分表現は $\mathcal{W}_\psi(\pi)$ しかないのだから、次が従う。

定理 4.5. (i) 各 $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ の $\mathcal{L}_0(G)$ での重複度は高々1 である: $m(\pi) \le 1$.
(ii) さらに制限テンソル積分解 $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$ が有限次元の π_v を含めば $m(\pi) = 0$ である。

実はさらに次が成り立つ。この結果は保型形式の整数論への応用にとって基本的である。

定理 4.6 (強重複度一定理)**.** $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v, \pi' \simeq \bigotimes_v \pi'_v \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ が次の条件を満たすとする。
(a) $m(\pi) = m(\pi') = 1$;
(b) ある F の素点の有限集合 S があって、すべての $v \notin S$ で $\pi_v \simeq \pi'_v$.
このとき $\pi \simeq \pi'$, すなわち $\mathcal{A}_0(G)_\pi = \mathcal{A}_0(G)_{\pi'}$ である。

この結果の最初の証明は Casselman と Callahan による [Cas73] が、$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ の Rankin-Selberg 積 L 函数の性質を用いた拡張性のある証明が Jacquet-Shalika により与えられている。

4.3 標準 L 函数

あとは全ての局所成分が無限次元である $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ に対して $m(\pi)$ がいつ 1 となるかを調べればよい。

まず $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ が $\mathcal{L}_0(G)$ に現れる、すなわち $m(\pi) = 1$ のとき π を $G(\mathbb{A})$ の (既約) **カスプ保型表現** (*cuspidal automorphic representation*) と呼ぶ。カスプ保型表現 π と言う場合には既約ユニタリ表現の同値類 π だけでなく、付随する $(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 加群 π のカスプ形式の空間での実現 $\mathcal{A}_0(G)_\pi$ を指すことが多い。定理 4.5 から $\mathcal{A}_0(G)_\pi$ は一意なのでこの慣習は正当化されている。F の**イデール類指標** $\chi : \mathbb{A}^\times / F^\times \to \mathbb{C}^\times$ を取る。その $F_v^\times \subset \mathbb{A}^\times$ への制限を χ_v と書けば、有限個を除く非アルキメデス素点 v で χ_v は不分岐で、$\chi = \bigotimes_v \chi_v$ である。カスプ保型表現 $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ を取り、付随する $(\mathfrak{g}_\infty, \boldsymbol{K}_\infty) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 加群の制限テンソル積分解を $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$ とする。各 π_v には標準 L, ε 因子 $L(s, \pi_v \times \chi_v)$, $\varepsilon(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v)$ が対応していた (定理 3.7, 3.13)。

定理 4.7. カスプ保型表現 $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ とイデール類指標 $\chi = \bigotimes_v \chi_v$ を取る。
(i) Euler 積 $L(s, \pi \times \chi) := \prod_v L(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v)$ は $\Re s \gg 0$ で絶対収束し、$s \in \mathbb{C}$ についての整型函数に延びる。これを π の**標準 L 函数** (*standard L-function*) という。
(ii) $L(s, \pi \times \chi)$ は $C_1 < \Re s < C_2$, $(C_1 < C_2 \in \mathbb{R})$ の形の領域上で有界。
(iii) π_v, χ_v が不分岐で $\mathrm{ord}\,\psi_v = 0$ である有限素点では $\varepsilon(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v) = 1$ だから、

$$\varepsilon(s, \pi \times \chi) := \prod_v \varepsilon(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v)$$

は実質的に有限積である。これは $\psi = \bigotimes_v \psi_v$ の取り方によらず、**函数等式**

$$L(s, \pi \times \chi) = \varepsilon(s, \pi \times \chi) L(1 - s, \pi^\vee \times \chi^{-1})$$

が成り立つ。

証明. (i), (ii) $\mathbb{A}^\times$ 上の勝手な不変測度を取り、$\phi \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$ に対する ***Jacquet-Langlands* のゼータ積分**

$$Z(s, \chi, \phi; g) := \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \phi\Bigl(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Bigr) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} \, da^\times$$

を考える。$\phi\Bigl(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Bigr) = \phi\Bigl(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} wg\Bigr)$ は $a \in \mathbb{A}^\times / F^\times$ の急減少函数であったから、$Z(s, \chi, \phi; g)$ は $s \in \mathbb{C}$ の整型函数で $C_1 < \Re s < C_2$ の形の領域上で有界である。一方、Fourier 展開 (1.11) から

$$\begin{aligned} Z(s, \chi, \phi; g) &= \int_{\mathbb{A}^\times / F^\times} \sum_{\xi \in F^\times} W_\psi\Bigl(\phi, \begin{pmatrix} a\xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Bigr) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} \, da^\times \\ &= \int_{\mathbb{A}^\times} W_\psi\Bigl(\phi, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Bigr) \chi(a) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2} \, da^\times \end{aligned}$$

である。ϕ が $W_\psi(\phi) = \bigotimes_v W_v$, $(W_v \in \mathcal{W}_{\psi_v}(\pi_v))$ を満たすものとすると、適当な素点の有限集合 S の外では W_v は命題 3.9 (iii) で扱った不分岐 Whittaker 函数 W_v^0 に等しい:

$$Z(s, \chi_v, W_v^0, k_v) = L(s, \pi_v \times \chi_v), \quad k_v \in \mathbf{K}_v.$$

しかもそのような v では $\Re s \gg 0$ で $L(s, \pi_v \times \chi_v) \le \dfrac{1}{(1 - q_v^{1/2-s})^2} = \zeta_{F_v}(s - 1/2)^2$ が成り立つ。よって $\Re s \gg 0$ では

$$\begin{aligned} Z(s, \chi, \phi; g) &= \prod_{v \in S} Z(s, \chi_v, W_v; g_v) \prod_{v \notin S} L(s, \pi_v \times \chi_v) \\ &= L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} \end{aligned}$$

と書ける。非アルキメデス的な $v \in S$ では $Z(s,\chi_v,W_v;1) = L(s,\pi_v \times \chi_v)$, アルキメデス的な $v \in S$ では $Z(s,\chi_v,W_v;1) = e^{\lambda_v s}L(s,\pi_v \times \chi_v)$, $\exists\lambda_v \in \mathbb{R}$ となる W_v が取れるから、(i), (ii) が従う。

(iii) $\phi^\vee(g) := \omega_\pi(\det g)^{-1}\phi(g) \in \mathcal{A}_0(G)_{\pi^\vee}$ である。このとき $w \in G(F)$ に注意して

$$
\begin{aligned}
Z(1-s,\chi^{-1},\phi^\vee;wg) &= \int_{\mathbb{A}^\times/F^\times} \omega_\pi(a\det g)^{-1}\phi\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} wg\Big)\chi^{-1}(a)|a|_{\mathbb{A}}^{1/2-s}\,da^\times \\
&= \omega_\pi(\det g)^{-1}\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times} \phi\Big(\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} g\Big)\chi^{-1}(a)|a|_{\mathbb{A}}^{1/2-s}\,da^\times
\end{aligned}
$$

a^{-1} を a と置き直して

$$
= \omega_\pi(\det g)^{-1}Z(s,\chi,\phi;g)
$$

が成り立つ。$W_\phi = \bigotimes_v W_v, W_{\phi^\vee} = \bigotimes_v W_v^\vee$ とすれば、この左辺は局所函数等式 (定理 3.7, 3.13 (iii)) から

$$
\begin{aligned}
Z(1-s,\chi^{-1},\phi^\vee;wg) &= L(1-s,\pi^\vee\times\chi^{-1})\prod_{v\in S}\frac{Z(1-s,\chi_v^{-1},W_v^\vee;wg)}{L(1-s,\pi_v^\vee\times\chi_v^{-1})} \\
&= L(1-s,\pi^\vee\times\chi^{-1})\prod_{v\in S}\omega_{\pi_v}(\det g_v)^{-1}\varepsilon(s,\pi_v\times\chi_v,\psi_v)\frac{Z(s,\chi_v,W_v;g)}{L(s,\pi_v\times\chi_v)} \\
&= \omega_\pi(\det g)^{-1}L(1-s,\pi^\vee\times\chi^{-1})\prod_{v\in S}\frac{\varepsilon(s,\pi_v\times\chi_v,\psi_v)}{L(s,\pi_v\times\chi_v)}Z(s,\chi_v,W_v;g)
\end{aligned}
$$

右辺は

$$
\omega_\pi(\det g)^{-1}Z(s,\chi,\phi;g) = \omega_\pi(\det g)^{-1}L(s,\pi\times\chi)\prod_{v\in S}\frac{Z(s,\chi_v,W_v;g)}{L(s,\pi_v\times\chi_v)}
$$

となるので主張が従う。この函数等式から $\varepsilon(s,\pi\times\chi)$ は ψ によらないこともわかる。 □

4.4 Hecke 作用素と Ramanujan-Petersson 予想

ここでは古典的な Hecke 作用素が本質的に 3.2.1 で導入した局所 Hecke 作用素 T_p に一致することを見る。次いでこの事実を用いて、古典的な Ramanujan-Petersson 予想の保型表現への佐武による拡張 [Sat66] を紹介する。

一時的に 1.3 節の状況に戻って、$F = \mathbb{Q}, K \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ を $\det K = \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ なる開コンパクト部分群とする。ここではさらに K の中心が $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ を含むと仮定する。例 1.2 の $K_0(N)$ などはこの仮定を満たすが、この状況では $\mathit{\Gamma}$ が $-\mathbf{1}_2$ を含むため、奇数ウェイトの保型形式は 0 のみとなる。

レベル $\mathit{\Gamma} := K \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ に対するウェイト k の保型形式の空間 $M_k(\mathit{\Gamma})$ 上の Hecke 作用素を思い出そう。素数 p がレベル $\mathit{\Gamma}$ を**割らない**とは、$G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}^p) := \{(g_v)_v \in G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}) \mid g_p = 1\}$

のある開コンパクト部分群 K^p に対して直積分解 $K = \boldsymbol{K}_p \times K^p$ が成り立つこととする。例えば $\Gamma = \Gamma_0(N)$ ならば、p が Γ を割るとは p が N の素因数であることにほかならない。Γ を割らない素数のみを素因数とする自然数 n に対して、$\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ での両側剰余類の右剰余類分解 (軌道分解)

$$\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \Gamma = \coprod_{i=1}^{r} \Gamma \alpha_i$$

がある。これを使って *Hecke* **作用素** $T(n), R(n)$ を

$$T(n) f(z) := n^{k/2-1} \sum_{i=1}^{r} f(\alpha_i.z) j(\alpha_i, z)^k, \quad R(n) f(z) := n^{k-2} f(z), \quad f \in M_k(\Gamma)$$

と定める ([石井, 2.3] 参照)。ただし

$$j(g, z) := \frac{\sqrt{\det g}}{cz + d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\mathbb{Q}), \det g > 0$$

と書いている。これらで生成される $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_k(\Gamma))$ の部分環 $\mathbb{T}_\Gamma$ をレベル Γ, ウェイト k の (不分岐) *Hecke* **環**という。$T(p)$ (p は Γ を割らない素数) たちの同時固有函数からなる $M_k(\Gamma)$ の基底があることが知られている。次の定理は Deligne により Weil 予想の帰結として証明された [Del69], [Del74]。

定理 4.8 (Ramanujan-Petersson 予想)**.** $f \in S_k(\Gamma)$ が $T(p)$ たちの同時固有函数のとき、その固有値 $c(p)$ は $|c(p)| \leq 2p^{(k-1)/2}$ を満たす。

$\mathbb{T}_\Gamma$ の命題 1.6 の同型による $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}_0(G; k, K))$ での像を調べよう。$\mathbb{T}_\Gamma$ は $T(p), R(p)$ (p はレベルを割らない素数) たちで生成されているので、これらの作用を見れば十分である。

補題 4.9. $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma)$ のとき、レベル Γ を割らない素数 p に対して

$$T(p)\phi_f(g) = p^{k/2-1} R(T_p)\phi_f(g) := p^{k/2-1} \int_{\boldsymbol{K}_p \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) \boldsymbol{K}_p} \phi_f(g x_p) \, dx_p$$

が成り立つ。ここで dx_p は $\mathrm{vol}\, \boldsymbol{K}_p = 1$ となる $G(\mathbb{Q}_p)$ 上の不変測度である。

すなわち $T(p)$ はアデール群の p 成分 $G(\mathbb{Q}_p)$ だけに作用する局所作用素である。これから直ちに $T(p), T(q), (p \neq q)$ が可換であることが見て取れる。

証明. $z = g_\infty.i \in \mathfrak{H}, (g_\infty \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ とする。上の通り Γ 軌道分解を

$$\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \Gamma = \coprod_{i=0}^{p} \Gamma \alpha_i \tag{4.1}$$

と書けば、$\det\alpha_i = p$ から $p^{-1/2}\alpha_i \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ゆえ

$$\begin{aligned}
T(p)\phi_f(g_\infty) =& T(p)f(z)\cdot j(g_\infty,i)^k = p^{k/2-1}\sum_{i=1}^{r} f(\alpha_i.z)j(\alpha_i,z)^k j(g_\infty,i)^k \\
=& p^{k/2-1}\sum_{i=1}^{r} f(p^{-1/2}\alpha_i.z)\big(j(p^{-1/2}\alpha_i,g.i)j(g_\infty,i)\big)^k \\
=& p^{k/2-1}\sum_{i=1}^{r} \phi_f(p^{-1/2}\alpha_i g_\infty)
\end{aligned}$$

$G(\mathbb{Q})\mathbb{R}_+^\times p^{-1/2}\alpha_i g_\infty K = G(\mathbb{Q})\big(\alpha_i g_\infty \mathbb{R}_+^\times \times K\big) = G(\mathbb{Q})\big(g_\infty \mathbb{R}_+^\times \times \alpha_i^{-1}K\big)$ だから

$$=p^{k/2-1}\sum_{i=1}^{r} \phi_f(g_\infty, \alpha_i^{-1})$$

である。ここで (4.1) の両辺の $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ での閉包を取り、さらに両辺の逆元を取れば

$$\coprod_{i=0}^{p} \alpha_i^{-1}K = K\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^{-1}\end{pmatrix}K = p^{-1}K\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}K$$

を得る。よって $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 上の不変測度 dg_{fin} を $\mathrm{vol}\,K = 1$ となるよう選び、$K\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{smallmatrix}\right)K$ の特性函数を $T_K(p)$ と書けば、上は

$$\begin{aligned}
T(p)\phi_f(g_\infty) =& p^{k/2-1}\sum_{h\in K\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{smallmatrix}\right)K/K} \phi_f(g_\infty, p^{-1}h) \\
=& p^{k/2-1}\sum_{h\in K\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{smallmatrix}\right)K/K} \int_K \phi_f(pg_\infty, hg_{\mathrm{fin}})\,dg_{\mathrm{fin}} \\
=& p^{k/2-1}\int_{K\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{smallmatrix}\right)K} \phi_f(g_\infty, g_{\mathrm{fin}})\,dg_{\mathrm{fin}} \\
=& p^{k/2-1}\int_{G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})} T_K(p)(g)\phi_f(g_\infty g_{\mathrm{fin}})\,dg_{\mathrm{fin}} \\
=& p^{k/2-1}R(T_K(p))\phi_f(g_\infty)
\end{aligned}$$

となる。3.2.1 節の記号で $T_K(p) = T_p \otimes 1_{K^p}$ であり、

$$R(1_{K^p})\phi_f(x) = \int_{K^p} \phi_f(xg)\,dg_{\mathrm{fin}}^{(p)} = \phi_f(x)$$

だから主張が従う。 □

一般化された Ramanujan-Petersson 予想　ある既約カスプ保型表現 $\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$ に対して $\phi_f \in \mathcal{A}_0(G)_\pi$ であるとする。$h \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}))$ に対して $h^*(g) := \overline{h(g^{-1})} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}))$ と書けば、

$$\begin{aligned}(\pi(h)\phi, \phi') =&\Big(\int_{G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})} h(g)\pi(g)\phi\, dg, \phi'\Big) = \int_{G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})} h(g)(\pi(g)\phi, \phi')\, dg \\ =&\int_{G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})} h(g)(\phi, \pi(g^{-1})\phi')\, dg = \Big(\phi, \int_{G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})} \overline{h(g)}\pi(g^{-1})\phi'\, dg\Big) \\ =&(\phi, \pi(h^*)\phi')\end{aligned}$$

である。特に $h = T_K(p) = T_p \otimes 1_{K^p}$ のとき、h^* は

$$\boldsymbol{K}_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{K}_p \times K^p = p^{-1}\Big(\boldsymbol{K}_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \boldsymbol{K}_p \times K^p\Big)$$

の特性函数ゆえ、$\mathcal{A}_0(G)_\pi$ の元が $(1, p^{-1}) \in Z(\mathbb{Q})(\mathbb{R}_+^\times \times \{1\})$ で不変なことに注意して

$$\begin{aligned}(T(p)\phi, \phi') =&p^{k/2-1}(\pi(T_K(p))\phi, \phi') = p^{k/2-1}(\phi, \pi(T_K(p))\pi(1, p^{-1})\phi') \\ =&(\phi, p^{k/2-1}\pi(T_K(p))\phi') = (\phi, T(p)\phi')\end{aligned} \tag{4.2}$$

がわかる。つまり Hecke 作用素は Petersson 内積に関してエルミート (自己随伴) 作用素である。

さて、以上の準備のもとで定理 4.8 を考えよう。ϕ_f はレベル $\varGamma$ を割らない素数 p に対しては $\boldsymbol{K}_p$ 不変だから、π_p は無限次元不分岐表現、つまり不分岐な $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Irr}\,\mathbb{Q}_p^\times$ を使って $\pi_p = \pi(\chi_1, \chi_2)$ と書ける。よって補題 4.9 と例 3.3 から

$$\begin{aligned}c(p)\phi_f =&T(p)\phi_f = p^{k/2-1}R(T_p)\phi_f = p^{k/2-1}\pi_p(T_p)\phi_f \\ =&p^{(k-1)/2}(\chi_1(p) + \chi_2(p))\phi_f\end{aligned}$$

がわかる。つまり定理 4.8 は

$$|\chi_1(p) + \chi_2(p)| \le 2 \tag{RPC}$$

に同値である。一方、K についての仮定から $\mathbb{Q}^\times(\mathbb{R}_+^\times \times K) \supset \mathbb{Q}^\times(\mathbb{R}_+^\times \times \widehat{\mathbb{Z}}^\times) = Z(\mathbb{A})$ ゆえ、ϕ_f は左 $Z(\mathbb{A})$ 不変である。言い換えれば π の中心指標は自明だから

$$\chi_1(p)\chi_2(p) = \omega_{\pi_p}(p) = 1 \tag{4.3}$$

を得る。(4.2) から $c(p) = p^{(k-1)/2}(\chi_1(p) + \chi_2(p))$ は実数だから、(RPC), (4.3) は $\chi_1(p), \chi_2(p)$ の絶対値が 1 であることに同値である。(一番主要な条件 (RPC) は $\chi_1(p), \chi_2(p) \in \mathbb{R}$ のときのみに効くことに注意する!) $\mathbb{Q}_p^\times$ はコンパクト部分群 $\mathbb{Z}_p^\times$ と $p^{\mathbb{Z}}$ の直積だから、これは χ_1, χ_2 がユニタリ指標であることにほかならない。結局命題 2.15 と併せて、これは $\pi_p = \pi(\chi_1, \chi_2)$ **が緩増加表現であること**に同値である。

この事実を受けて、一般の代数体 F 上の GL_2 のカスプ保型表現に対しても次が成り立つことが期待されている。

予想 4.10 (一般 Ramanujan-Petersson 予想)**.** F を代数体とし、$\pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$ を $G(\mathbb{A}_F)$ の既約カスプ保型表現とする。このとき任意の素点 v で π_v は緩増加表現であろう。

4.5 逆定理

いよいよ $\pi \in \Pi(G(\mathbb{A})^1)$ がカスプ保型表現である: $m(\pi) = 1$ ための必要十分条件を記述する。π はユニタリであるから、π_v が不分岐であるような非アルキメデス素点 v での Hecke 固有値 $t_1(\pi_v), t_2(\pi_v)$ は $(q_v^{-1/2}, q_v^{1/2})$ に属する (命題 2.15 (e))。これから定理 4.7 の証明と同様にして、$\Re s \gg 0$ で Euler 積

$$L(s, \pi \times \chi) := \prod_v L(s, \pi_v \times \chi_v), \quad L(s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) := \prod_v L(s, \pi_v^\vee \times \chi_v^{-1})$$

が絶対収束することが確かめられる。

定理 4.11. $\Pi(G(\mathbb{A})^1) \ni \pi \simeq \bigotimes_v \pi_v$ の任意の局所成分 π_v が無限次元で、中心指標 ω_π は $F^\times$ 上自明だとする。F の任意のイデール類指標 χ に対して定理 4.7 (i), (ii), (iii) を満たすなら、π はカスプ保型表現である。

証明. (スケッチ) π の Whittaker 模型 $\mathcal{W}_\psi(\pi)$ を取り、各 $W \in \mathcal{W}_\psi(\pi)$ に対して

$$\phi_W(g) := \sum_{\xi \in F^\times} W\Big(\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big)$$

とおく。W の制限テンソル積分解が $W = \bigotimes_v W_v$ の形としてよい。命題 3.9 (i) の証明中の W_v の明示公式から得られる評価を使って、右辺の和が広義一様絶対収束すること、得られた ϕ_W が緩増加であることが示せる。$\mathbb{A}/F$ の Fourier 逆公式から

$$\int_{\mathbb{A}/F} \phi_W\Big(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big) \overline{\psi^\xi(x)}\, dx = \begin{cases} W\Big(\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big) & \xi \in F^\times \text{ のとき} \\ 0 & \xi = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

だから $W \mapsto \phi_W$ は単射で、ϕ_W の定数項は消えている。

また $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{smallmatrix}\right) \in B(F)$ に対して

$$\phi_W\Big(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} g\Big) = \sum_{\xi \in F^\times} W\Big(\begin{pmatrix} \alpha\xi & \beta\xi \\ 0 & \delta \end{pmatrix} g\Big) = \sum_{\xi \in F^\times} W\Big(\begin{pmatrix} 1 & \beta\delta^{-1}\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\xi & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} g\Big)$$

$\mathcal{W}_\psi(\pi)$ の条件と ω_π が $F^\times$ 上自明なことから

$$\begin{aligned} &= \sum_{\xi \in F^\times} W\Big(\begin{pmatrix} \alpha\delta^{-1}\xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big) = \sum_{\xi \in F^\times} W\Big(\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\Big) \\ &= \phi_W(g) \end{aligned}$$

が成り立つ。

$G(F) = B(F) \coprod B(F)wU(F)$ だったから ϕ_W が保型形式であることを見るには w 不変であることを確かめればよい。これは函数等式から次のようにして従う。

まず $\Re s \ll 0$ だとすると $Z(1-s, \chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg)$ の定義積分は絶対収束しているから、定理 4.7 (iii) の証明と同様の変形が正当化される。

$$
\begin{aligned}
Z(1-s,&\chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg) \\
&=\omega_\pi(\det g)^{-1} \int_{\mathbb{A}^\times/F^\times} \phi_W\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} wg\right) \chi^{-1}(a)|a|_{\mathbb{A}}^{1/2-s}\, da^\times \\
&=\omega_\pi(\det g)^{-1} \int_{\mathbb{A}^\times/F^\times} \phi_W\left(w \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi^{-1}(a)|a|_{\mathbb{A}}^{1/2-s}\, da^\times \\
&=\omega_\pi(\det g)^{-1} \int_{\mathbb{A}^\times/F^\times} \phi_W\left(w \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a)|a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2}\, da^\times .
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

一方、素点の適当な有限集合 S に対して、仮定から整型函数の等式

$$
Z(s, \chi, \phi_W; g) = L(s, \pi \times \chi) \prod_v \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)}
$$

が成り立つ。$\Re s \gg 0$ のとき、これを $Z(1-s, \chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg)$ に適用すると

$$
Z(1-s,\chi^{-1}, \phi_W^\vee; wg) = L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \frac{Z(1-s, \chi_v^{-1}, W_v^\vee; wg_v)}{L(1-s, \pi_v^\vee \times \chi_v^{-1})}
$$

局所函数等式を使って

$$
\begin{aligned}
&=L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \prod_{v \in S} \varepsilon(s, \pi_v \times \chi_v, \psi_v) \omega_{\pi_v}^{-1}(\det g_v) \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} \\
&=\varepsilon(s, \pi \times \chi) L(1-s, \pi^\vee \times \chi^{-1}) \omega_\pi^{-1}(\det g) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)}
\end{aligned}
$$

仮定の条件 (定理 4.7) (iii) から

$$
\begin{aligned}
&=\omega_\pi^{-1}(\det g) L(s, \pi \times \chi) \prod_{v \in S} \frac{Z(s, \chi_v, W_v; g_v)}{L(s, \pi_v \times \chi_v)} \\
&=\omega_\pi(\det g)^{-1} \prod_v Z(s, \chi_v, W_v; g_v) \\
&=\omega_\pi(\det g)^{-1} \int_{\mathbb{A}^\times/F^\times} \phi_W\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(a)|a|_{\mathbb{A}}^{s-1/2}\, da^\times
\end{aligned}
$$

と書ける。主張 $\phi_W(g) = \phi_W(wg)$ は、これを (4.4) と組み合わせた等式と次の Cauchy の積分定理の帰結から従う。

主張 4.11.1. 連続函数 $\varphi_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ がある $C > 0$ に対して次の条件を満たすとする。

(i) Fourier 変換 $\widehat{\varphi}_\pm(s) := \int_{\mathbb{R}} \varphi_\pm(x) e^{sx}\, dx$ は $\pm\Re s > C$ で絶対収束する。

(ii) $\widehat{\varphi}_\pm(s)$ は共通の整型函数 $\widehat{\varphi}(s)$ に解析接続され、$\widehat{\varphi}(s)$ は任意の $r < \Re s < R$ の形の領域で有界。

このとき $\varphi_+ = \varphi_-$ である。

□

A　局所類体論の復習

ここでは局所類体論の要項を手短に復習する。局所類体論についての文献は [CF86], [Ser79], [加藤 05] など多数ある。

A.1　局所類体論

$F = \mathbb{R}$ に対する局所類体論は同型 $\mathbb{R}^\times/\mathrm{N}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{C}^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ にすぎない。そこで以下 F は非アルキメデス局所体とし、2 節で用意した記号は断りなく用いるものとする。選択公理 (Zorn の補題) を認めれば F の代数閉包 F^{al} が存在する。F^{al} 内の F 上分離的な元のなす部分体を F の**分離閉包** (*separable closure*) という。F の**絶対** *Galois* **群**を制限準同型に関する射影極限

$$\Gamma = \Gamma_F := \varprojlim_{\bar{F} \supset E \supset F} \mathrm{Gal}(E/F)$$

と定める。ただし極限は $\bar{F}$ に含まれる有限次 Galois 拡大 E/F を走る。このような E/F に対して、自然な全射準同型 $\mathrm{Gal}(E/F) \ni \sigma \mapsto (\sigma|_{\mathcal{O}_E} \bmod \mathfrak{p}_E) \in \mathrm{Gal}(k_E/k_F)$ の核を $I_{E/F}$ と書く。射影極限

$$I_F := \varprojlim_{\bar{F} \supset E \supset F} I_{E/F} \subset \Gamma$$

を F の**惰性群** (*inertia group*) という。定義から従う完全列 $1 \to I_{E/F} \to \mathrm{Gal}(E/F) \to \mathrm{Gal}(k_E/k_F) \to 1$ は射影極限の完全列

$$1 \longrightarrow I_F \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F) \longrightarrow 1 \tag{A.1}$$

を与える。ここで $\bar{k}_F$ は k_F の代数閉包である。$\mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F)$ は $\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に同型で**幾何的** *Frobenius* **自己同型** $\mathrm{Fr}_F : x \mapsto x^{1/q}$ で位相群として生成されているのだった。

F の $\bar{F}$ での**アーベル閉包**、つまり $\bar{F}$ に含まれる全ての有限次アーベル拡大の合成体を F^{ab} と書けば、

$$\Gamma_{\mathrm{ab}} := \varprojlim_{F^{\mathrm{ab}} \supset E \supset F} \mathrm{Gal}(E/F)$$

は $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ に等しい。ただし $[\Gamma, \Gamma]$ は Γ の交換子たちで生成される閉部分群である。

E/F を有限次拡大とするとき、$z \in E$ を E の F 線型自己準同型と見たものの行列式 $\mathrm{N}_{E/F}(z) := \det_F(z|_E)$ を z の E/F での**ノルム**というのだった。$\mathrm{N}_{E/F} : E^\times \to F^\times$ は準同型である。

定理 A.1 (局所類体論の主定理)**.** 準同型 $\mathrm{rec}_F : F^\times \to \Gamma_{\mathrm{ab}}$ (**相互律射**という) で次を満たすものが唯一つある。
(i) F の不分岐拡大 $E \subset \bar{F}$ に対して $\mathrm{rec}_F(\varpi)|_E = \mathrm{Fr}_F|_E$.
(ii) F の有限次アーベル拡大 $E \subset \bar{F}$ に対して $F^\times \xrightarrow{\mathrm{rec}_F} \Gamma_{\mathrm{ab}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal(E/F)}$ は同型 $\mathrm{rec}_{E/F}$: $F^\times/\mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(E/F)$ を与える。

注意 A.2. Γ には有限次 Galois 拡大 E/F に対する Γ_E たちを単位元の基本近傍系とする位相が入っている。一方 $\mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \subset F^\times$ は $F^\times$ の単位元の近傍ではあるが、それらの基底にはなっていない。つまり rec_F は連続だが開写像ではない。

Γ の *Artin* **指標**、つまり準同型 $\xi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ でその像が有限であるものの群を $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^\times)$ と書く。同様に準同型 $\chi : F \to \mathbb{C}^\times$ でその像が有限であるものを F の *Dirichlet* **指標**と呼ぶことにして、それらのなす群を $\mathrm{Hom}(F^\times, \mathbb{C}^\times)$ と書く。

系 A.3. 同型 $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^\times) \ni \rho \mapsto \chi_\rho := \rho \circ \mathrm{rec}_F \in \mathrm{Hom}(F^\times, \mathbb{C}^\times)$ で次を満たすものが唯一つある。
(i) 任意の有限次アーベル拡大 E/F に対して $\rho \circ \mathrm{rec}_E = \chi \circ \mathrm{N}_{E/F}$.
(ii) I_F 上自明な $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^\times)$ に対して $\chi_\rho(\varpi) = \rho(\mathrm{Fr}_F)$.

A.2 Weil 群と Langlands の局所類体論

前節の類体論の相互律射は $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ の位相の情報を遺伝しないため、$F^\times$ の位数有限な指標しか記述できない。その改良版として Weil 群の指標と Hecke 量指標 (つまり GL_1 の既約保型表現) の間の対応を与えるのが、Langlands の意味の類体論である[15]。主たる文献は [Mil06] (とそこに挙げてある Langlands と Labesse の論文) であるが、Weil 群などについては [Tat79] がユーザーフレンドリーでよい。

Weil 群　F の *Weil* **群**とは、

- 位相群 W_F と稠密な像を持つ連続準同型 $\varphi_F : W_F \to \Gamma$.
- $\bar{F}$ に含まれる有限次拡大 E/F に対する同型 $\mathrm{rec}_E : E^\times \xrightarrow{\sim} W_{E,\mathrm{ab}}$ の族。ただし、$W_E := \varphi_F^{-1}(\Gamma_E = \mathrm{Gal}(\bar{F}/E))$ と書いた。

[15] ここで扱う場合は A. Weil によって構成されたが [Wei51]、トーラスの保型表現に対する Langlands 対応として函手的に定式化したのは Langlands であり、この後者の視点が保型形式論にとって不可欠なためにこう呼ばれている。

からなるデータで次の条件を満たすものである。

(W$_1$) 合成 $E^\times \overset{\mathrm{rec}_E}{\to} W_{E,\mathrm{ab}} \to \Gamma_{E,\mathrm{ab}}$ は定理 A.1 の rec_E に一致する。

(W$_2$) $\sigma \in \Gamma$ とその $W_F \to \Gamma$ での任意の逆像 $w_\sigma \in W_F$ に対して次は可換。

$$\begin{tikzcd} E^\times \arrow[r, "\mathrm{rec}_E"] \arrow[d, "\sigma"'] & W_{E,\mathrm{ab}} \arrow[d, "\mathrm{Ad}(w_\sigma)"] \\ \sigma(E)^\times \arrow[r, "\mathrm{rec}_E"] & W_{\sigma(E),\mathrm{ab}} \end{tikzcd}$$

(W$_3$) F の ($\bar{F}$ 内の) 有限次拡大 $K \supset E$ に対して次は可換。

$$\begin{tikzcd} K^\times \arrow[r, "\mathrm{rec}_K"] & W_{K,\mathrm{ab}} \\ E^\times \arrow[r, "\mathrm{rec}_E"] \arrow[u, "\text{自然な埋め込み}"] & W_{E,\mathrm{ab}} \arrow[u, "t_{K/E}\ (\text{トランスファー射})"'] \end{tikzcd}$$

(W$_4$) 自然な準同型 $W_F \to \varprojlim_E W(E/F)$ は同型。ただし E は $\bar{F}$ に含まれる F の有限次拡大を走り、$W(E/F) := W_F/W_{E,\mathrm{ab}}$ である。

トランスファー射については [Ser79, VII.8 節] を参照のこと。実際の計算にはこれらの定義から直ちに導かれる可換図式

$$\begin{tikzcd} E^\times \arrow[r, "\mathrm{rec}_E"] \arrow[d, "\mathrm{N}_{E/F}"'] & W_{E,\mathrm{ab}} \arrow[d, "\text{自然な埋め込み}"] \\ F^\times \arrow[r, "\mathrm{rec}_F"] & W_{F,\mathrm{ab}} \end{tikzcd} \tag{A.2}$$

もよく用いられる。[Tat79, §1] に解説されているとおり、実は定理 A.1 はこの Weil 群の定義 (存在とその函手性) に含まれている。すなわち局所類体論という複雑な準同型の族 $\{\mathrm{rec}_E : E^\times \to \Gamma_{E,\mathrm{ab}}\}_{E/F}$ が Weil 群というパッケージに収まっているのであり、その簡便性が我々の目的ににとって重要なのである。

例 A.4. (i) $F = \mathbb{C}$ のとき $W_\mathbb{C} = \mathbb{C}^\times$ である。$F = \mathbb{R}$ ならば $W_\mathbb{R} = W_\mathbb{C} \sqcup W_\mathbb{C} w_\sigma$, ($\sigma$ は複素共役を表す) であり、それらの間の関係式は

$$\mathrm{Ad}(w_\sigma)z = \bar{z}, \quad w_\sigma^2 = -1$$

で与えられる。W_F は Γ の $\mathbb{C}^\times$ による拡大になっている。
(ii) F が非アルキメデス的なとき、W_F は次の可換図式で特徴付けられる Γ の稠密部分群である。

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & I_F \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & (\mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}) \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & I_F \arrow[r] \arrow[u, equal] & W_F \arrow[r] \arrow[u, "\varphi_F"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, "\text{埋め込み}"'] & 1 \end{tikzcd}$$

Langlands の局所類体論　$\mathrm{Irr}\, F^\times = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(F^\times, \mathbb{C}^\times)$ で $F^\times$ の**擬指標**、つまり連続な準同型 $\omega : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ の群を表す。$\Pi(F^\times) \subset \mathrm{Irr}(F^\times)$ で $F^\times$ の**指標**、つまり像が $\mathbb{C}^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z\bar{z} = 1\}$ に含まれる擬指標のなす部分群を表す。次は [Mil06, 定理 8.13] の特別な場合である。

定理 A.5. (i) $\Phi(\mathbb{G}_m/F) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(W_F, \mathbb{C}^\times)$ と書けば、標準同型 $\mathrm{Irr}\, F^\times \ni \omega \mapsto \varphi_\omega \in \Phi(\mathbb{G}_m/F)$ であって、有限次拡大 E/F に対して、

(a) $\omega \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ のとき、$\varphi_\omega|_{W_E} = \varphi_{\omega\circ \mathrm{N}_{E/F}}$.

(b) $\omega_{E,\psi} \in \mathrm{Irr}\, E^\times$ のとき、$\varphi_{(\omega_{E,\psi}|_{F^\times})} = \varphi_{\omega_{E,\psi}} \circ t_{E/F}$.

を満たすものがただ一つある。
(ii) $\Phi_{\mathrm{temp}}(\mathbb{G}_m/F) := \{\varphi \in \Phi(\mathbb{G}_m/F) \,|\, \varphi(W_F) \subset \mathbb{C}^1\}$ と書けば、上は $\Pi(F^\times)$ と $\Phi_{\mathrm{temp}}(\mathbb{G}_{m,F})$ の間の同型に制限される。

例 A.6. (i) $\mathrm{Irr}\, \mathbb{C}^\times \ni \omega(z) = (z\bar{z})^s (z/\bar{z})^{n/2}$, $(s \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z})$ には $\varphi_\omega(z) = z^{s+n/2}\bar{z}^{s-n/2}$ が対応する。
(ii) $\mathrm{Irr}\, \mathbb{R}^\times \ni \omega(x) = |x|_{\mathbb{R}}^s \mathrm{sgn}(x)^\epsilon$, $(s \in \mathbb{C}, \epsilon \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の φ_ω は $\varphi_\omega(z) = (z\bar{z})^s$, $\varphi_\omega(w_\sigma) = (-1)^\epsilon$ で定まる。
(iii) F が非アルキメデスのとき、$\omega(x) = |x|_F^s$, $(s \in \mathbb{C})$ の形の擬指標を**不分岐**擬指標という。これには I_F 上自明で $\varphi_\omega(\mathrm{Fr}_F) = q^{-s}$ で定まる φ_ω が対応する。

本文では記号を転用して、$\omega \in \mathrm{Irr}\, F^\times$ に対応する φ_ω をやはり ω と書いている。

参考文献

[BC79] A. Borel and W. Casselman, editors. *Automorphic forms, representations and L-functions, Part 1*, Vol. 33, Providence, RI, 1979. Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977, Amer. Math. Soc.

[Bum97] Daniel Bump. *Automorphic forms and representations*, Vol. 55 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge UP, 1997.

[BZ76] I. N. Bernšteĭn and A. V. Zelevinskiĭ. Representations of the group $GL(n,F)$, where F is a local non-Archimedean field. *Uspehi Mat. Nauk*, Vol. 31, No. 3(189), pp. 5–70, 1976.

[Cas] W. Casselman. Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups. `http://www.math.ubc.ca/~cass/research/p-adic-book.dvi` からダウンロードできる。

[Cas73] William Casselman. On some results of Atkin and Lehner. *Math. Ann.*, Vol. 201, pp. 301–314, 1973.

[CF86] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors. *Algebraic number theory*, London, 1986. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers].

[Del69] Pierre Deligne. Formes modulaires et représentations ℓ-adiques. Vol. Exp. 355 of *Séminaire N. Bourbaki*, pp. 139–172. 1968–69.

[Del74] P. Deligne. La conjecture de weil i. *Publ. Math. IHES*, Vol. 43, pp. 273–307, 1974.

[Eic38] M. Eichler. Allgemeine Kongruenzklasseninteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen. *J. reine Angew. Math.*, Vol. 179, pp. 227–251, 1938.

[Gel75] Stephen S. Gelbart. *Automorphic forms on adele groups*, Vol. 83 of *Annals of Math. Studies*. Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, N.J., 1975.

[HC53] Harish-Chandra. Representations of semisimple Lie groups, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 75, pp. 185–243, 1953.

[HC66] Harish-Chandra. Discrete series for semisimple Lie groups. II Explicit determination of characters. *Acta Math.*, Vol. 116, pp. 1–111, 1966.

[JL70] H. Jacquet and R. P. Langlands. *Automorphic forms on* $\mathrm{GL}(2)$. No. 114 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Kud94] Stephen S. Kudla. Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs. *Israel J. Math.*, Vol. 87, No. 1-3, pp. 361–401, 1994.

[Lan76] Robert P. Langlands. *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 544.

[Lan80] Robert P. Langlands. *Base change for* $\mathrm{GL}(2)$. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[Mil06] J.S. Milne. *Arithmetic duality theorems*. Booksurge Publishing, 2006. 2nd. edition.

[MW94] Colette Mœglin and Jean-Loup Waldspurger. *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein*, Vol. 113 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. Une paraphrase de l'Écriture. [A paraphrase of Scripture].

[Sat66] Ichiro Satake. Spherical functions and Ramanujan conjecture. In *Algebraic groups and discontinuous subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Colorado Univ., Boulder, Cor., 1965)*, pp. 258–264. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.

[Ser79] Jean-Pierre Serre. *Local fields*, Vol. 67 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1979. Translated from the French by Marvin Jay Greenberg.

[Sha04] Joseph A. Shalika. Representation of the two by two unimodular group over local fields. In Haruzo Hida et al., editor, *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory. Papers from the conference in honor of Joseph Shalika on the occasion of his 60th birthday*, pp. 1–38. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, USA, 2004.

[Tat79] J. Tate. Number theoretic background. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pp. 3–26. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Tat86] J. Tate. Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions. In J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors, *Algebraic number theory*, pp. xviii+366. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1986. Proceedings of the instructional conference held at the University of Sussex, Brighton, September 1–17, 1965. Reprint of the 1967 original.

[Wal88] Nolan R. Wallach. *Real reductive groups I*, Vol. 132 of *Pure and Applied Math.* Academic Press, San Diego, CA, 1988.

[Wal92] N. Wallach. *Real reductive groups II*, Vol. 132-II of *Pure and Applied Math.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], San Diego, CA, 1992.

[Wei51] A. Weil. Sur la théorie du corps de classes. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 3, pp. 1–35, 1951.

[Wei95] André Weil. *Basic number theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[加藤 05] 加藤和也, 黒川信重, 斎籐毅. 数論 I — Fermat の夢と類体論—. 岩波書店, 東京, 2005.

[黒田 80] 黒田成俊. 関数解析, 共立数学講座, 第 15 巻. 共立出版, 1980.

[石井] 石井卓. 1 変数保型形式に付随する L 関数. このサマースクールでのプレサマースクール講演録.

索 引